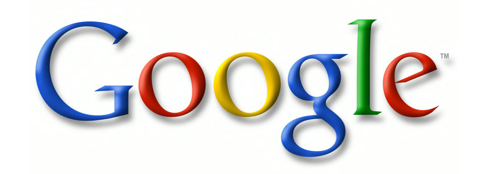
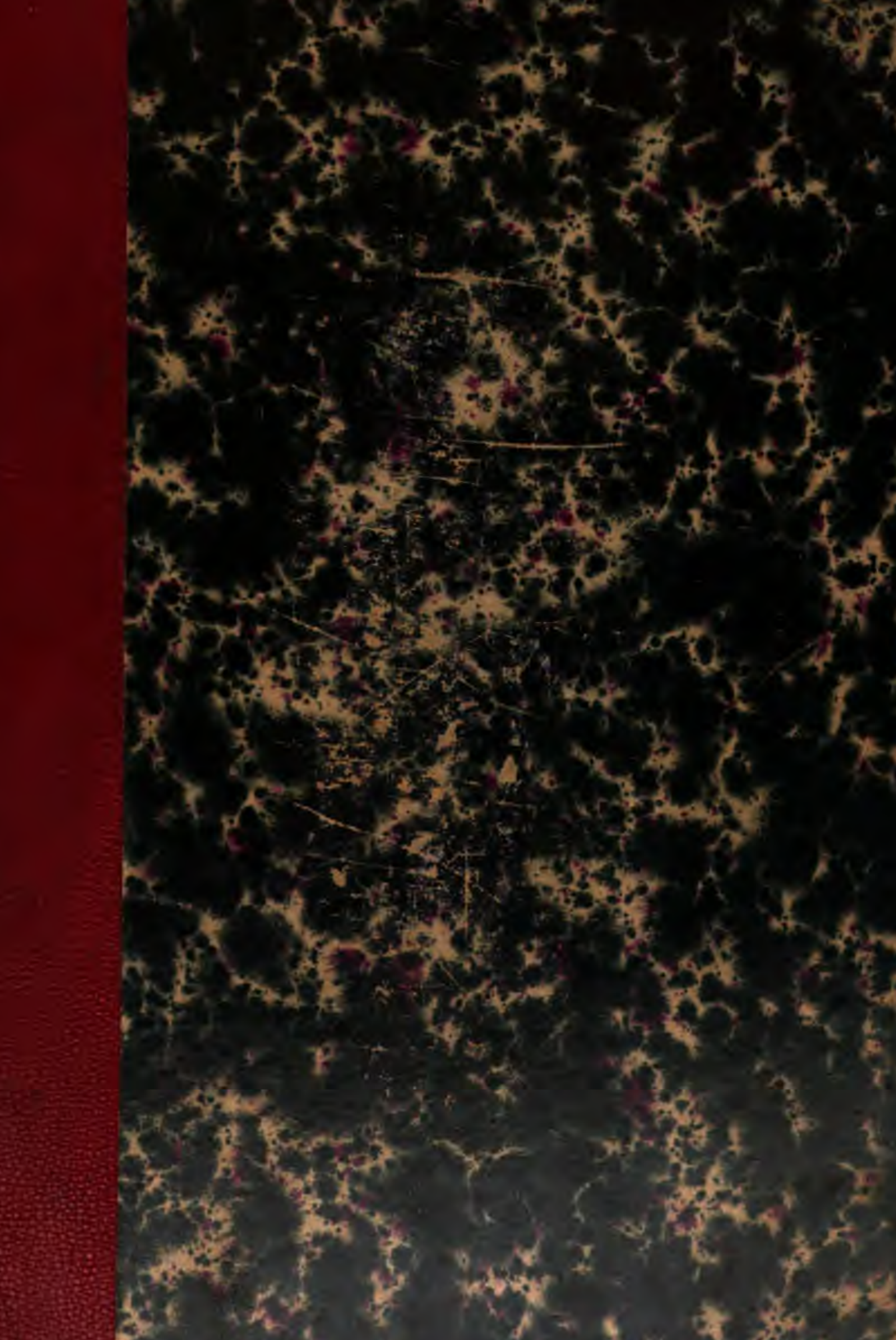
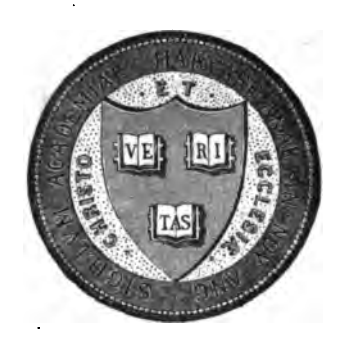





VE
RI
TAS
CHRISTO
ECCLESIAE







Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Uebersicht
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXIV
Jahrgang 1894.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 135. Stiftungstages am 28. März 1894.

Seite
v. Voit: Nekrologe 113

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinz-Regenten am 15. November 1894.

M. v. Pettenkofer: Eröffnungsrede 395
Wahlen 401

Sitzung vom 13. Januar 1894.

F. Richarz: Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome 3
K. Döhlemann: Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung 41

Sitzung vom 3. Februar 1894.

C. v. Kupffer: Ueber Monorhinie und Amphirhinie . . . 51
*Ad. v. Baeyer: Ueber Terpentinöl 51

Sitzung vom 3. März 1894.

Seite

*L. Sohncke: Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten 61

B. W. Stankewitsch: Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der dielektrischen Polarisation in Flüssigkeiten . . . 63

Hermann Brunn: Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale 93

*Ad. v. Baeyer: Ueber Kümmelöl 61

Sitzung vom 5. Mai 1894.

N. Rüdinger: Ueber die Gehirne verschiedener Hunderacen 249

H. Seeliger: Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes 161

L. Graetz und L. Fomm: Ueber normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen 189

L. Boltzmann: a) Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen 207

b) Zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten 211

A. Wassmuth: Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik 219

F. v. Sandberger: Ueber die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge 231

Sitzung vom 2. Juni 1894.

H. Seeliger: Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri 257

Ign. Schütz: Ueber eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz-schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell'schen Elektrodynamik entspricht 273

Sitzung vom 7. Juli 1894.

Seite

G. Bauer: Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome 343

⊙ L. Maurer: Zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen 297

*Ad. v. Baeyer: Ueber das Kümmelöl 296

Sitzung vom 3. November 1894.

R. Hartig: Ueber die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes 385

M. Planck: Ueber den Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen 391

*E. Weinschenk: Beiträge zur Petrographie der östlichen Centralalpen, speciell des Gross-Venedigerstockes . . . 383

Sitzung vom 1. Dezember 1894.

H. Seeliger: Ueber den Schatten eines Planeten 423

F. Lindemann: Ueber die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird 403

*A. v. Baeyer: Ueber die Natur der Terpentinöle und verwandter Substanzen 402

Einsendungen von Druckschriften 361, 439

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 3. November 1894.

1. Herr ROBERT HARTIG hält einen Vortrag: „über die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes“.

2. Herr E. v. LOMMEL legt eine Notiz des Herrn Professor MAX PLANCK in Berlin: „über den Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen“ vor.

3. Herr P. GROTH bespricht und überreicht eine Arbeit des Herrn Privatdocenten Dr. ERNST WEINSCHENK: „Beiträge zur Petrographie der östlichen Centralalpen speciell des Gross-Venedigerstockes“.

a) Ueber die Peridotite und die aus ihnen hervorgegangenen Serpentingesteine. Genetischer Zusammenhang derselben mit den sie begleitenden Minerallagerstätten,

b) Ueber das granitische Centralmassiv und die Beziehungen von Granit und Gneiss.

Beide Abhandlungen sollen in den Denkschriften veröffentlicht werden.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1894. Heft I.

München.
Verlag der K. Akademie.
1894.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 13. Januar 1894.

1. Herr L. Boltzmann legte eine Abhandlung des Herrn Dr. F. Richarz, Privatdocenten an der Universität Bonn: „Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome" vor, unter Besprechung der hauptsächlichsten Resultate derselben.

2. Herr Gustav Bauer überreicht der Classe, ebenfalls unter Mittheilung der wesentlichen Ergebnisse, eine Abhandlung des Herrn Dr. Karl Döhlemann, Privatdocenten für Mathematik an der hiesigen Universität: „Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation dritter Ordnung".

Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome.

Von Dr. F. Richarz,
Privatdocent an der Universität Bonn.

(Eingelaufen 13. Januar.)

In den Sitzungen der Niederrheinischen Gesellschaft in Bonn vom 1. Dezember 1890[1]) und vom 12. Januar 1891[2]) habe ich einige Betrachtungen vorläufig mitgetheilt, welche an die elektrochemische Theorie in derjenigen Form anknüpfen, die ihr durch Herrn H. von Helmholtz in einer Reihe von Abhandlungen aus den Jahren 1873 bis 1882, am ausführlichsten in seiner Rede zu Faraday's Gedächtniss gegeben wurde.[3]) Meine Ausführungen betrafen die elektrische Wirkung ultravioletten Lichtes, die elektrolytische Leitung der Gase, das elektrische Elementarquantum, die die zwischen den Atomen einer Molekel wirksamen elektrostatischen, elektrodynamischen und Gravitationskräfte, die chemische Wärmeentwicklung insbesondere die Dissociationswärme (für Untersalpetersäure und für Joddampf), die Erregung elektrodynamischer Wellen durch periodische Bewegung der Valenzladungen und endlich eine Anwendung der kinetischen Theorie mehratomiger Gase von Herrn Boltzmann[4])

---

1) F. Richarz, Sitzber. der Niederrh. Ges. 47, p. 113, 114; 1890.

2) F. Richarz, Sitzber. der Niederrh. Ges. 48, p. 18—32; 1891.

3) H. v. Helmholtz, Journ. chem. Soc. June 1881. Vorträge u. Reden II, p. 275.

4) L. Boltzmann, Sitzber. d. Wiener Akad., mathem. Cl., 63, p. 417, 1871.

und des Clausius'schen Virialsatzes auf die intramolekulare Bewegung. In anderer Anordnung habe ich über einen Theil dieser Betrachtungen am 26. Juni 1891 in der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin vorgetragen.[1])

Weiterhin schien es dann zweckmässig, bei der ausführlichen Wiedergabe der erwähnten Schlussfolgerungen, von der ich durch andere Arbeit lange abgehalten wurde, strenger zu trennen, was schon vor Einführung der elektrochemischen Theorie abzuleiten war, was erst nach Einführung derselben. Jenes sind die aus der Anwendung des Virialsatzes auf die kinetische Theorie der Materie zu ziehenden Schlüsse in Bezug auf mehratomige Gase[2]) und in Bezug auf das Gesetz von Dulong und Petit.[3]) In ersterer Arbeit ergab sich insbesondere eine von der elektrochemischen Theorie unabhängige Beziehung zwischen Dissociationswärme und Druck, welche (wie früher die aus der elektrochemischen Theorie und der Dissociationswärme gezogenen Schlüsse) bei Untersalpetersäure und Joddampf und ausserdem auch bei der Dissociationswärme des Wasserstoffs nach Herrn E. Wiedemann's Messungen[4]) sich bestätigt fand.

Im Folgenden sind die an die Helmholtz'sche Theorie angeknüpften Betrachtungen ausführlich im Zusammenhang wiedergegeben und der letzte Abschnitt über den molekularen Magnetismus neu hinzugefügt. Während der Niederschrift erschien die Arbeit von Herrn H. Ebert über die Dissociationswärme in der elektrochemischen Theorie.[5])

---

1) F. Richarz, Verh. Phys. Ges. Berlin 10, p. 73—79; 1891.

2) F. Richarz, Wiedem. Ann. 48, p. 467—492; 1893.

3) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 708—716; 1893.

4) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10, p. 253, 1880; 18, p. 509, 1883; Ostwald, Allgem. Chemie 2, p. 49.

5) H. Ebert, Wied. Ann. 50, p. 255—260; 1893.

I. Elektrochemische Theorie nach Helmholtz.

Die Helmholtz'sche Form der elektrochemischen Theorie hat folgenden wesentlichen Inhalt.[1])

Faraday's Gesetz von der festen elektrolytischen Wirkung lässt sich in Verbindung mit Kekulé's Theorie von der chemischen Valenz dahin zusammenfassen, „dass dieselbe Menge Elektricität, wenn sie durch einen Elektrolyten fliesst, immer dieselbe Menge von Valenzwerthen an beiden Elektroden entweder frei macht, oder in andere Verbindungen überführt". Nimmt man die von Herrn Hittorf und Herrn F. Kohlrausch nachgewiesenen Gesetze der Jonenwanderung hinzu, so kann man dem Faraday'schen Gesetze die Form geben: „durch jeden Querschnitt eines Elektrolyten findet immer äquivalente elektrische und chemische Bewegung statt. Genau dieselbe bestimmte Menge, sei es positiver, sei es negativer Elektricität bewegt sich mit jedem einwerthigen Jon, oder mit jedem Valenzwerth eines mehrwerthigen Jon, und begleitet es unzertrennlich bei allen Bewegungen, die dasselbe durch die Flüssigkeit macht".

Bei Hinzunahme der Atomtheorie führt dieses Resultat zu einer Folgerung, welche Herr H. v. Helmholtz so ausspricht: „Wenn wir Atome der chemischen Elemente annehmen, so können wir nicht umhin, weiter zu schliessen, dass auch die Elektricität, positive sowohl wie negative, in bestimmte elementare Quanta getheilt ist, die sich wie Atome der Elektricität verhalten. Jedes Jon muss, solange es sich in der Flüssigkeit bewegt, mit je einem elektrischen Aequivalent für jeden seiner Valenzwerthe vereinigt bleiben. Nur an den Grenzflächen der Elektroden kann eine Trennung eintreten: wenn dort eine hinreichend grosse elektromotorische

1) Vergl. F. Richarz, l. c. und Naturw. Rundschau 6, Nr. 49 und 50; 1891.

Kraft wirkt, dann können die Jonen ihre bisherige Elektricität abgeben und elektrisch neutral werden."

„Wenn die vorher positiv geladenen Atome von Wasserstoff oder irgend einem andern Kation aus ihrer Verbindung ausscheiden und sich gasförmig entwickeln, so ist das entwickelte Gas elektrisch neutral, d. h. es enthält nach der Ausdrucksweise der dualistischen Theorie gleiche Quanta positiver und negativer Elektricität. Entweder also ist jedes Atom elektrisch neutral, oder je ein Atom, welches positiv beladen bleibt, verbindet sich mit je einem Atom, welches seine positive Ladung mit einer negativen ausgetauscht hat."

Ohne Kenntniss der Helmholtz'schen Faraday-Rede hat auch Herr E. Budde aus den Gesetzen der Elektrolyse die Folgerung gezogen, dass es ein Minimalquantum der Elektricität geben müsse und auch bereits den annähernden Werth desselben berechnet.[1]) Diese Arbeit ist mir erst nach Publication meiner vorläufigen Mittheilungen bekannt geworden und hat daher leider in diesen noch keine Erwähnung gefunden.

Das Resultat, die elektrische Beladung der Valenzstellen betreffend, gilt zunächst nur für die freien Valenzen der Jonen in Elektrolyten. Aber es sind viele Thatsachen bekannt, welche dafür sprechen, dass die elektrolytische Leitung eine weit mehr verbreitete Eigenschaft ist, als man früher glaubte, dass dieselbe keineswegs ausschliesslich den Säuren und Salzen zukommt. Auch ist dieselbe, wie wir mit Sicherheit wissen, durchaus nicht auf den flüssigen Aggregatzustand beschränkt. Ferner können wir in zahlreichen Fällen aus secundären Prozessen bei der Elektrolyse auf die elektrische Ladung von Valenzen schliessen, welche nicht nothwendig die freien Valenzen eines Jon sind. Aus stark verdünnter Chlorwasserstoffsäure wird an der Anode neben Chlor auch

1) E. Budde, Wied. Ann. 25, p. 562; 1885.

Sauerstoff entwickelt. Entweder ist nun in diesem Falle der Sauerstoff selbst Anion, oder derselbe entsteht secundär durch Einwirkung des Chlors auf das Lösungswasser. In letzterem Falle würden die Chloratome, indem sie mit dem Wasserstoff des Wassers neue Chlorwasserstoffsäure bilden, ihre ursprüngliche negative Ladung behalten, so dass also der neutral entweichende Sauerstoff die entsprechenden Aequivalente negativer Ladung an die Anode abgeben müsste. Auf jeden Fall können wir schliessen, dass auch in den Wassermolekeln, welche bei der Elektrolyse, wenigstens der concentrirten Chlorwasserstoffsäure, gewiss nicht betheiligt sind, der Sauerstoff negative Ladung besitzt. In derselben Weise kommt man für viele andere Fälle zu der sicheren Folgerung, dass auch andere Valenzen die elektrische Ladung besitzen als die freien Jonenvalenzen. Jedes Atom oder jede Atomgruppe, welche bei einem secundären Process an die Stelle eines Jon treten kann, muss für jede Valenz mit einem elektrischen Elementarquantum beladen sein.

Es bleibt zunächst eine offene Frage, ob bei der elektrolytischen Ausscheidung freier neutraler Molekeln die Neutralisation so zu denken ist, dass jedes einzelne Atom des Jon neutralisirt wird; oder ob dieselbe in der Weise geschieht, dass beispielsweise beim Wasserstoff ein Atom sein positives Elementarquantum an die Kathode abgibt, dafür ein negatives empfängt, und sich mit einem anderen Atom, welches seine positive Ladung behalten hat, zu einer als Ganzes neutralen Molekel vereinigt. Herr von Helmholtz spricht sich für die letztere Alternative aus, welche zugleich mit der aus Avogadros Gesetz gezogenen Folgerung übereinstimmt, dass die Molekeln des freien Wasserstoffs aus je zwei Atomen zusammengesetzt sind.

Dass Atome derselben Art, wie nach dieser Ansicht bei den Gasen die beiden Atome einer Molekel, Ladungen entgegengesetzter Art besitzen können, folgt in anderen Fällen

mit Sicherheit aus elektrolytischen Processen. So ist der Schwefel in den Schwefelmetallen Anion, also negativ geladen; in Schwefelsäure muss er aber positiv geladen sein, da er bei der Elektrolyse concentrirter Schwefelsäure an der Kathode abgeschieden wird — ob dies durch einen primären oder einen secundären Process geschieht, kommt, wie oben auseinandergesetzt, dabei nicht in Betracht. Analog können wir auch für den Stickstoff schliessen; man muss annehmen, dass in der Stickstoffwasserstoffsäure N_3H die freie Valenz der Gruppe N_3 als diejenige eines Anion negativ geladen sei; dagegen bei der Elektrolyse von Amoniaksalzen und salpetersauren Salzen wird unter Umständen freier Stickstoff an der Kathode abgeschieden; also ist in diesen Verbindungen wenigstens ein Theil seiner Valenzwerthe positiv geladen.

Zu der Anschauung, dass von den beiden Atomen, welche die Molekel eines Gases bilden, das eine positiv, das andere negativ elektrisch sei, ist auf ganz anderem Wege auch Herr W. Giese,[1]) sowie später auch Herr A. Schuster[2]) gelangt, welche annehmen, dass unter dem Einflusse elektrischer Kräfte die beiden entgegengesetzt geladenen Atome getrennt werden und als Jonen die Leitung der Elektricität in Gasen ermöglichen. Diese Annahme hat durch die Versuche der beiden genannten und anderer Physiker[3]) einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit erlangt.

Aus den oben angeführten Betrachtungen gelangt Herr von Helmholtz zu dem Schlusse, dass nicht nur bei den

1) W. Giese, Wied. Ann. 17, p. 538, 1882; 38, p. 403, 1889.

2) A. Schuster, Proc. Roy Soc. London 37, p. 317, 1884; 1887 Nr. 256; 1890 Nr. 291 p. 526.

3) J. J. Thomson, Phil. Mag. 15, p. 432, 1883; 29, p. 358, 441, 1890; 36, p. 313, 1893. Rob. v. Helmholtz, Wied. Ann. 32, p. 1, 1887. Rob. v. Helmholtz und F. Richarz, Wied. Ann. 40, p. 161, 1890. E. Wiedemann und H. Ebert, Wied. Ann. 35, p. 209, 1888. J. Elster und H. Geitel, Wied. Ann. 37, p. 325 ff., 1889; 39, p. 330, 331, 1890. C. Ludeking, Phil. Mag. 33, p. 521, 1892.

Jonen, sondern ganz allgemein jeder Valenzwerth eines Atoms mit je einem Elementarquantum entweder positiver oder negativer Elektricität beladen sei.

Weiterhin schliesst Herr von Helmholtz aus Betrachtung der Arbeitsleistungen bei der Elektrolyse, dass die Elementarquanta der beiden Elektricitäten $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$, mit verschiedener Kraft von verschiedenen Atomen (vielleicht auch von den verschiedenen Verbindungsstellen eines einzelnen multivalenten Atoms) angezogen werden. Wasserstoff und die Metalle müssen stärkere Anziehung für $+\varepsilon$, schwächere für $-\varepsilon$ haben; umgekehrt Sauerstoff und die Halogene.

Eine solche, für verschiedene Substanzen und für die beiden Elektricitäten verschiedene Anziehung zwischen ponderabler Materie und Elektricität ist keine ad hoc gemachte Hypothese, sondern muss auch angenommen werden zur Erklärung von Volta's Fundamentalversuch über die Scheidung der Elektricitäten beim Contact heterogener Körper. Aus der Verschiedenheit der Anziehungen für die beiden Elektricitäten ergibt sich, dass unter Leistung positiver Arbeit, welche als abgegebene Wärmemenge erscheinen kann, eine positiv beladene Sauerstoffvalenz ihre Ladung gegen eine negative auszutauschen vermag. Hieraus hat Herr von Helmholtz[1]) das Zustandekommen der Convectionsströme in sauerstoffhaltigen verdünnten Säuren erklärt; weiterhin habe ich gezeigt,[2]) wie jener Umstand ebenfalls eine vollständige Aufklärung darbietet für das verschiedene Verhalten der beiden Gruppen von Superoxyden, welche Schönbein unter den Namen „Ozonide“ und „Antozonide“ unterschied.

Die von Berzelius behauptete und auch von Faraday angenommene Identität der chemischen Verwandtschaft und

1) H. von Helmholtz, Ber. d. Berl. Akad. 1873, p. 587; 1880, p. 285; 1883, p. 662; Pogg. Ann. 150, p. 483, 1873; Wied. Ann. 11, p. 737, 1880. Wissenschaftliche Abhandl. 1, p. 830, 917.

2) F. Richarz, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 21, p. 1675, 1888.

der Elektricität spricht Herr von Helmholtz auf Grund der entwickelten Schlussfolgerungen dahin aus, dass wenigstens die „bei weitem mächtigsten unter den chemischen Kräften elektrischen Ursprungs sind. Die Atome haften an ihren elektrischen Ladungen und die einander entgegengesetzten Ladungen wieder aneinander". Wenn jede Valenz mit einem Elementarquantum entweder von $+E$ oder von $-E$ beladen ist, so können elektrisch neutrale Verbindungen nur hergestellt werden, wenn jede positiv beladene Valenzstelle sich mit je einer negativ beladenen verbindet. „Daraus folgt dann unmittelbar, dass jede Verwandtschaftseinheit eines Atoms nothwendig mit einer und nur mit einer solchen Einheit eines anderen Atoms verknüpft sein muss. Dies ist in der That die wesentliche Behauptung der Valenztheorie der modernen Chemie."

So würde sich in einfachster Weise Kekulés Verkettung der Atome durch die Verbindung ihrer Valenzwerthe ergeben, wie sie in den typischen Verbindungen gefunden wird. Elektrolyte aber gehören stets zu den typischen Verbindungen. Anders würde es sich verhalten mit den losen molecularen Aggregaten, welche nicht mit Valenzwerthen an einander geknüpft sind, z. B. der Bindung von Krystallwasser; ihre Bestandtheile können nicht durch elektrische Kräfte von einander getrennt werden; dieselben werden also auch nicht durch elektrische Kräfte verbunden, sondern anders geartete Molecularkräfte müssen zwischen ihnen wirksam sein.

Herr von Helmholtz hat sich bei seinen Folgerungen und Anschauungen der Sprache der alten dualistischen Theorie bedient; gerade in ihr lassen sich die quantitativen Beziehungen bei der Elektrolyse am leichtesten und bestimmtesten ausdrücken.

Sind die Schlüsse in der Sprache der einen Theorie consequent durchgeführt, so ist der Ausdruck derselben Schlussreihe in der Sprache einer anderen Theorie wie eine Ueber-

setzung: der wesentliche Inhalt bleibt davon unberührt. Insbesondere ist hervorzuheben, dass alle auf Grund feststehender Thatsachen angestellten Berechnungen mechanischer Grössen, wie der Anziehung zwischen Elektricitätsmengen, der Arbeit bei ihrer Trennung u. s. w. von der Sprache der Theorie unberührt bleiben, in welcher der Zusammenhang der Thatsachen bildlich ausgedrückt wird.

II. Aus der kinetischen Gastheorie entnommene Voraussetzungen.

In die Berechnung des elektrischen Elementarquantums geht aus der kinetischen Gastheorie die Zahl der Molekeln in 1 ccm Gas ein. Man muss sich darüber klar sein, mit wie geringer Sicherheit diese Zahl bekannt ist. Ihre Berechnung ist bekanntlich zuerst aufgeführt von Herrn Van der Waals.[1]) Die zu Grunde liegenden Gleichungen sind nach der „kinetischen Theorie der Gase" von Herrn O. E. Meyer, pag. 228—230, folgende:

Es sei L die mittlere molekulare Weglänge, λ die Kante des einer Molekel zukommenden Elementarwürfels, ϱ der von Clausius eingeführte „Radius der Wirkungssphäre". Dann ist in erster Annäherung

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2}$$

Eine zweite Beziehung geht aus von dem wahren Volumen b der Molekeln in der Zustandsgleichung von Herrn Van der Waals. Der Werth von b gilt, wie diese Zustandsgleichung, für die Masseneinheit des betrachteten Gases. O. E. Meyer findet dann aus der Verkleinerung, welche an

1) J. D. van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, deutsch von Roth, Leipzig 1881, Beibl. z. Wied. Ann. 1, p. 10, 1877. Rühlmann, Mechan. Wärmeth. II, p. 244.

dem Werthe von L bei einer zweiten Annäherung anzubringen ist:

$$b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \mathfrak{N} \pi \varrho^3$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Molekeln in der Masseneinheit ist. Multiplicire die beiden Gleichungen mit einander und beachte, dass $\mathfrak{N} \lambda^3 = v$, dem scheinbaren Volumen, welches die Masseneinheit des Gases als Ganzes einnimmt, ist, so ergibt sich

$$\varrho = \frac{3b}{2v} L$$

Es soll bei Anwendung dieser Gleichung stets eine Atmosphäre als Druckeinheit, und das Volumen v der Masseneinheit beim Druck 1 und der Temperatur 0^0 als Volumeneinheit gewählt werden. Die von Van der Waals angegebenen Zahlenwerthe für b gelten meist für diese Einheiten. Einige seiner b sind aber für 1 m Quecksilber als Druckeinheit angegeben; die zugehörige Ausnahmsvolumeneinheit ist also das 0,76 fache unserer gewöhnlichen; und da b ein seinem Wesen nach constantes Volumen bedeutet, betragen die Ausnahms-Zahlenwerthe von b das 1/0,76 fache derjenigen für die gewöhnliche Einheit; zur Reduction auf unsere obigen, gewöhnlichen Einheiten sind jene Ausnahms-Zahlenwerthe von b daher mit 0,76 zu multipliciren.[1])

Wird nach dieser Reduction die Formel für ϱ bei einem Gase angewandt, und wird $p = 1$ Atmosphäre, die Temperatur $= 0^0$ genommen, so wird $v = 1$, und für L ist der Werth L_0 bei 0^0 zu nehmen; also

1) Die obigen Betrachtungen führen mit Uebergehung der letzten Gleichungen auf Seite 229 bei O. E. Meyer für ϱ unmittelbar zu obiger Schlussformel, welche im Wesentlichen mit den ersten Gleichungen auf Seite 230 ebenda übereinstimmt, in der Form aber, insbesondere bezüglich der Dimensionen vielleicht übersichtlicher ist.

$$\varrho = \frac{3}{2} b L_0$$

Für L_0 sind die Werthe genommen, welche aus den für 0° geltenden Reibungscoefficienten η_0 nach den Beobachtungen von Herrn von Obermayer[1]) folgen. Dieselben sind in der unten stehenden Tabelle angegeben; aus η_0 ist die Weglänge nach der Formel

$$L_0 = \frac{\eta_0}{0{,}318 \cdot \mu \cdot \Omega}$$

berechnet,[2]) wo μ die Dichtigkeit, Ω der Maxwell'sche Mittelwerth der Molekulargeschwindigkeit ist. Die bei Wasserdampf unten angegebene Zahl für η_0 ist den Beobachtungen der Herren Kundt und Warburg[3]) entnommen.

Die Herkunft der Werthe von b ist in der unten angegebenen Tabelle jedesmal einzeln aufgeführt; wenn verschiedene Beobachtungen bezw. Berechnungen für ein und dasselbe Gas erheblich verschiedene Werthe ergeben haben, sind die Extreme, sonst das Mittel angegeben.

ϱ, der „Radius der Wirkungssphäre“, wird gleich dem Durchmesser der als starre Kugel gedachten Molekel angenommen, also deren Querschnitt $q = \frac{\varrho^2 \pi}{4}$. Die Summe Q_0 aller Molekularquerschnitte in 1 ccm bei 0° und Atmosphärendruck ergibt sich aus der Weglänge L_0 nach der Formel[4]): $Q_0 = \frac{1}{4\sqrt{2}\,L_0}$. Endlich wird dann $\frac{Q_0}{q}$ die Zahl

---

1) v. Obermayer, Carls Rep. 13, p. 156, 1877.

2) O. E. Meyer, l. c., pag. 323.

3) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 155, p. 540, 1876; O. E. Meyer, l. c., p. 141, 142. Der Werth η ist auf 0° reducirt unter der Annahme, dass der Reibungscoefficient für Wasserdampf wie für andere der Condensation nahe Gase der absoluten Temperatur proportional sei. (O. E. Meyer, p. 159.)

4) O. E. Meyer, l. c., p. 206.

der Molekeln in 1 ccm Gas bei 0° und Atmosphärendruck. Die Resultate, stets in C. G. S.-Einheiten angegeben, sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

	η_0	L_0	Q_0	b	ϱ	$N = \frac{Q_0}{q}$
Luft	1677	912	19400	0,0025 [1]	3,42	21
Stickstoff . . .	1659	918	19200	0,00176 [2]	2,42	42
Wasserstoff . .	861	1783	9900	0,0024 [2] 0,00049 [3]	6,42 1,31	3* 73
Kohlensäure . .	1383	613	28800	0,0028 [4] 0,00059 [2]	2,58 0,54	55 1252*
Stickoxydul . .	1353	598	29500	0,00191 [5]	1,71	128
Aethylen . . .	922	508	34800	0,0025 [6]	1,91	121
Wasserdampf. .	909	628	28100	0,00105 [7]	0,99	365
Schweflige Säure	1225	444	39800	0,00249 [8]	1,66	184
Chloräthyl . . .	869	325	54400	0,00397 [8]	1,94	184
Chlorwasserstoff.	1379	672	26300	0,00173 [8]	1,74	110
	10^{-7}	10^{-8} cm	cm²		10^{-8} cm	10^{18}

Die Werthe von ϱ sind nicht sehr voneinander verschieden, obwohl die Zahl der Atome in einer Molekel zwischen 2 und 8 (bei $C_2 H_5 Cl$) beträgt; auch sind die Werthe von ϱ ganz ähnlich den aus anderen Ueberlegungen erschlossenen. (Vgl. O. E. Meyer § 102, § 107.) Allgemein kann der Durchmesser eines Moleküls etwa von der Grössenordnung 10^{-8} cm angesehen werden; die obigen Zahlen liegen zwischen dem 6fachen und der Hälfte dieses Werthes.

Die Zahlen für N gruppiren sich zwar ersichtlich um ein Mittel, welches etwa 10^{20} beträgt; sie liegen aber bis zum 12fachen und $^1/_{30}$ dieses Werthes, entsprechen also sehr

1) Van der Waals-Roth, l. c., p. 72; und Berechnung von O. E. Meyer, l. c., p. 74. — 2) O. E. Meyer, l. c., p. 74. — 3) Van der Waals-Roth, l. c., p. 99. — 4) Ebd. p. 74, 81, 85, 94, 136. — 5) Ebd. p. 84, 136. — 6) Ebd. p. 86, 101, 136. — 7) Ebd. p. 135. — 8) Ebd. p. 136.

wenig Avogadros. Regel.[1]) Das liegt gewiss nicht lediglich an der Unsicherheit der in die Rechnung eingehenden Beobachtungen, sondern an den Prinzipien der ganzen Ueberlegungen über den „Radius der Wirkungssphäre", über die Art wie die räumliche Ausdehnung der Molekeln in die Weglänge und in die Zustandsgleichung eingeht u. s. w., Ueberlegungen, die man aber vorläufig mit der ihnen anhaftenden Unsicherheit hinnehmen muss, will man nicht überhaupt das intellectuelle Opfer eines Verzichtes auf derartige Speculationen bringen; wenn man nur jederzeit ihrer grossen Unsicherheit eingedenk bleibt.

III. Berechnung des elektrischen Elementarquantums.

Die folgende Rechnung knüpft an die „Berechnung der elektrostatischen Wirkung der elektrolytischen Ladungen von 1 Milligramm Wasser" an, welche Herr von Helmholtz im Anhang I zur Faraday-Rede gegeben hat.

Nach den neuesten Bestimmungen von F. und W. Kohlrausch[2]) scheidet 1 Ampère in 1 sec 0,1740 ccm Knallgas, also 0,1160 ccm Wasserstoff von 0° und Atmosphärendruck aus. Die in 1 sec von der Intensität 1 Ampère durch einen Querschnitt des Stromes transportirte Elektricitätsmenge ist gleich 10^{-1} elektromagnetischen, oder gleich $3 \cdot 10^9$ elektrostatischen C.G.S.-Einheiten. Davon fliesst die Hälfte als positive Elektricität in der einen, die Hälfte als negative in der anderen Richtung. Als den betrachteten Querschnitt

---

1) Die extremen Werthe für *N*, welche in der Tabelle mit * bezeichnet sind, gehen übrigens aus einer Berechnungsweise hervor, bei welcher nur die Abweichung für Wasserstoff und Kohlensäure vom Boyle-Mariotte'schen Gesetz berücksichtigt, während die anderen, dem Mittel näheren Werthe für dieselben Gase aus den Abweichungen auch vom Gay-Lussac'schen Gesetze abgeleitet sind. Vgl. O. E. Meyer, l. c., pag. 74, 230.

2) F. und W. Kohlrausch, Wiedem. Ann. XXVII, p. 59, 1886.

nehmen wir die Kathode. Die sämmtlichen als Kation vorhandenen H-Atome sind ursprünglich positiv beladen. Von denjenigen, welche als neutrales Gas entweichen, gibt die Hälfte bei der Elektrolyse die positive Ladung an die Kathode ab, erhält dafür negative Ladung und vereinigt sich mit der anderen Hälfte, welche ihre positive Ladung behalten hat, zu Molekeln, welche je ein positives und je ein negatives Atom enthalten. Hieraus und aus den obigen Zahlenangaben folgt, dass in 0,1160 ccm Wasserstoffgas die gesammte Ladung der positiven beziehungsweise der negativen Atome $15 \cdot 10^8$ positive beziehungsweise negative elektrostatische C. G. S.-Einheiten beträgt. Nennen wir E den absoluten Werth der Ladung einer Art, welche in 1 ccm Wasserstoff bei 0^0 und Atmosphärendruck vorhanden ist, so folgt

$$E = 129 \cdot 10^8 \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ g}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1} \text{ pro ccm.}$$

Für ein Gas, dessen Molekeln aus 2 zweiwerthigen oder dreiwerthigen Atomen bestehen, z. B. für Sauerstoff und Stickstoff, hat E den zweifachen und dreifachen Werth.

An die erste Ausführung dieser Rechnung hatte ich die Beantwortung der Frage angeknüpft, ob die elektrolytische Leitung in einem Gase durch die Jonenladungen auch bei den stärksten Verdünnungsgraden noch leicht vorstellbar erscheine.[1] Die stärkste Verdünnung, welche mit Toepler-Hagen'schen Quecksilberluftpumpen erreicht wird, beträgt etwa ein Hundert Milliontel Atmosphäre.[2] Dabei kommen also auf 1 ccm Wasserstoff noch 129 elektrostatische Einheiten positiver und negativer Elektricität und entsprechend das Doppelte bezw. Dreifache für Sauerstoff resp. Stickstoff.

---

1) F. Richarz, Sitzber. Niederrh. Ges. Bonn. 47, p. 114, 1. December 1890. Vergl. H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. 50, p. 28/30, 1893.

2) E. B. Hagen, Wied. Ann. 12, p. 438, 1881. A. Raps, Wied. Ann. 48, p. 379, 1893.

Eine Kugel von 1 cm Halbmesser auf ein Potential von 300 Volt geladen, enthält eine elektrostatische Mengeneinheit. Ein schneller Uebergang einer solchen Ladung von der Kugel in das Gas würde also auch bei den grössten herstellbaren Verdünnungen für die Vorstellung keine Schwierigkeit machen.

Aus der oben berechneten elektrischen Gesammtladung einer Art E, welche in 1 ccm Wasserstoffgas vorhanden ist, und aus der Zahl N der Molekeln ergibt sich eine angenäherte Berechnung der Ladung einer Valenzstelle. Die Unsicherheit dieser und aller analogen Berechnungen soll nach dem Vorgange von Herrn A. P. Chattock (siehe Citat pag. 38) durch das Zeichen $\approx$ statt des Gleichheitszeichens angedeutet werden. Für $N \approx 10^{20}$ wird das Helmholtz'sche Elementarquantum

$$\varepsilon = \frac{E}{N} \approx 129 \cdot 10^{-12} \, \mathrm{cm}^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{sec}^{-1}$$

Herr E. Budde findet $510 \cdot 10^{-12}$ C.G.S.; G. J. Stoney[1]) $30 \cdot 10^{-12}$ C.G.S. Nach den früheren Ausführungen würden die extremsten der in der Tabelle auf Seite 14 vorkommenden Werthe von N für das Elementarquantum Abweichungen bis zum 30 fachen und bis zu einem Zwölftel von dem oben angegebenen mittleren Werthe ergeben.

IV. Grössenverhältniss von Gravitation, elektrostatischen und elektrodynamischen Kräften zwischen den Atomen einer Molekel.

Herr von Helmholtz hat in der Faraday-Rede bereits gezeigt, dass die elektrolytischen Ladungen von Wasserstoff und Sauerstoff im Wasser, wenn seine beiden chemischen Bestandtheile ohne ihre Ladungen zu verlieren von einander getrennt werden könnten, eine Anziehung auf einander aus-

1) G. J. Stoney, Trans. Royal Dublin Soc., (2), 4, p. 563—608, 1891.

üben würden, welche der gegenseitigen Gravitation ihrer ponderablen Träger um das 400,000 Billionenfache überlegen wäre.[1]) Da beide Arten von Kräften dem Newton'schen Gesetze gehorchen, kann man die Vergleichung beider Kräfte unabhängig von der Entfernung und Masse machen. Diesen Schluss können wir also auch unmittelbar übertragen auf die beiden Atome einer Molekel. Wenn nun auch dabei die Voraussetzung nicht erfüllt ist, dass die beiden Atome gegenüber ihrer Entfernung als Punkte zu betrachten sind, so werden doch die elektrischen Ladungen ihren Sitz an den einander zugekehrten Seiten der Atome haben und also a fortiori die Anziehung der elektrischen Ladungen sehr viel grösser sein, als die Gravitation der beiden Atome auf einander.

In Folge der Wärmebewegung werden aber die Valenzladungen der beiden Atome einer Molekel auch elektrodynamische Kräfte auf einander ausüben können. Im gasförmigen Zustande wird die Molekel als Ganzes eine fortschreitende Bewegung haben, deren Geschwindigkeit mit u bezeichnet werde; ausserdem wird die Molekel Drehung um den Schwerpunkt ausführen, wobei noch der Abstand der beiden Atome veränderlich sein kann. Unter vereinfachenden Annahmen ist leicht zu zeigen, dass die elektrodynamische Kraft der sich bewegenden Valenzladungen gegen die elektrostatischen ausserordentlich klein ist.

Die beiden Atome sollen gleiche Masse haben; sie sollen mit ihren Ladungen ε als punktförmig angenommen werden; die innere Molekularbewegung soll in einer Umkreisung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes mit constanter Geschwindigkeit c bestehen. Die elektrodynamische Wirkung, die theils von der fortschreitenden Bewegung, theils von der inneren Kreisbewegung herrührt, ist nach einem der elektrodynamischen Grundgesetze zu berechnen. Weber's Gesetz gibt

1) H. von Helmholtz, Vorträge und Reden II, p. 317.

keine Wirkung. Die Grundgesetze von Riemann und Clausius ergeben eine solche in Richtung der Verbindungslinie; bezeichnen wir mit r den Abstand der beiden Atome, mit v die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich für die elektrische Gesammtkraft stets ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\varepsilon^2}{r^2}\left(1 + n\frac{u^2}{v^2}\right) .$$

Für die innere Kreisbewegung ist c statt u zu setzen; n ist ein Zahlenfactor, der für die beiden Grundgesetze resp. für die beiden Bewegungsarten verschiedene, zwischen -4 und $+4$ liegende Werthe hat; die elektrodynamische Wirkung wird zu vernachlässigen sein, wenn u und c klein sind gegen $v = 3 \cdot 10^{10}$ cm sec^{-1}.

Was zunächst u betrifft, so ist sein Mittelwerth aus der kinetischen Gastheorie bekannt;[1]) derselbe ist am grössten für Wasserstoff $= 1{,}7 \cdot 10^5$ cm sec^{-1}, also in der That klein gegen v. Für c erhalten wir einen Anhalt aus der Theorie des Wärmegleichgewichts zwischen mehratomigen Gasmolekeln von Herrn Boltzmann.[2]) Nach derselben ist die mittlere lebendige Kraft L_a der fortschreitenden Bewegung einer Molekel gleich der gesammten mittleren lebendigen Kraft l eines Atoms. Nenne ich noch die mittlere lebendige Kraft der inneren Bewegung in der Molekel L_i, so ist die gesammte lebendige Kraft einer Molekel $= L_a + L_i$, und bei einer zweiatomigen Molekel der auf ein Atom entfallende Antheil

$$l = \frac{(L_a + L_i)}{2}$$

Aus Boltzmann's Resultat $l = L_a$ folgt daher

$$L_i = L_a$$

1) O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, p. 45.

2) L. Boltzmann, Sitzber. der Wiener Akad. mathem. Cl. 63, p. 417, 1871.

Geschieht, wie zur Vereinfachung angenommen werden musste, die fortschreitende Bewegung mit der constanten Geschwindigkeit u, die innere Kreisbewegung mit der constanten linearen Geschwindigkeit c, so ist also $c = u$. Auch c ist mithin klein gegen die Lichtgeschwindigkeit v, und unter den vereinfachenden Annahmen jede elektrodynamische Wirkung der bewegten Valenzladungen aufeinander zu vernachlässigen. Wenn nun auch die Voraussetzungen nicht erfüllt sind, dass erstens die Atome und ihre Ladungen als punktförmig anzusehen sind, zweitens dass die intramolekulare Bewegung der Atome in Umkreisung des Schwerpunktes besteht, so wird dadurch doch nicht die Grössenordnung im Verhältnisse von elektrostatischer und elektrodynamischer Kraft geändert werden. Wir werden also letztere ebenso wie die Gravitation gegenüber der ersteren Kraft vernachlässigen können.

Ueber andere Kräfte ausser den elektrischen und der Gravitation, welche zwischen den Atomen einer Molekel thätig sein könnten, wissen wir nichts Sicheres. Wir wollen daher im Folgenden für einige Fälle, in welchen ein Vergleich mit anderen experimentellen Daten zu Gebote steht, zusehen, zu welchen Folgerungen die Annahme führt, dass die elektrostatischen Kräfte der Ladungen der Valenzstellen die einzigen zwischen 2 Atomen einer Molekel wirksamen Kräfte seien.

V. Die Dissociationswärme einer aus 2 Atomen bestehenden Molekel.

Die Wärmeentwicklung bei chemischen Prozessen wird im Sinne der Helmholtz'schen elektrochemischen Theorie vornehmlich durch die Verschiedenheit der Anziehung der Valenzstellen für die beiden Arten der Elektricität bedingt sein. Betrachten wir z. B. die Bildung von Chlorwasserstoff aus Chlorknallgas. Aus den neutralen Molekeln $(H+)$ $(-H)$

und (*Cl* +) (— *Cl*) gehen schliesslich die Molekeln (*H* +) (— *Cl*) hervor. Die erste Phase des Prozesses ist die Trennung der zu je zweien verbundenen Wasserstoff- und Chloratome. Dabei leistet die Anziehung der beiden entgegengesetzten Ladungen negative Arbeit. Die zweite Phase besteht darin, dass die negative Hälfte der *H*-Atome ihre schwach festgehaltene negative Ladung an *Cl*-Atome abgeben und dafür die stärker angezogene positive Ladung erhalten, während die Hälfte der *Cl*-Atome ihre schwach festgehaltene $+ \varepsilon$ abgeben und dafür die stärker angezogene $- \varepsilon$ erhalten. Das Resultat dieses Austausches ist also, dass alle *H*-Atome positiv und alle *Cl*-Atome negativ beladen sind und offenbar leisten bei diesem Austausch die Anziehungskräfte zwischen den ponderablen Atomen und den Elektricitäten positive Arbeit. Die dritte Phase des Processes ist die Vereinigung je eines (*H* +) mit einem (— *Cl*) Atom zu neutralen Salzsäure-Molekeln. Hierbei leistet die Anziehung der beiden Ladungen positive Arbeit. Die Arbeitsleistungen während der ersten und dritten Phase werden annähernd gleich und entgegengesetzt sein, so dass die chemische Wärmeentwickelung hauptsächlich durch die zweite Phase, also durch die Verschiedenheit der Anziehungskraft ein und derselben Valenzstelle für die beiden Arten der Elektricität gegeben ist.

Ganz anders verhält es sich bei der Dissociation eines Gases. Die neutralen Molekeln (*X* +) (— *X*), welche durch e i n e Bindung zusammenhaften, sollen bei höherer Temperatur in die beiden isolirten Atome zerfallen. Wenn die Anziehung der beiden Ladungen die einzige zwischen den Atomen wirksame Kraft ist, würde die negative Arbeit derselben wesentlich die Wärmeabsorption bei der Dissociation bedingen. In Bezug auf die zuzuführende Energie ist ausser der von den Kräften geleisteten Arbeit noch zu berücksichtigen, welchen Inhalt an lebendiger Kraft das dissociirte Gas einerseits und

das nicht dissociirte Gas andererseits besitzen. Wir gehen aus von dem dissociirten Gase. Das Volumen soll constant sein, so dass äussere Arbeit nicht geleistet wird. Wir denken uns das dissociirte Gas abgekühlt bis auf eine Temperatur, bei welcher die Vereinigung aller Atome zu zweien eintreten kann, denken uns aber zunächst das Gas bei dieser Temperatur noch dissociirt. Dann soll die Association eintreten und nach derselben das Gas wieder auf die vorherige Temperatur gebracht werden. Die hierbei zu entziehende Wärmemenge ist die „Dissociationswärme". Der Gesammtinhalt an lebendiger Kraft ist vor und nach der Association derselbe; dies folgt unmittelbar daraus, dass bei derselben Temperatur der Mittelwerth der gesammten lebendigen Kraft je eines Atoms, auch bei verschiedenen Gasen, stets denselben Werth hat, einerlei ob die Atome isolirt oder zu Molekeln verbunden sind. Da also der Inhalt an lebendiger Kraft ungeändert bleibt, ist die Dissociationswärme gleich der Veränderung der potentiellen Energie, oder gleich der Arbeit der Kräfte, welche die beiden Atome einer Molekel auf einander ausüben.

Diese Anziehung soll nun nach unserer Annahme durch die elektrostatische Kraft der Valenzladungen gegeben sein. Wenn diese wieder als punktförmig angenommen werden und im Zustande der Association sich im Abstande r von einander befinden, so ist die Arbeit bei der Annäherung aus unendlicher Entfernung nach der Bezeichnung unserer früheren Gleichungen für eine Molekel

$$\text{gleich } \frac{\varepsilon^2}{r}$$

Bezeichnen wir den Mittelwerth einer Grösse x wie üblich durch $\bar{x}$, so wird dieselbe Arbeit für alle N-Molekeln in einem Cubikcentimeter

$$W = N\varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}}$$

Das einem Doppelstern vergleichbare System der sich

um einander bewegenden beiden Atome wird in Bezug auf die Raumerfüllung bei den Zusammenstössen der Molekel sich ähnlich verhalten wie eine Kugel, deren Durchmesser gleich ist dem mittleren Abstande der beiden Atome;[1] $\bar{r}$ kann gleich dem Molekulardurchmesser ϱ von Seite 14 genommen werden. Wenn ferner grosse Abweichungen des Momentanwerthes r vom Mittelwerthe $\bar{r}$ nur sehr selten vorkommen, so kann auch ohne Fehler der Grössenordnung $\overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{1}{\bar{r}} \approx \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden. Dass diese Voraussetzung erfüllt ist, ist schon von vornherein plausibel; es folgt aber auch aus Herrn Boltzmann's kinetischer Theorie mehratomiger Gase. Nach derselben ist für ein Atom bei gegebener Lage und gegebener lebendiger Kraft jede Richtung gleich wahrscheinlich.[2] Daraus folgt für eine aus 2 Atomen bestehende Molekel, dass eine Bewegungsrichtung, welche zu der Verbindungslinie der beiden Atome nahe senkrecht ist, sehr viel häufiger vorkommt als jede andere und dass die Häufigkeit abnimmt bis zur Bewegungsrichtung in der Verbindungslinie selbst. Z. B. verhält sich die Wahrscheinlichkeit einer Bewegungsrichtung, welche mit der Verbindungslinie der beiden Atome einen Winkel von 89° bis 90° einschliesst, zu der Wahrscheinlichkeit einer solchen in einem Winkel von 0° bis 1° ebenso wie auf der Erdkugel der Flächeninhalt der äquatorialen Zone von 0° bis 1° geogr. Breite zu der Polarkappe von 89° bis 90° Breite. Wenn nun die der tangentialen nahe Bewegungsrichtung an Häufigkeit so sehr überwiegt, so muss die Bahn der nach unserer Annahme unter dem Einflusse einer Newton'schen Kraft sich in einander bewegenden Atome sehr viel häufiger eine nahezu kreisförmige, d. h. elliptische mit geringer Excentri-

1) Vergl. O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, pag. 213.
2) L. Boltzmann, l. c., p. 416.

cität, als eine gestreckte von grosser Excentricität sein.[1]) Dann ist auch die Voraussetzung erfüllt, dass die Momentanwerthe von r sehr selten weit vom Mittelwerth $\bar{r}$ abweichen, und es kann also $\overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{1}{\varrho}$ gesetzt werden.

Dies eingesetzt wird die Gleichung für die Dissociationswärme

$$W\varrho \approx N\varepsilon^2$$

Die Dissociationswärme W ist für einige dem theoretisch betrachteten Falle entsprechende Gase bekannt; werden für ϱ, N, ε ferner ihre im Früheren angenommenen Werthe gesetzt, so lässt sich unsere Gleichung controliren; dass dieselbe für Untersalpetersäure und Joddampf der Grössenordnung nach erfüllt ist, habe ich bereits früher bestätigt.[2])

Der Vorgang der Dissociation von Untersalpetersäure N_2O_4 zu $2\,NO_2$ ist für uns vollkommen analog der Dissociation von 2 Atomen, die mit einer Bindung verknüpft sind; denn die einwerthige Gruppe $-\overset{\text{III}}{N}\Big\langle\begin{smallmatrix}O\\|\\O\end{smallmatrix}$ oder $-\overset{\text{V}}{N}\Big\langle\!\!\Big\langle\begin{smallmatrix}O\\ \\O\end{smallmatrix}$ spielt bei derselben vollkommen die Rolle eines Atoms.

---

1) Vorstehende Ueberlegung lässt sich analytisch durchführen; vergl. Verhdlg. d. Phys. Ges. Berlin, 10, p. 76, 77; 26. Juni 1891. Es ergibt sich ein Resultat von der Form $\overline{\frac{1}{r}} = \frac{q}{\bar{r}}$. Der Faktor q, nahe = 1, kommt bei der Unsicherheit der anderen Ueberlegungen nicht in Betracht.

2) F. Richarz, Sitzber. d. Niederrh. Ges. 48, p. 25, 26; 12. Jan. 1891. Verhdlg. d. Phys. Ges. Berlin, 10, p. 73—79, 1891. Die Literatur über die Messungen der Dissociationswärme siehe daselbst, und Wied. Ann. 48, p. 491/492, 1893. — Welche von den 4 Grössen W, ϱ, N, ε man vermöge meiner obigen Gleichung aus den 3 übrigen berechnet, um den so berechneten Werth mit dem direct beobachteten zu vergleichen, ist selbstverständlich gleichgültig. In meiner ersten Publication hatte ich ϱ gewählt, in der zweitgenannten ε; Herr Ebert führt die Rechnung für W durch. (Wied. Ann. 50, p. 255—260, 1893.)

Aus den Versuchen von Berthelot und Ogier ergibt sich für Untersalpetersäure (bezogen auf die in 1 ccm bei 0° und Atmosphärendruck enthaltene Masse):

$$W = 25 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Für die Dissociation des Joddampfs hat Herr Boltzmann aus Versuchen von Fr. Meyer und J. M. Crafts für die im selben Volumen enthaltene Masse berechnet:

$$W = 54 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Endlich hat Herr E. Wiedemann aus Messungen der Wärmemenge, welche zur Ueberführung des Banden- in das Linienspectrum nöthig ist, gefunden, dass einem Gramm Wasserstoffgas von gewöhnlicher Temperatur zur Zerlegung in seine Atome etwa 128000 Gramm — Calorien zugeführt werden müssen.[1]) Daraus ergibt sich für die im ccm bei 0° und Atmosphärendruck enthaltene Masse:

$$W = 483 \cdot 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Auch diesen Werth habe ich, wie die beiden anderen, schon bei der ausführlichen Zusammenstellung des lediglich kinetischen Theiles meiner Schlussfolgerungen mit in Betracht gezogen.[2])

Die abgeleitete Gleichung für die Dissociationswärme wollen wir so benutzen, dass wir aus W, ϱ und N den Werth von ε^2 berechnen, welcher Werth die Constante in der Newton'schen Kraft zwischen den Valenzladungen ist und in allen Consequenzen der Theorie auftreten muss und gegebenenfalls berechnet werden kann, so auch weiterhin im nächsten Abschnitt dieser Arbeit. Setzen wir $N \approx 10^{20}$, $\varrho \approx 10^{-8}$ cm, so erhalten wir aus den betr. Werthen der Dissociationswärme

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10, p. 253, 1880; 18, p. 509, 1883. Ostwald, Allgem. Chemie 2, p. 49.

2) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 492, 1893.

bei Untersalpetersäure: $\varepsilon \approx 50 \cdot 10^{-12}\, cm^{\frac{3}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, sec^{-1}$
bei Joddampf: $\varepsilon \approx 73 \cdot 10^{-12}$ „
bei Wasserstoff: $\varepsilon \approx 220 \cdot 10^{-12}$ „

Dass diese Werthe mit dem aus der Elektrolyse folgenden $\varepsilon \approx 129 \cdot 10^{-12}$ so nahe übereinstimmen, ist bei der grossen Unsicherheit der Berechnungen und der Willkür verschiedener Annahmen teilweise Zufall; man darf durchaus nicht sagen, dass durch diese Uebereinstimmung die elektrochemische Theorie bestätigt sei. Denn es könnten ausser den elektrostatischen Kräften der Valenzladungen noch andere Kräfte von doppelter, dreifacher oder ähnlicher Grösse vorhanden sein, ohne dass die gefundene Uebereinstimmung innerhalb der Grenzen ihrer Unsicherheit gestört würde. Das aber werden wir sagen dürfen, dass wir nicht in Widerspruch mit den experimentellen Daten für die Dissociationswärme treten, wenn wir mit Herrn v. Helmholtz annehmen, dass die chemischen Kräfte zwischen den Atomen mit den elektrostatischen zwischen den Valenzladungen identisch sind.

VI. Anwendung des Satzes vom Virial und der Boltzmann'schen Theorie mehratomiger Gase.

Die innere Bewegung der Atome in einer Molekel ist eine stabile; auf sie lässt sich daher der Virialsatz von Clausius anwenden.[1]) Da die Zahl der in Wechselwirkung begriffenen Molekeln sehr klein ist, gegen die Gesammtzahl, kann von den Kräften der Molekeln untereinander abgesehen werden. In einem gegebenen Augenblicke kommen alle möglichen Zustände der relativen Bewegung und Lage, welche die Atome einer Molekel nach einander annehmen, gleichzeitig bei den verschiedenen Molekeln vor. Es werde mit

1) Clausius, Sitzber. der Niederrh. Ges. 27, p. 114, 1870. Pogg. Ann 141, p. 125, 1870. Jubelbd. p. 411, 1874. Literatur siehe Wied. Ann. 48, p. 468, 1893.

Λ_i die gesammte lebendige Kraft der inneren Bewegung der Atome in der Volumeneinheit, also diejenige der Bewegung der Atome relativ zum Schwerpunkte der Molekel, welcher sie angehören, bezeichnet. $f(r)$ sei die gegenseitige Anziehung der Atome einer Molekel. Dann ergibt nach Obigem der Virialsatz:[1])

$$\Lambda_i = \tfrac{1}{2} \Sigma r f(r)$$

Für die gesammte lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molekeln in der Volumeneinheit, Λ_a, ergibt sich ebenfalls aus dem Virialsatz[1])

$$\Lambda_a = \tfrac{3}{2} p$$

wo p der Druck ist.

Die bereits mehrfach erwähnte kinetische Theorie mehratomiger Gase von Herrn Boltzmann ergibt $\Lambda_i = \Lambda_a$ für 2 atomige Gase, von welchem Resultat (auf eine Molekel bezogen) bereits auf Seite 19 Gebrauch gemacht wurde. Wir erhalten also

$$\Sigma r f(r) = 3p$$

Nimmt man nun wieder an, die Kraft $f(r)$ sei die elektrostatische Anziehung der Valenzladungen, und die Atome nur mit einer Bindung verknüpft, so ist $f(r) = \frac{\varepsilon^2}{r^2}$, und bei Einführung unserer früheren Bezeichnungen kann gesetzt werden $\Sigma r f(r) = N\varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}} \approx \frac{N\varepsilon^2}{\varrho}$.

Der Virialsatz ergibt dann

$$N\varepsilon^2 \approx 3 p \varrho$$

p ist gleich $1{,}01 \cdot 16^6$ Dynen pro cm^2; nimmt man wieder $N \approx 10^{20}$, $\varrho \approx 18^{-8}$ cm, so folgt

$$\varepsilon \approx 17 \cdot 10^{-12}\, cm^{\frac{3}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, sec^{-1}$$

---

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 470 ff., 1893.

Auch dieser Werth liegt wieder innerhalb der Grenzen der Unsicherheit des aus der Elektrolyse folgenden.

Die vorstehende Berechnung aus Virialsatz und Boltzmann's Theorie ist nicht unabhängig von derjenigen aus der Dissociationswärme nach der Gleichung $W = N\varepsilon^2 \overline{\frac{1}{r}}$. Denn hieraus und aus dem Virialsatz in der Form $3\,p = N\varepsilon^2\,\overline{\frac{1}{r}}$ würde sich ergeben $W = 3\,p$, welche Bedingung aber nicht erfüllt ist. Vielmehr ist die Bedingung der Stabilität der Molekeln, wie ich an anderem Orte nachgewiesen habe,[1] dass W gross sei gegen p und zwar so, dass $e^{\frac{W}{p}}$ gross ist gegen 1. Die Stabilitätsbedingung ist, wie a. a. O. gezeigt, in der That erfüllt, da $\frac{W}{p}$ für $N_2\,O_4$ gleich 25, für J_2 gleich 53, für H_2 gleich 478 ist. Unser jetziger Widerspruch gegen diese allgemein gültige und erfüllte Stabilitätsbedingung rührt davon her, dass wir zur Vereinfachung die Atome als Massenpunkte betrachteten und zwischen ihnen eine Kraft angenommen haben, welche einer Potenz der Entfernung proportional ist; dies ist, wie a. a. O. p. 477 nachgewiesen, unzulässig. Molekeln, deren Atome durch eine Newton'sche Kraft verbundene Massenpunkte wären, sind nicht stabil; eine einfache Rechnung, welche der a. a. O. p. 483 ff. analog ist, ergibt für solche Molekeln zwei Zustände, die an Wahrscheinlichkeit allen anderen weit überlegen sind: Entweder fallen die Atome dauernd in einen Punkt zusammen, oder sie sind soweit von einander entfernt, dass sie keine Kräfte auf einander ausüben, was der Dissociation entspricht.

Trotzdem kommt der Widerspruch für uns, bei der Berechnung des Elementarquantums ε nicht in Betracht, weil die Bedingung $e^{\frac{W}{p}}$ gross gegen 1 schon durch mässige

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48, p. 490 ff., 1893.

Werthe von $\frac{W}{p}$ erfüllt ist, und die Unsicherheit in unseren Berechnungen so gross ist, dass ihre Grenzen noch weit mehr verschiedene Werthe einschliessen. Von „Uebereinstimmung“ kann von vornherein keine Rede sein, sondern nur von „Nichtwidersprechen“.

VII. Vergleich mit den Lichtschwingungen.

Halten wir weiterhin wie bisher an der Annahme fest, dass wir die Atome als Punkte ansehen dürfen, welche im gasförmigen Zustande frei um einander beweglich sind. Ist dann nur die elektrostatische Kraft zwischen derselben wirksam, so kann die Dauer eines Umlaufs um den gemeinsamen Schwerpunkt aus der Gleichung angegeben werden, welche für die Planetenbewegung das 3. Keppler'sche Gesetz liefert; dabei werde angenommen, dass die beiden Atome der Molekel nur durch eine Valenz verbunden seien.

Wenn zwei Massenpunkte m_1 und m_2 unter dem Einflusse der Gravitationskraft

$$f(r) = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

sich bewegen, so ist das 3. Keppler'sche Gesetz

$$\frac{4\pi^2 A_1^3}{T^2} = \frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$$

wo A_1 die grosse Halbaxe der Bahnellipse von m_1; T die Umlaufzeit ist.

Die elektrostatische Kraft ist $f(r) = \frac{\varepsilon^2}{r^2}$; also ist zu setzen $G m_1 m_2 = \varepsilon^2$; führen wir ferner die ganze grosse Axe $\mathfrak{A}_1 = 2A_1$ ein, so wird

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m_1}{2}}\sqrt{\mathfrak{A}_1^3}\,\frac{m_1 + m_2}{m_2}$$

Nehmen wir die beiden Atome als gleich an, so ist $m_1 = m_2 = m$, und auch der Index von $\mathfrak{A}_1$ fällt weg, da die beiden Bahnellipsen gleich werden; also

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon} \sqrt{2\,m} \sqrt{\mathfrak{A}^3}$$

Bilden wir nun die Mittelwerthe über alle Molekeln in einem endlichen Volumen, so kann nach denselben Ueberlegungen, wie sie auf Seite 23 angestellt wurden, ohne Fehler in der Grössenordnung für die grosse Axe $\mathfrak{A}$ der Durchmesser einer Molekel gesetzt werden $\approx 10^{-8}$ cm. Der kleinste Werth für T ergibt sich bei Wasserstoff, wo $2\,m$, die Masse einer Molekel, den kleinsten Werth hat. Die Dichtigkeit des Wasserstoffs zu $895 \cdot 10^{-7}$ und die Zahl der Molekeln in 1 ccm zu 10^{20} angenommen, wird $2\,m \approx 89{,}5 \cdot 10^{-26}$. Für Wasserstoff wird daher

$$T \approx 23 \cdot 10^{-15} \text{ sec}$$

Stillschweigende Voraussetzung bei der Berechnung der mittleren Umlaufszeit T ist, dass die Zusammenstösse der Molekeln unter einander nicht so häufig stattfinden, dass eine regelmässige Centralbewegung der Atome um einander gar nicht zu Stande kommt. Jene Voraussetzung ist aber, wie die kinetische Gastheorie zeigt, erfüllt. Die grösste Stosszahl gilt für Wasserstoff, nämlich $95 \cdot 10^8$ in der Secunde;[1]) mithin die Zeit zwischen 2 Zusammenstössen $105 \cdot 10^{-12}$ sec. Also kommen bei Wasserstoff rund 4000 Umläufe der Atome um einander auf die Zeit zwischen 2 Zusammenstössen.

„Wenn nun eine positive und eine negative Ladung mit den beiden Atomen einer Molekel verbunden, sich um einander drehen, so ist ein solches System offenbar äquivalent einer elektrischen Schwingung. Von dem rotirenden Atompaar werden daher auch, wie von einer Hertz'schen Schwingung,

---

1) O. E. Meyer, kinet. Gastheorie, p. 142.

elektrodynamische Wellen ausgestrahlt, und bei hinreichender Schnelligkeit müssten dieselben vom Auge als Licht wahrgenommen werden. Da nun aber die Gase bei 0° nicht leuchten, muss die Schwingungsdauer jener elektrodynamischen Wellen grösser sein als die der langsamsten Lichtwellen. Für die äussersten rothen Wellen ist die Schwingungsdauer rund

$$\tau = 25 \cdot 10^{-16} \text{ sec}$$

Die Schwingungsdauer der elektrodynamischen Welle, welche die rotirende Molekel ausstrahlt, ist gleich der Umlaufszeit T; und, wie verlangt, ist der kleinste Werth für diese, wie er bei Wasserstoff sich ergibt, grösser als τ. Der Werth für T bei Wasserstoff ist aber nur 10 mal grösser als τ, und vielleicht dürfen wir daraus vermuthen, dass unter Umständen doch die betrachtete elektrodynamische Welle in den Bereich der Lichtwellen eingreift. Da nun T nur der Mittelwerth der verschiedenen bei verschiedenen Molekeln gleichzeitig vorhandenen Umlaufszeiten ist, so würde das Gas bei einer gegen die normale beschleunigten Umlaufszeit in der angegebenen Weise ein continuirliches Spectrum aussenden; vielleicht trägt die so erzeugte Strahlung mit bei zur Bildung des continuirlichen Hintergrundes im Spectrum der Gase, welchen auch Herr H. Kayser der „ungeordneten", also der Wärmebewegung der Atome zuschreibt.[1]) Wie dem aber auch sei, es würde auch jede andere hinreichend schnelle periodische Bewegung der Valenzladungen zu Lichtstrahlung Anlass geben; sei es, dass die Atome sammt ihren Ladungen als Ganzes oscilliren, wie dies wohl bei festen Körpern und den ein Bandenspectrum liefernden Gasen der Fall sein dürfte; sei es, dass die Schwingungen innerhalb der einzelnen Atome vor sich gehen, wie bei den ein Linienspectrum liefernden Gasen." Zu dieser Stelle aus meiner vorläufigen Mittheilung

---

1) H. Kayser, Lehrbuch der Spectralanalyse, p. 98.

vom 26. Januar 1891 habe ich nachzutragen, dass die Ansicht, der continuirliche Hintergrund der Gasspectra rühre von den Rotationen der Molekeln her, zuerst von Herrn Eilhard Wiedemann ausgesprochen ist;[1]) in derselben Arbeit führt Herr E. Wiedemann die continuirlichen Spectra bei glühenden festen Körpern oder Flüssigkeiten auf unfreie Schwingungen zurück; ferner wie schon früher Herr v. Helmholtz[2]) die Bandenspectren auf freie Schwingungen der Atome im Molekularverband unter dem Einflusse der gegenseitigen Kräfte der Atome, die Linienspectren auf freie Schwingungen der Aetherhüllen isolirter Atome.

Bezüglich der Energie, welche die in der Molekel oder im Atom oscillirenden Valenzladungen als Hertz'sche Schwingung ausstrahlen können, hat Herr H. Ebert nachgewiesen,[3]) dass dieselbe nicht im Widerspruch steht mit der von Herrn Eilhard Wiedemann gefundenen Strahlungsenergie eines Natriumatoms.[4]) Auch Herr G. J. Stoney schreibt das Leuchten den Bewegungen der Valenzladungen zu[5]) und discutirt die Strahlung, welche durch Oscillationen unter dem Einflusse elastischer Kräfte hervorgerufen wird.

VIII. Molekularer Magnetismus.

Wenn eine Valenzladung infolge der Wärmebewegung eine kreisförmige oder ähnlich gestaltete, eine Fläche umschliessende Bahn beschreibt, so wird sie nach aussen elektromagnetische Wirkung ausüben. Bei einer Bewegung wie bei dem bisher betrachteten Umlauf zweier als Punkte ge-

---

1) Eilh. Wiedemann, Wied. Ann. 5, p. 509, 1878; s. auch 10, p. 252, 1880.

2) H. v. Helmholtz, Pogg. Ann. 160, p. 182, 1877.

3) H. Ebert, Arch. de Genève (3) 25, p. 489, 15. Mai 1891; Wied. Ann. 49, p. 651, 1893.

4) Eilh. Wiedemann, Wiedem. Ann. 37, p. 177, 1889.

5) G. J. Stoney, Trans. Roy. Dublin Soc. 4, (2), p. 563, 1891.

dachter Atome von gleicher Masse um einander, müssen sich aber schon die elektromagnetischen Wirkungen der beiden Atome einer Molekel aufheben. Zunächst ist dies nicht mehr der Fall, wenn die beiden Atome der Molekel verschiedene Masse haben; dann wird die elektromagnetische Wirkung der mit dem leichteren Atom verbundenen Ladung wegen der grösseren von der Bahn umschlossenen Fläche überwiegen. Denken wir uns aber weiterhin das Atom als räumlich ausgedehnt, so sind auch noch andere rotationelle Bewegungen der Valenzladungen mit oder im Atom denkbar, deren magnetische Gesammtwirkung für eine Molekel sich nicht aufhebt.[1]) Endlich können wir uns bei festen Körpern und Flüssigkeiten die Atome einzeln und ihre Bewegung von einander unabhängig ausführend vorstellen, sodass wir uns als Grenzfall alle positiv geladenen Atome im einen Sinne, alle negativ geladenen Atome im entgegengesetzten Sinne rotirend, und alle Rotationsaxen parallel denken können, sodass sich in diesem Fall die magnetische Wirkung aller rotirenden Valenzladungen addiren würde. Hiedurch kommt man dazu, die Zulässigkeit dieser Erklärung des molekularen Magnetismus dadurch zu prüfen, dass man eine annähernde Berechnung für den maximalen specifischen Magnetismus bei Sättigung ausführen kann.

Diese Vorstellungen knüpfen sich von selbst an die Betrachtung der mit oder im Atom bewegten Valenzladungen an. Nachdem ich dieselben bereits seit längerer Zeit wiederholt gesprächsweise geäussert und die im Folgenden mitgetheilte Rechnung durchgeführt hatte, fand ich kürzlich im XI. Abschnitt des 2. Bandes der mechanischen Wärmetheorie

---

1) Schon bei einer aus 2 gleichen, räumlich ausgedehnten, Atomen bestehenden Gasmolekel zwingt die Verschiedenheit der Anziehung der ponderablen Masse für die beiden Arten der Elektricität zu der Folgerung einer unsymmetrischen Lagerung der $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$, woraus dann bei Rotation eine magnetische Gesammtwirkung resultirt.

von Clausius,[1]) dass schon Wilhelm Weber sich von den Ampère'schen Molekularströmen die Anschauung gebildet hatte, dass dieselben in kreisförmiger Bewegung eines positiven Elektricitätstheilchens um einen negativ elektrischen Kern bestehe,[2]) ohne dass jedoch Weber diese Elektricitätstheilchen mit den Jonenladungen identificirte.

Eine in Kreisbahn sich bewegende Elektricitätsmenge e kann bezüglich ihrer elektromagnetischen Wirkung als Kreisstrom aufgefasst werden. Als Stromintensität i ist dann einzuführen der Quotient aus Elektricitätsmenge, welche in einer Zeit T einen Punkt der Kreisperipherie passirt, dividirt durch T. In der dualistischen Theorie passiren beim Strom gleiche positive und negative Mengen in entgegengesetzter Richtung den Querschnitt. Bewegte Elektricität von **einer** Art allein repräsentirt in der elektrodynamischen Wirkung also nur die halbe Stromintensität.

Bewegt sich demnach eine Elektricitätsmenge e auf der Peripherie eines Kreises mit einer Umlaufszeit T, so ist sie elektromagnetisch äquivalent der Stromintensität $i = \frac{e}{2\,T}$.

Eine Valenzladung elektrostatisch gemessen ist annähernd $\varepsilon \approx 129 \cdot 10^{-12}$; also elektromagnetisch gemessen $\approx 43 \cdot 10^{-22}$. Eisen gilt als 4 werthig; die 4 Valenzstellen eines Eisenatoms als von gleicher Ladung vorausgesetzt würde also das obige $e \approx 172 \cdot 10^{-22}$ elektromagnetischen C. G. S.-Einheiten sein, wenn man sich alle 4 Ladungen in beliebiger Weise auf der Peripherie desselben Kreises, denselben in gleichem Sinne durchlaufend denkt.

Ein Kreisstrom von der Intensität i, welcher eine Fläche q umströmt, ist äquivalent einem Magneten vom Momente

$$\mathfrak{M} = i\,q$$

---

1) Clausius, mechan. Wärmetheorie II, p. 341/342, 1879.

2) Wilh. Weber, elektrodynam. Massbest., Leipzig 1871, p. 41.

Nehmen wir den Kreisstrom von molekularen Dimensionen, so können wir setzen $q \approx \delta^2$, wo δ die Kante des einem Eisenatom zukommenden Elementarwürfels ist. Hiefür erhalten wir folgenden angenäherten Werth.

Eine Molekel H_2 hat eine Masse von etwa $9 \cdot 10^{-25}$ g (siehe Seite 30). Ein Eisenatom $Fe = 56\, H = 28\, H_2$ also $25 \cdot 10^{-24}$ g. Das specifische Volumen des Eisens ist 1 ccm : 7,7 g. Daraus folgt das Volumen des einem Eisenatom zukommenden Elementarwürfels $33 \cdot 10^{-25}$ ccm, und die Kante desselben δ gleich $1{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm. Mithin $q \approx \delta^2 \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16}$ cm².

Für das magnetische Moment eines Eisenatoms finden wir also die Annäherung:

$$\mathfrak{M} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16} \cdot i \approx 2{,}3 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{e}{2\,T}$$

und indem wir für e den obigen Wert einführen

$$\mathfrak{M} \approx \frac{2 \cdot 10^{-36}}{T}$$

Zu einer Schätzung der Grössenordnung der Umlaufszeit T können wir auf zwei Wegen gelangen. Erstens ist wie im vorigen Abschnitt daran zu erinnern, dass die rotirenden Valenzladungen elektrodynamische Wellen aussenden müssen. Wenn dieselben nicht als Licht empfunden werden sollen, so muss ihre Periode länger als die der längsten rothen Wellen sein; wir erhalten also

$$T > 3 \cdot 10^{-15} \text{ sec}$$

Zweitens soll als Grenzfall angenommen werden, die ponderable Masse des Eisenatoms sei mit der elektrischen Ladung desselben in einem Punkte vereinigt. Nach der kinetischen Theorie der Materie ist die mittlere lebendige Kraft eines Atoms bei gegebener Temperatur für alle Substanzen dieselbe. Gehen wir aus von einem einatomigen

Gase (etwa Hg), so ist die gesammte lebendige Kraft in 1 ccm bei 0^0 und Atmosphärendruck

$$\Lambda = \frac{3}{2} p = \frac{3}{2} \cdot 1{,}01 \cdot 10^6 \text{ C. G. S.}$$

Division durch 10^{20} ergibt also für ein Atom beliebiger Substanz und Aggregatzustandes L die gesammte lebendige Kraft $\approx 1{,}52 \cdot 10^{-14}$. Nenne die Masse eines Eisenatoms m, die constante Geschwindigkeit, mit welcher es die kreisförmige Bahn vom Durchmesser d durchläuft, u, so wird

$$L = \frac{m}{2} u^2; \; T = \frac{d\pi}{u} = d\pi \sqrt{\frac{m}{2L}}$$

Nehme $d \approx 10^{-8}$ cm; $m \approx 25 \cdot 10^{-24}$; $L \approx 1{,}52 \cdot 10^{-14}$ so folgt

$$T \approx 1{,}3 \cdot 10^{-12} \text{ sec}$$

Nun bewegt sich aber gewiss nicht die ganze ponderable Masse des Atoms auf der Oberfläche des ihm zukommenden Raumes, sondern befindet sich grösstentheils mehr central; damit derselbe Werth der lebendigen Kraft erreicht wird, muss also die Umdrehungsgeschwindigkeit grösser sein, und es sollte sein

$$T < 10^{-12} \text{ sec}$$

Schätzen wir nach diesen beiden Grenzwerthen etwa

$$T \approx 10^{-14} \text{ sec}$$

— — — —

Herr H. E. J. G. Du Bois hat mir mitgetheilt, dass er in einer noch nicht publicirten Berechnung auf Grund der von Maxwell (Treatise Cap. 21) umgearbeiteten Lord Kelvin'schen Wirbeltheorie versucht habe, aus der magneto-optischen Drehung in ferromagnetischen Metallen (Kundt'sches Phänomen) einen Anhaltspunkt zu gewinnen für die Periode jener Wirbel. Nach den vorliegenden Daten gelange er zu dem Schlusse, dass in etwa halb-„gesättigtem" Eisen die

Wirbel eine Frequenz von 5 Billionen pro Secunde haben, also etwa der hundertste Theil derjenigen des Natronlichtes. Die Rechnung führe zu einer Schlussformel für die Periode, welche folgendermassen lautet:

$$T = 2{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{M}$$

wo M der maximale specifische Magnetismus ist.

Einmal stimmt der Bau dieser Gleichung mit der unsrigen überein; setzen wir zweitens den Werth für Eisen $M = 220$ (s. unten) ein, so wird bei voller Sättigung ungefähr

$$T = 10^{-13} \text{ sec}$$

Dieser Werth liegt innerhalb der sehr weiten Grenzen der Unsicherheit unseres oben gewählten Werthes.[1])

Führen wir in die Gleichung $\mathfrak{M} \approx \frac{2 \cdot 10^{-36}}{T}$ den Werth $T \approx 10^{-14}$ ein, so wird $\mathfrak{M} \approx 2 \cdot 10^{-22}$.

Will man zu endlichen Massen übergehen, so kann man annehmen, dass bei Sättigung alle positiven Valenzladungen um parallele Axen in demselben Sinne, alle negativen im entgegengesetzten Sinne rotiren. Dann muss das maximale magnetische Moment von 1 g Eisen, also der specifische Magnetismus bei Sättigung, gleich werden

$$M = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$$

wo $\mathfrak{N}$ die Zahl der Atome in 1 g Eisen ist.

1) Wenn wir wieder daran denken, dass die periodische Bewegung der Valenzladungen zu elektrodynamischer Strahlung Anlass gibt, wie eine Hertz'sche Schwingung, so steht die Grössenordnung der Umlaufszeit ebenfalls in Einklang mit dem von Herrn Willy Wien abgeleiteten Resultate, dass die Periode der in der Wärmestrahlung fester Körper vorkommenden Schwingungen klein sein muss gegen diejenigen, welche von Drahtnetzen vollständig zurückgeworfen werden. (Wied. Ann. 49, p. 633, 1893.)

Aus $m \approx 25 \cdot 10^{-24}$ folgt $\mathfrak{N} \approx 4 \cdot 10^{22}$. Also wird

$$M \approx 8 \text{ C. G. S.-Einheiten}$$

Der experimentell gefundene specifische Magnetismus bei Sättigung beträgt[1])

bei Eisen 220 C. G. S.
bei Kobalt 150 „
bei Nickel 60 „

In Anbetracht der überaus grossen Unsicherheit der Berechnung von M muss man den berechneten und die direct bestimmten Werthe als innerhalb der Grössenordnung übereinstimmend bezeichnen. Der Versuch, den vor der Richtung der Elementarmagnete praeexistirenden molekularen Magnetismus auf Rotation der Valenzladungen zurückzuführen, scheint demnach zulässig zu sein.

Weitere Controlberechnungen der Helmholtz'schen elektrochemischen Theorie hat inzwischen Herr A. P. Chattock ausgeführt.[2]) In seiner ersten Mittheilung berechnet er aus den Erscheinungen beim Ausströmen der Elektricität aus Spitzen das Elementarquantum für die Atome des Gases. In der zweiten nimmt er an, dass die auch von älteren Theorieen der Dielectrica vorausgesetzten, in dasselbe eingebetteten Elektricitätstheilchen eben die Valenzladungen sind. Diese „elektrolytische Theorie der Dielectrica“ wendet Herr Chattock an auf die Messungen der Piezo-Elektricität der Herren J. und P. Curie und Mallock, der Pyro-Elektricität von Herrn Riecke, der Cohäsion, der Dielektricitäts-Constante, der Elektro-Striction, und findet stets Werthe für das Elementarquantum,

1) H. E. J. G. Du Bois, Phil. Mag. [5], 29, p. 293, 1890.
2) A. P. Chattock, Phil. Mag. (5), 32, p. 285, 1891; 34, p. 461, 1892; 35, p. 76, 1893.

die dem elektrolytischen nahe stehen. Auch Herr J. J. Thomson hat in mehreren neueren Arbeiten (siehe Citat p. 8) aus der Quantität der Jonenladungen mit Erfolg Schlüsse gezogen zur Erklärung verschiedener Phänomene, insbesondere auch des von Robert von Helmholtz gefundenen und von ihm und anderen untersuchten Dampfstrahlphänomens.

Zum Schlusse möchte ich mich nochmals im Voraus gegen die Auffassung verwahren, als ob ich mich der Täuschung hingäbe, irgend eine der entwickelten Berechnungen könne als positiv für die elektrochemische Theorie beweisend angesehen werden. Schon auf Seite 26 habe ich darauf hingewiesen, dass neben den elektrischen Kräften der Valenzladungen noch andere von derselben Grössenordnung existiren können, ohne dass unsere Gleichungen bei ihrer grossen Unsicherheit einen Widerspruch erkennen lassen würden. Wohl aber darf man behaupten, dass man bei Annahme der Helmholtz'schen Theorie eine Reihe von Erscheinungen unter gemeinsamem Gesichtspunkt auffassen kann, und bei der berechnenden Verfolgung, soweit dieselbe möglich ist, nicht in Widerspruch tritt mit der Erfahrung.



Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung.

Von Karl Döhlemann in München.

(Eingelaufen 18. Januar.)

1. Unter Voraussetzung des Begriffes der Projectivität kann man sich kaum eine einfachere Methode denken, den Raum geometrisch anschaulich eindeutig auf sich selbst zu beziehen als folgende: In dem einen Raum (X-Raum) seien 3 Gerade a_1, a_2, a_3 beliebig und in allgemeiner Lage angenommen, ebenso im andern, Y-Raum. Jede dieser 6 Geraden soll Träger eines Ebenenbüschels sein und zwar seien die Ebenenbüschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je zu einander projectiv. Irgend ein Punkt im X-Raum, P_x, ist dann Schnittpunkt dreier Ebenen durch a_1, a_2, a_3; diesen entsprechen vermöge der projectiven Beziehungen drei Ebenen durch b_1, b_2, b_3, welche sich in dem entsprechenden Punkt P_y schneiden.

Lässt man P_x auf einer beliebigen Geraden g fortrücken, so bezieht P_x dabei die Büschel a_1, a_2, a_3 projectiv aufeinander. Es werden also auch die Büschel b_1, b_2, b_3 projectiv aufeinander bezogen und diese erzeugen als der Geraden entsprechendes Gebilde eine Raumkurve 3. Ordnung, welche den Hyperboloiden aus den Achsen b_1, b_2 bezw. b_1, b_3 und b_2, b_3 gemein ist.

Daraus folgt dann sofort, dass das einer Ebene im einen Raum im andern Raume entsprechende Gebilde eine Fläche

3. Ordnung ist: denn diess Gebilde hat mit einer beliebigen Geraden drei Schnittpunkte gemein.

2. Die singulären Elemente der Transformation erhalten wir durch besondere Annahmen für den Punkt P_x. Zunächst springen als solche die 6 Geraden $a_1, \ldots b_3$ in die Augen. Wählen wir einen Punkt auf a_1, so geht durch ihn und a_2 bezw. a_3 noch je eine Ebene, während die durch a_1 gehende Ebene unbestimmt wird. Den beiden genannten Ebenen entsprechen gewisse Ebenen durch b_2 und b_3 und da die 3. Ebene ganz willkürlich, so entspricht also dem Punkte auf a_1 eine Gerade. Rückt der Punkt auf a_1 fort, so erzeugen die projectiven Büschel b_2 und b_3 eine Regelschaar 2. Ordnung, die wir kurz als das Hyperboloid $(b_2 b_3)$ bezeichnen wollen. Den Punkten der Geraden a_1 entsprechen die Erzeugenden dieses Hyperboloides und zwar diejenigen, welche nicht zur Schaar b_2, b_3 gehören.

Ganz ebenso geben die Geraden a_2 und a_3 zu 2 Hyperboloiden $(b_1 b_3)$ und $(b_1 b_2)$ Veranlassung, während im X-Raume als singuläre Flächen die Hyperboloide $(a_1 a_2)$ $(a_1 a_3)$ $(a_2 a_3)$ erscheinen.

Weiter spielen noch eine besondere Rolle die durch a_1, a_2, a_3, sowie b_1, b_2, b_3 bestimmten Regelschaaren. Wählt man nämlich eine Gerade g, welche a_1, a_2 und a_3 schneidet, so entspricht jedem Punkt dieser Geraden der gleiche Punkt im Y-Raum, da die Ebenen ja die nämlichen bleiben, welche g mit a_1, a_2 und a_3 bestimmt. Lässt man jetzt g die Regelschaar $(a_1 a_2 a_3)$ durchlaufen, so werden dadurch die Büschel a_1, a_2, a_3 aufeinander projectiv bezogen, das gleiche gilt also auch von den Büscheln b_1, b_2, b_3. Die den Geraden g entsprechenden Punkte liegen demnach auf einer Raumkurve 3. Ordnung R_b und es ist weiter klar, dass diese der gemeinsame Schnitt der oben genannten Hyperboloide $(b_1 b_2)$ $(b_1 b_3)$ $(b_2 b_3)$ sein muss. Ganz ebenso wird sich im Raume der X eine Raumkurve 3. Ordnung R_a ergeben, deren Punkte den

Geraden entsprechen, welche b_1, b_2 und b_3 gleichzeitig begegnen.

Das System der Fundamental-Flächen besteht also z. B. im X-Raume aus:

Dem Hyperboloid $(a_1 a_2)$, dem Hyperboloid $(a_1 a_3)$, dem Hyperboloid $(a_2 a_3)$, dem Hyperboloid $(a_1 a_2 a_3)$.

Dazu kommen als Fundamental-Kurven:

Die Geraden a_1, a_2, a_3 und die Raumkurve R_a, der Schnitt der 3 zuerst genannten Hyperboloide.

Es folgt dann leicht:

„Einer Ebene z. B. im X-Raume entspricht im Y-Raume eine Fläche 3. Ordnung, welche durch R_b, b_1, b_2 und b_3 hindurchgeht."

Diese Fläche ist auf die Ebene eindeutig abgebildet und aus der Betrachtung dieser Abbildung ergibt sich in der bekannten Weise, dass die Fläche 27 Gerade enthält.

3. Die analytische Darstellung dieser Transformation gestaltet sich wie folgt: Sind die Ebenenbüschel a_1, a_2, a_3 bezüglich gegeben durch

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} a_x - \lambda b_x &= o \\ A_x - \mu B_x &= o \\ A_x - \nu B_x &= o \end{aligned}$$

wo $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$ etc. und sind die dazu projectiven Büschel b_1, b_2, b_3 bezüglich

$$\text{2)} \qquad \begin{aligned} a'_y - \lambda b'_y &= o \\ A'_y - \mu B'_y &= o \\ A'_y - \nu B'_y &= o \end{aligned}$$

so werden die Gleichungen der Transformation

$$\text{3)} \qquad \begin{aligned} a_x b'_y - b_x a'_y &= o \\ A_x B'_y - B_x A'_y &= o \\ A_x B'_y - B_x A'_y &= o \end{aligned}$$

Diess sind 3 in den x und y lineare Gleichungen, allerdings von specieller Form. Nimmt man 3 bilineare Gleichungen der allgemeinen Form

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = o \quad \left\{ \begin{matrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \right\}$$

so erhält man durch dieselben die allgemeine birationale Transformation 3. Ordnung dieser Art, welche Nöther[1]) und Cayley[2]) fast gleichzeitig behandelt haben. Bei dieser tritt in jedem Raum als Fundamentalfläche eine Fläche 8. Ordnung auf und auf ihr als 3 fache Kurve eine Raumkurve 6. Ordnung. In unserm Falle ist diese Fläche 8. Ordnung in 4 Hyperboloide zerfallen, die Raumkurve 6. Ordnung dagegen besteht aus den 3 Geraden und der Raumkurve 3. Ordnung. Dieser geometrisch nicht uninteressante Fall findet in den citierten Arbeiten keine Erwähnung.

4. Die bilinearen Gleichungen 3) kann man mit Rücksicht auf ihre specielle Form als „zweiteilig" bezeichnen; die allgemeine Transformation dieser Art lässt sich nicht auf diese Form bringen. Betrachten wir, des Zusammenhanges wegen, einen Moment die allgemeine quadratische Transformation der Ebene, so ist bekannt, dass diese dargestellt werden kann durch das System 2 bilinearer Gleichungen

$$4) \quad \begin{matrix} \Sigma a_{ik} x_i y_k = o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k = o \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{matrix} \right\}$$

Eine solche bilineare Form $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ lässt sich nun als „zweiteilige" schreiben immer und nur, wenn die Determinante der Form $| a_{ik} | = o$, wie diess London[3]) zeigt. Trotzdem lässt sich die allgemeine quadratische Transformation der Ebene noch durch zwei zweiteilige Gleichungen

1) Mathematische Annalen Bd. 3, 1871, pag. 547.
2) Proceedings of the London Mathem. Society, Vol. III, 1870.
3) Mathematische Annalen Bd. 38, 1891.

darstellen. Denn die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$, welche eine reciproke Beziehung der Ebene vorstellt, wird erfüllt durch ∞^3 Punktpaare (x, y).

Hat man 2 solche Gleichungen wie in 4), so gibt es noch ∞^2 Punktepaare (x, y), welche bei den Gleichungen genügen und diess sind eben die Punktepaare der quadratischen Transformation. Darauf beruht auch die Erzeugung dieser Transformation, welche Hirst gegeben hat. Betrachtet man jetzt weiter die Schaar

$$5) \qquad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \cdot \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

so stellt diese für jeden Wert von λ zwar eine andere Reciprocität vor, die Punktpaare der quadratischen Transformation jedoch gehören immer dieser Reciprocität an. Man kann dann die quadratische Transformation auch durch irgend 2 andere Reciprocitäten der Schaar 5) erzeugen und kann als solche 2 mit verschwindender Determinante herausgreifen. Denn die Determinante von 5) liefert eine Gleichung 3. Grades in λ. Eine solche Reciprocität ist aber dann als zweiteilige Form zu schreiben und diese kann wieder als Resultat der Elimination des Parameters aus projectiven Strahlbüscheln erhalten werden. So entsprechen also den 3 Wurzeln der kubischen Gleichung die 3 Fundamentalpunkte, welche die quadratische Transformation in jeder Ebene besitzt.

5. Anders verhält es sich im quaternären Gebiet. Verschwindet die Determinante $|a_{ik}|$ einer bilinearen Form von 4 homogenen Variabeln x und y,

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$$

so genügt diess blos dazu, um die Form als eine dreiteilige schreiben zu können. Denn ist

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x) + y_4 f_4(x)$$

so besagt das Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$, dass eine lineare Relation besteht

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + k_4 f_4 = o$$

und wenn man diese benutzt, um f_4 durch f_1, f_2, f_3 auszudrücken, so wird

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k = f_1 \left(y_1 - \frac{k_1}{k_4} y_4 \right) + f_2 \left(y_2 - \frac{k_2}{k_4} y_4 \right) + f_3 \left(y_3 - \frac{k_3}{k_4} y_4 \right)$$

Damit ist $\Sigma a_{ik} x_i y_k$ als dreiteilige Form geschrieben.

Hat man jetzt 3 bilineare Formen allgemeiner Art

$$6) \qquad \begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma c_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

so wird jede einzelne derselben durch ∞^5 Punktpaare (x, y) befriedigt, die ∞^3 Punktpaare der durch 6 dargestellten Transformation jedoch sind diejenigen Punktpaare, welche den 3 Gleichungen genügen. Bildet man jetzt das System

$$7) \qquad \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k + \mu \Sigma c_{ik} x_i y_k = o$$

so enthält jede in ihm enthaltene Reciprocität die Punktpaare der Transformation. Die Bedingung, dass die Determinante vor 7) verschwinde, gibt eine Gleichung 4. Grades in λ und μ. Man kann also die Transformation 6) auch durch 3 dreiteilige Gleichungen darstellen.

Soll dagegen die Transformation durch 3 zweiteilige Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden können, so ist dazu für jede der 3 bilinearen Formen ausser dem Verschwinden der Determinante $|a_{ik}|$ auch noch das Nullwerden der Unterdeterminanten 3. Ordnung notwendig und hinreichend.

Nahe liegt hier die Frage nach dem durch 2 bilineare Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma a_{ik} x_i y_k &= o \\ \Sigma b_{ik} x_i y_k &= o \end{aligned}$$

dargestellten Gebilde. Offenbar gibt es noch ∞^4 Punktpaare, welche beiden Gleichungen genügen. Hält man z. B. x in

beiden Gleichungen fest, so erhält man 2 Ebenen, deren Schnittlinie der Ort der Punkte y ist, die dem Punkte x entsprechen. Alle auf diese Weise zu erhaltenden Geraden bilden einen Complex. Dadurch, dass die Ebenen einander entsprechen, welche in den beiden Reciprocitäten zu gleichen Werten von x (oder y) gehören, wird aber der Raum collinear auf sich bezogen und es folgt somit, dass der in Rede stehende Complex der Reye'sche oder tetraedrale, der ja durch 2 collineare Räume als Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen erzeugt wird. (Schröter's Complex der Wechselstrahlen.)

Die Gleichung des Complexes in den Plücker'schen Geradencoordinaten erhält man dadurch, dass man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{i1} y_i & \Sigma a_{i2} y_i & \Sigma a_{i3} y_i & \Sigma a_{i4} y_i \\ \Sigma a_{i1} y_i' & \Sigma a_{i2} y_i' & \Sigma a_{i3} y_i' & \Sigma a_{i4} y_i' \\ \Sigma b_{i1} y_i & \Sigma b_{i2} y_i & \Sigma b_{i3} y_i & \Sigma b_{i4} y_i \\ \Sigma b_{i1} y_i' & \Sigma b_{i2} y_i' & \Sigma b_{i3} y_i' & \Sigma b_{i4} y_i' \end{vmatrix} \quad \{i = 1, 2, 3, 4\}$$

nach quadratischen Unterdeterminanten entwickelt.

Der ganzen Schaar

$$\Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda \Sigma b_{ik} x_i y_k = o$$

dient dieser Complex sozusagen als Basis. — Hat man allgemeiner 2 Gleichungen

$$f(x^m y^n) = o$$
$$\varphi(x^\mu y^\nu) = o$$

so stellen diese, insofern auch wieder einem Punkte x eine gewisse Kurve von der Ordnung $(n \nu)$ entspricht, ein ∞^3 faches System von Kurven vor, also einen allgemeinern Complex.

6. Kehren wir jetzt noch einen Moment zurück zu unserer speciellen Transformation 3. Ordnung. Wir hatten von Anfang an angenommen, es sei Büschel a_1 projectiv Büschel b_1, a_2 projectiv b_2 und ebenso a_3 und b_3. Diese

Projectivität kommt geometrisch zum Ausdruck dadurch, dass a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 je ein Hyperboloid erzeugen. Im allgemeinen haben diese 3 Flächen 8 Punkte gemein und diess sind die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte der Transformation. Auch bei der allgemeinern Nöther-Cayley'schen Transformation hat man 8 solche Coincidenzpunkte. Man kann nun aber die erwähnten 3 Hyperboloide auch in specieller Lagenbeziehung annehmen. Von den verschiedenen möglichen Fällen sei nur der erwähnt, wo die 3 Hyperboloide eine Raumkurve 3. Ordnung R^3 gemein haben. Diess kommt darauf hinaus, dass man die 6 Achsen $a_1, \ldots b_3$ als Secanten einer R^3 wählt und je 2 Ebenenbüschel wie a_1 und b_1 perspectiv zur R^3 nimmt, sodass stets entsprechende Ebenen der Büschel auf dieser Kurve sich begegnen. Dann besteht die ganze R^3 aus Coincidenzpunkten der Transformation, dieselbe entspricht sich Punkt für Punkt selbst. Diese Transformation stellt das Analogon vor zu der quadratischen Transformation der Ebene mit einem festen Kegelschnitt.[1])

Wendet man unter Festhaltung der R^3 diese Transformation wiederholt an, so erhält man Transformationen in der Ordnung 3^λ, welche alle diese R^3 als „feste" Kurve enthalten.

Es drängt sich hier die Vermutung auf, dass man statt der R^3 überhaupt eine Raumkurve von beliebiger Ordnung n benützen kann, sofern man nur 6 $(n-1)$ fache Secanten derselben zur Verfügung hat, um dieselben als Gerade $a_1, \ldots b_3$ zu benützen. 6 solche $(n-1)$ fache Secanten liegen dann immer auf einer Regelfläche 2. Ordnung. Man überzeugt sich nämlich auch analytisch leicht von der Richtigkeit folgenden Satzes:

---

1) Vergleiche meine Arbeit in den Mathematischen Annalen Bd. 39, pag. 580.

„Enthält eine Raumkurve n-Ordnung zwei $(n-1)$ fache Secanten, so liegt sie auf einer Fläche 2. Ordnung und hat die eine Regelschaar derselben überhaupt zu $(n-1)$-fachen Secanten.“

Geometrisch ergibt sich der Beweis dieses Satzes unmittelbar, wenn man die zwei $(n-1)$ fachen Secanten der Raumkurve als Achsen zweier zur Raumkurve perspectiven und darum untereinander projectiven Ebenenbüschel nimmt, die dann eine Regelfläche 2. Ordnung F^2 erzeugen.

Unter dieser Voraussetzung gehören also die 6 Geraden $a_1, \ldots b_3$ der gleichen Regelschaar F^2 an, auf welcher auch die R^n liegt. Die Hyperboloide, welche die Büschel a_1 und b_1, a_2 und b_2, a_3 und b_3 erzeugen, fallen alle drei zusammen mit F^2. Wählt man jetzt aber einen Punkt P_x auf dieser F^2, so entspricht ihm offenbar die durch ihn gehende, nicht zur Schaar der a_1 gehörige Erzeugende der Fläche F^2. Einer beliebigen Geraden g entspricht dann wieder eine Gerade, wenn man von den 2 Geraden absieht, die den Schnittpunkten der g mit der F^2 zuzuweisen sind. Man erkennt, dass die Transformation sich in diesem Falle auf eine Collineation reduciert.

Diess ist richtig, solange $n > 3$. Aber auch für $n = 3$ müssen wir dementsprechend, wenn R^3 eine „feste“ Kurve sein soll, noch die ausdrückliche Voraussetzung beifügen, dass die 6 Secanten $a_1, \ldots b_3$ der R^3 nicht einer Regelschaar angehören dürfen. Es folgt dann aber:

„Die R^3 ist die einzige Raumkurve, welche als „feste“ Kurve in unserer (speciellen) Transformation auftreten kann.“

Wählt man 2 der 3 Geraden in einem Raum z. B. b_1 und b_2 so, dass sie sich schneiden, so ist der Schnittpunkt derselben ein Doppelpunkt für die Fläche 3. Ordnung, welche einer Ebene im andern Raum entspricht. Auf diese Weise

kann man verschiedene Typen der Fläche 3. Ordnung durch die Transformation erhalten.

7. Sind die 3 bilinearen Gleichungen 6) allgemeiner Natur und setzt man in ihnen

$$a_{ik} = a_{ki}; \quad b_{ik} = b_{ki}; \quad c_{ik} = c_{ki}$$

so erhält man, wie Nöther l. c. pag. 556 bemerkt, die Hesse'sche Transformation, bei welcher jedem Punkte des Raumes sein conjugierter in Bezug auf ein Netz von Flächen 2. Ordnung entspricht. Denn die Gleichungen 6) lassen sich dann auffassen als die Polarebenen eines Punktes y in Bezug auf die 3 Flächen 2. Ordnung

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = o; \quad \Sigma b_{ik} x_i x_k = o; \quad \Sigma c_{ik} x_i x_k = o$$

Diese Raumtransformation ist natürlich involutorisch. Herr Professor Bauer hat mich nun, nachdem ich ihm diese Bemerkungen vorgelegt hatte, noch auf folgende weitere Specialisierung aufmerksam gemacht. Nimmt man statt der eben genannten Flächen 2. Ordnung 3 Ebenenpaare, so beschreiben die Polarebenen eines Punktes Ebenenbüschel um die 3 Schnittlinien eines jeden solchen Paares. In der Tat verschwinden unter dieser Voraussetzung für die Fläche 2. Ordnung ja ausser der Determinante auch noch die sämmtlichen Unterdeterminanten 3. Ordnung, sodass also die Form nach dem Frühern eben als zweiteilige darstellbar wird. Natürlich ist auch diese speciellste Transformation involutorisch. Die Geraden a_1, a_2, a_3 fallen zusammen mit b_1, b_2, b_3, wie überhaupt das System der singulären Elemente in beiden Räumen zusammenrückt.

Sitzung vom 3. Februar 1894.

1. Herr C. v. Kupffer teilt die Resultate seiner Untersuchungen: „über Monorhinie und Amphirhinie" mit.

2. Herr Ad. v. Baeyer hält einen Vortrag: „über Terpenthinöl".

Die Ergebnisse sollen an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Ueber Monorhinie und Amphirhinie.

Von C. Kupffer.

(Eingelaufen 3. Februar.)

Die von Johannes Müller in seiner berühmten Monographie über die Myxinoïden als Cyclostomata zusammengefasste Gruppe der Kranioten nimmt nach ihrer gesammten Organisation jedenfalls eine sehr tiefe Stelle ein. Es fehlt ihnen jede Spur von paarigen Extremitäten und von Wirbelkörpern, wenn auch bei den erwachsenen geschlechtsreifen Petromyzonten in der bindegewebigen Scheide der Chorda dorsalis Anfänge oberer Wirbelbögen in Form unregelmässiger Knorpelstücke auftreten. Sehr eigenartig erscheint auch der Kiemenapparat. Aber diese Verhältnisse am Rumpfe sind bei der Frage, welche Stellung diesen Tieren im Systeme anzuweisen sei, von minderem Gewichte gewesen, als die Verhältnisse am Kopfe und hier namentlich der Mangel an Kiefern und die unpaarige, mit nur einer äusseren, dorsal gelegenen Oeffnung versehene Nase.

Ein Teil der Zoologen, unter diesen namentlich Ernst Häckel[1]) scheidet diese unpaarnasigen kieferlosen Kranioten (Monorhina oder Cyclostomata) ganz von den Fischen und betrachtet dieselben als Repräsentanten einer tief stehenden Seitenlinie, von welcher sich die mit den Fischen beginnende Hauptlinie der übrigen Kranioten, die als Kiefermäuler, Gnathostomen, auch als Paarnaser, Amphirhinen, bezeichnet werden, scharf absetze. — Andere Zoologen, ihnen voran Th. Huxley, gehen in der Scheidung lange nicht so weit. Huxley[2]) rechnet dieselben Tiere (Marsipobranchii) zu seiner Klasse der Fische und ist der Ansicht, dass ihnen nicht jede Spur von Kiefern fehle, sondern dass Teile ihres völlig ausgebildeten Kopfskelettes, wenn auch rudimentär, doch Teilen des Kiefergerüstes der Gnathostomen homolog seien. — Von unseren Kollegen steht Herr Kollege R. Hertwig[3]) mehr auf der Seite von Häckel, indem er in seinem Lehrbuch die Rundmäuler als besondere Klasse von der Klasse der Fische scheidet, während Herr Kollege von Zittel[4]) sich der Auffassung Huxley's anschliesst.

Ich habe mich in den letzten Jahren nach verschiedenen Seiten hin mit der Entwicklungsgeschichte einer Familie der Cyclostomen, der Petromyzonten beschäftigt und muss hervorheben, dass meine Beobachtungen der Hauptsache nach dahin auslaufen, den Abstand, der zwischen den Cyclostomen und Gnathostomen obzuwalten scheint, auszugleichen. Das gilt namentlich für die Verhältnisse am Kopfe, welchen die Hauptargumente für eine scharfe Sonderung beider Gruppen

---

1) E. Häckel, Natürliche Schöpfungsgeschichte, 8. Aufl., 1889, S. 598 ff. — Anthropogenie, 4. Aufl., 1891, S. 531 ff.

2) Th. Huxley, Journal of Anatomy and Physiology, Vol. X, 1876, p. 412.

3) R. Hertwig, Lehrbuch der Zoologie, 1. Aufl., II. Teil, S. 484.

4) K. v. Zittel, Handbuch der Palaeontologie, I. Abt., III. Bd., 1887, S. 56.

entnommen wurden. Der Kopf der Cyclostomen und Unpaarnaser ist nicht in dem Grade von dem Kopfe der Gnathostomen und Paarnaser verschieden, als es den Anschein hatte, denn die Embryonen und jungen Larven der Neunaugen zeigen die Anlagen von Kiefern und die Embryonen der paarnasigen Gnathostomen, bis zu den Säugetieren hin, weisen den reduzierten Rest einer unpaarigen Nasenanlage auf.

Besonders eignen sich die Embryonen der Neunaugen dazu, den zeitweiligen Bestand eines vordersten Darmteiles darzuthun, der zwar von einigen Embryologen hypothetisch vorausgesetzt, aber bisher nicht nachgewiesen war. Diesen Darmteil habe ich als präoralen Darm bezeichnet. Derselbe erstreckt sich bei diesen Embryonen vor der Bildung des Mundes an der Unterseite des Hirnes bis zu jenem Punkte des äusseren Keimblattes d. h. der Oberhaut, an welchem durch Einstülpung die Hypophysis entsteht. Dieser Punkt liegt ventral von der Platte, die die Anlage des unpaarigen Riechorgans darstellt. Weiter rückwärts und ventral bildet sich der Mund und mit der Ausdehnung dieses bei den jungen Larven der Neunaugen sehr geräumigen Blindsackes wird der präorale Darm von dem bleibenden Kiemendarme, gegen welchen der Mund sich eröffnet, abgetrennt. Der derart isolierte präorale Darm erfährt dann eine Rückbildung bis zum völligen Schwunde seiner Elemente. Früh aber, noch vor dem Auftreten des Mundes, entstehen an dem präoralen Darme, wie an der Region des Darmes, die als Kiemendarm sich erhält, seitliche symmetrische Ausstülpungen und zwischen diesen Taschen Bogenbildungen des mittleren Keimblattes. Diese Bildungen schliessen sich serial an einander und dürfen als homodynam gelten. Es entstehen also auch präorale Kiementaschen und präorale Kiemenbögen mit Aortenbögen. Erstere sind rudimentäre Bildungen und gehen mit dem präoralen Darme zu Grunde, die präoralen Kiemenbögen erhalten sich aber und verwachsen sekundär mit einander. Dieser

präoralen Taschen und Bögen zähle ich ursprünglich drei Paare. Aus dem vordersten deutlich nachweisbaren Bogenpaare entstehen Knorpel und Muskeln und zwar das Paar der knorpeligen Schädelbalken, sowie die Hauptmasse der Augenmuskeln, die also nicht dorsale Muskeln sind, wie bisher angenommen war, sondern ventrale, zur Kategorie der Kiemenmuskeln gehörige, mit denen sie auch histologisch übereinstimmen.

Huxley[1]) hat bereits 1869 in seinen Hunterian lectures es ausgesprochen, dass die Schädelbalken zu den ventralen Bogenbildungen, den Visceral- oder Kiemenbögen gehörten und diese Hypothese kann ich nunmehr embryologisch begründen. Auf den vordersten Bogen, den ich als Trabekularbogen bezeichne, folgen noch zwei Bogenpaare vor der vordersten postoralen Kiementasche, der Hyomandibulartasche, und dürfen darnach als Oberkiefergaumenbogen und als Unterkieferbogen bezeichnet werden, aber ihre Stellung ist bei den Neunaugen eine eigenartige. Der präorale Darm schnürt sich nämlich vor seiner Abtrennung stark ein und damit wird der unmittelbar vorn auf die Hyomandibulartasche folgende Bogen, der Unterkieferbogen, weit medialwärts und sogar vorwärts verlagert, so zwar, dass man, wenn dieser Vorgang nicht kontinuierlich verfolgt wird, den Palatinbogen für den Unterkieferbogen halten könnte. — Diese beiden hinteren Bogenpaare liefern bei den Ammocöten nicht Knorpel, sondern nur Muskeln und Bindegewebe und ich bin noch nicht in der Lage, ein Urteil darüber abgeben zu können, ob die von Huxley den Kieferbögen der Gnathostomen verglichenen knorpeligen Teile am Schädel der ausgebildeten Neunaugen diesen embryonalen Bögen entsprechen. Diese Entscheidung vorbehalten, ist aber jedenfalls soviel sicher, dass die Anlagen von

1) Hunterian lectures, in Medical times and Gazette, London 1869.

Kieferbögen den Cyclostomen in derselben Ausdehnung zukommen, wie den Gnathostomen.

Die unpaarige, eine mediane Oeffnung zeigende Nase der Cyclostomen hat verschiedene Deutungen erfahren. Die ursprüngliche Auffassung war die, dass das Organ einen einfachen median gelegenen Sack darstelle, von welchem aus ein Canal, der Nasengaumengang sich nach hinten erstrecke. Dieser Gang hört bei der Familie der Petromyzonten hinten blind auf, bei den Myxinoïden aber durchbricht der Canal das Dach des Darmrohres und kommuniziert frei mit demselben. Götte hat nun dargethan, dass ein Rest dieses Nasengaumenganges der Unpaarnaser sich als der sogenannte Hirnanhang, die Hypophysis, bei den Paarnasern erhalte, und A. Dohrn wies nach, dass das Riechorgan und der Gang genetisch gesondert werden müssen. Beide Teile bilden sich getrennt, das Riechorgan mehr dorsal und der Gang, der nunmehr als Hypophysis bezeichnet wird, entsteht ursprünglich näher dem Munde, als der Nase, aber indem mit diesen Organen die sie trennende Partie der Oberhaut mit eingestülpt wird, erhalten beide eine gemeinsame äussere Oeffnung. — Noch vor der Publikation Dohrn's hatte bereits Calberla auf der Naturforscher-Versammlung in München 1877 darauf hingewiesen, dass Nase und Hypophysis als getrennte Grübchen auftreten. Calberla[1]) fügte daran weitere Aufschlüsse. Er gab an, dass der Riechsack nicht unpaarig ist, sondern durch ein von der oberen Wand ausgehendes Septum in zwei symmetrische Abteilungen geschieden werde, zu welchen durch besondere Oeffnungen der knorpeligen Kapsel des Organs die von vorn herein paarigen Riechnerven treten. Bei der Umwandlung der Larve zum Geschlechtstier werde die Scheide-

---

1) Calberla, Zur Entwicklungsgeschichte des Petromyzon. Amtlicher Bericht der 50. Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte in München, 1877, S. 188.

wand knorpelig. Die Duplicität sei also nicht zu verkennen und es müssten deshalb die Petromyzonten als Amphirhinen bezeichnet werden. Götte, der dem Vortrage beiwohnte, bestätigte diese Angaben. In der That lässt sich das Septum leicht nachweisen, nur ist es nicht vom Beginne der Einstülpung an da, wie Calberla angab, selbst 5—6 mm lange Larven von P. Planeri zeigen noch keine Spur dieser Teilung. Ebenso unrichtig ist es, wenn Calberla den Nasengaumengang, d. h. die Hypophysis, erst paarig entstehen und nachträglich aus der Vereinigung einer doppelten Einstülpung den unpaarigen Gang sich bilden lässt.

In neuester Zeit hat sich W. His[1]) über das Riechorgan von Petromyzon ausgesprochen und eine Abbildung des Organs mit den beiden Riechnerven nach einem Frontalschnitte gegeben. His bezeichnet das Organ als paarig und die zu beiden Seiten des Septum gelegenen Buchten als die symmetrisch angelegten Riechgruben, zu welchen die Riechnerven vom Hirne aus divergierend sich erstrecken. Ganz zutreffend hebt er aber hervor, dass diese Höhle mit ihrer einfachen Eingangsöffnung der Nasenhöhle der übrigen Wirbeltiere morphologisch nicht gleichwertig ist. Er meint, dieselbe wäre wohl am besten als Gesichtshöhle zu bezeichnen und ihre Rückwand entspräche der Stirn- und oberen Gesichtsfläche anderer Wirbeltiere. — Ob nun die beiden Riechgruben von Petromyzon den Riechgruben der Amphirhinen morphologisch gleichwertig zu erachten seien, darüber äussert His sich nicht.

Wenn man nun weiss, dass die erste Anlage des Riech-

---

1) W. His, Die Entwicklung der menschlichen und tierischer Physiognomien. Archiv für Anatomie und Physiologie, Anat. Abt., 1892, S. 421.

Derselbe, Ueber das frontale Ende des Gehirnrohres. Daselbst, 1893, S. 163.

organs bei Petromyzon durchaus nicht paarige Einstülpungen zeigt, sondern eine einfache Epidermisplatte darstellt, die ohne irgend welche Unterbrechung über die Mittelebene sich hinweg erstreckt, in der Mitte keine Leiste, noch sonst eine die beiden Hälften trennende Marke zeigt, so bleiben für die Deutung des weiter entwickelten Organs und seiner Teile Unklarheiten bestehen und es wird erforderlich, die Entwicklungsgeschichte eingehender zu Rate zu ziehen. Das kann nicht geschehen, ohne dass zugleich die Entwicklung der Kopfnerven überhaupt Berücksichtigung fände, deren vorderstes Paar die beiden Riechnerven darstellen.

Der Entwicklungsgang der Kopfnerven und ihrer Ganglien ist ein komplizierter, es beteiligen sich daran Anlagen verschiedener Herkunft, je eine centrogene und eine kutane, die letztere wird von einer verdickten Platte resp. einem Wulst oder Hügel der Oberhaut geliefert. Die centrogene Anlage, aus der dorsalen Neuralleiste des Centralorgans hervorgehend, erreicht die entsprechende kutane Anlage, dann löst sich die tiefere Zellenschicht der letzteren ab und vereinigt sich mit der centrogenen Anlage zur Bildung eines Ganglions des betreffenden Nerven. Es findet also bei der Bildung der Kopfganglien eine centripetale Verlagerung von ursprünglich peripheren Zellen statt, die den Wert von Nervenzellen haben. Nun wäre es bequem, diese Verdickungen der Oberhaut, die sich an der Ganglienbildung beteiligen, einheitlich zu bezeichnen. Ich schlage dafür den Ausdruck Plakode[1]) vor. — Es bilden sich am Kopfe zwei Reihen solcher Plakoden, eine dorso-laterale Reihe und eine epibranchiale. Beide Reihen konvergieren nach vorn gegen eine vordere terminale Plakode, die sich sowohl bei Monorhinen, wie bei Amphirhinen findet. Bei den Monorhinen, speziell bei Petromyzon stellt dieselbe die Anlage des un-

1) *Πλακώδης, ες,* kuchenartig, plattenartig.

paarigen Riechorgans dar und wird eingestülpt; bei den Amphirhinen ist dieselbe zeitweilig vorhanden; ich[1]) habe sie bei vielen Knorpelganoiden, beim Frosch, ja bei Säugetieren nachgewiesen. Schafembryonen, an denen die Rachenhaut noch nicht gegen den Darm durchgebrochen ist, zeigen dieselbe in starker Ausbildung. Später aber verschwindet diese unpaarige Riechplakode bei den Amphirhinen, ihre Stelle würde der unteren mittleren Stirnregion entsprechen. Diese terminale Plakode beansprucht noch ein weiteres Interesse, insofern sie das Feld darstellt, innerhalb welches das Hirn vor seiner vollständigen Isolation mit der Oberhaut zusammenhängt und entweder durch ein Loch nach aussen mündet oder durch einen massiven Strang befestigt ist. Diese letzte Verbindungsstelle ist das vordere Axenende des Hirnes. Damit ergiebt sich ein Anschluss an Amphioxus, bei welchem Tiere ja noch spät das Neuralrohr vorn eine Oeffnung besitzt, den vorderen Neuralporus, der sich innerhalb eines trichterförmig eingesenkten Feldes der Oberhaut befindet, einer Grube, die bereits vor Decennien von Kölliker als unpaarige Riechgrube beschrieben worden ist. Auch dort aber ist die Verbindung und Communication des Hirnes mit diesem Sinnesorgan keine bleibende, das Hirn trennt sich von der Grube, bleibt aber mit dem Boden derselben in Berührung.

So zeigt sich in einem wesentlichen Punkte Uebereinstimmung von Amphioxus an bis zu den Amnioten: das Ende der Hirnaxe läuft vorn gegen eine terminale Plakode aus, welche sich bei Amphioxus und den Monorhinen zu einem Sinnesorgan gestaltet, bei den Amphirhinen als Rudiment des gleichen Organs sich bis zum völligen Schwunde zurückbildet.

Da dieses terminale Organ bei Amphioxus am wahr-

---

1) Studien zur vergl. Entwicklungsgeschichte des Kopfes der Kranioten, München 1893, S. 77.

scheinlichsten als Riechorgan gedeutet werden kann und da dieselbe Plakode bei den Monorhinen in die Bildung des allgemein als Riechorgan aufgefassten Sackes übergeht, so habe ich dieselbe als unpaarige Riechplakode bezeichnet.

An diese schliesst sich in der dorso-lateralen Reihe bei allen Amphirhinen dasjenige Plakodenpaar an, aus welchem die paarigen Riechgrübchen sich bilden, dann folgt das Paar, welches sich an der Bildung des vorderen Trigeminusganglions beteiligt und weiter die Plakoden für die übrigen Hauptganglien. In der zweiten, weiter ventral gelegenen, epibranchialen Reihe, folgt auf die unpaarige Riechplakode diejenige, aus welcher die Linse entsteht und in engstem Anschlusse an letztere abermals Ganglienplakoden.

Alle drei Riechplakoden haben das gemeinsam, dass aus denselben keine Ganglien entstehen, sondern dass ihre Nervenzellen, wie die Histiologie heute lehrt, peripher im Epithel des Sinnesorgans verbleiben.

Aus den paarigen Riechgruben entwickeln sich, wie Kölliker und His beobachtet haben, die paarigen Riechnerven in centripetaler Richtung. Ein unpaarer Riechnerv tritt bei den Amphirhinen nicht auf. — Bei Petromyzon besteht bei ganz jungen Larven von $3^1/_2$—4 mm Länge ein bald verschwindender medianer, einige Kerne enthaltender Fibrillenstrang, der die Kuppe des Riechsackes mit dem vordersten Hirnende, dem lobus olfactorius impar verbindet. Wenn derselbe verschwindet, leitet sich die Bildung der paarigen Riechnerven ein und diese sind ohne Zweifel den paarigen Riechnerven der Amphirhinen homolog.

Nun besteht also die Schwierigkeit für die Vergleichung, dass das gleiche Nervenpaar bei den Amphirhinen den paarig auftretenden Riechgruben, bei den Monorhinen dem zunächst jedenfalls unpaarig erscheinenden Riechsacke angehört. Es wirft sich also die Frage auf, ob bei den Monorhinen, speziell bei Petromyzon neben der unpaarigen noch paarige Riech-

plakoden nachweisbar seien und diese Frage kann ich bejahen. Die gesuchten Bildungen lassen sich embryologisch ganz scharf definieren, als Verdickungen der Epidermis, die innerhalb der dorso-lateralen Plakodenreihe zwischen der terminalen Plakode und der vorderen Trigeminusplakode ihre Lage haben; und solche sind vorhanden. Sie sind bei Petromyzon erst schwach entwickelt und an der Innenseite durch eine Furche von der unpaarigen Riechplakode scharf abgesetzt. Bei der fortschreitenden Einstülpung der letztgenannten werden sie aber mit in die Bildung des Riechsackes einbezogen. Sie liefern also die lateralen Partien des Riechsackes, welche später zu den seitlichen Buchten des durch ein Septum unvollständig geteilten Sackes werden. Im Bereich des mittleren Feldes aber, das der unpaarigen Riechplakode entspricht, entsteht das Septum und es ist fraglich, ob sich an demselben, wenigstens in ganzer Ausdehnung, das Riechepithel enthält.

So fehlt also auch hinsichtlich des Riechorgans eine scharfe Scheidung zwischen Monorhinen und Amphirhinen. Allerdings ist die paarige Nase nicht vollständig derjenigen der Petromyzonten homolog, sondern nur teilweise, denn in die Bildung des Riechsackes der letzteren gehen drei Plakoden ein, das Geruchsorgan der Amphirhinen entsteht dagegen nur aus den lateralen Plakoden, die mittlere fällt dabei ganz aus. Petromyzon stellt also ein verbindendes Glied dar zwischen den reinen Monorhinen, welche aber in der Gegenwart wohl nur durch Amphioxus noch repräsentiert sind, und den reinen Paarnasern, bei welchen die unpaarige Riechplakode nur während kurzer Entwicklungsperiode noch nachweisbar ist. Die Ausschaltung der terminalen unpaarigen Plakode bei der Bildung der Nase der Gnathostomen steht wohl im Zusammenhange mit der Ausbildung des Kieferapparates und der fortschreitenden Rückbildung der Hypophysis.

Sitzung vom 3. März 1894.

1. Herr LEONHARD SOHNCKE macht eine Mittheilung: „Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten". Dieselbe wird in den Denkschriften erscheinen.

2. Herr EUGEN v. LOMMEL legt eine in seinem Institut ausgeführte Arbeit des Herrn B. W. STANKEWITSCH, a. o. Professor an der Universität Warschau: „Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der dielectrischen Polarisation in Flüssigkeiten" vor.

3. Herr GUSTAV BAUER bespricht eine Arbeit des Herrn Privatdozenten Dr. Hermann BRUNN: „Exakte Grundlage für eine Theorie der überall convex begrenzten Gebilde" und überreicht ein Referat über dieselbe.

4. Herr AD. v. BAEYER hält einen Vortrag: „über Kümmelöl". Die Resultate seiner Untersuchung werden an einem anderen Orte zur Veröffentlichung kommen.

Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der dielectrischen Polarisation in Flüssigkeiten.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von B. W. Stankewitsch,
a. o. Professor an der k. Universität Warschau.

(Eingelaufen 3. März.)

Gegen das Ende der Sommerferien 1893 unternahm ich, der liebenswürdigen Erlaubniss des Herrn Professor Dr. von Lommel gemäss, eine experimentelle Arbeit über dielectrische Polarisation in Flüssigkeiten im Physikalischen Institute der Universität München. Die Arbeit ist jetzt beendigt.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, den Herren Professoren Dr. von Lommel und Dr. Grätz, sowie dem Herrn Assistenten Dr. Fomm, für ihre liebenswürdige Unterstützung im Laufe der Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.

Es ist der Zweck dieser Arbeit:

I. eine neue Modification der bekannten „Capacitätsmethode" (unter Benutzung von Wechselströmen) vorzuschlagen, die gewisse Vortheile hat, nämlich: A. sie nimmt nur kleine Mengen von Substanzen in Anspruch und ist daher besonders für die Untersuchung seltener organischer Flüssigkeiten geeignet; B. sie gestattet nicht nur die Be-

stimmung der Dielectricitätsconstanten verschiedener Flüssigkeiten in Bezug auf Luft, sondern auch in Bezug auf einander, welcher Umstand ein werthvolles Mittel zur Controle der in Bezug auf Luft gefundenen Werthe von Dielectricitätsconstanten bietet;

II. zu prüfen, ob nicht bei hinreichender Vervollkommnung der mechanischen Unterbrechung des zur Erzeugung von Wechselströmen benutzten primären Stromes (bei hinreichender Verkleinerung der Ladungsdauer des Condensators) gute Resultate nach der Capacitätsmethode auch für diejenigen Flüssigkeiten zu bekommen sind, für welche sonst (bei üblicher langsamer Unterbrechung) nur die von den Herren Cohn und Arons vorgeschlagene Methode der Kraftmessung giltig ist; diese Bemühungen blieben, wie aus dem Weiteren zu sehen ist, nicht ohne Erfolg: der zu diesem Zwecke construirte Unterbrecher erlaubt mir sogar für den Alkohol (99%) den richtigen Werth der Dielectricitätsconstante nach der Capacitätsmethode zu bekommen; nur für den mehr wasserreichen Alkohol (etwa 93%) sind die auf diese Weise ermittelten Werthe noch etwas zu gross; für die Flüssigkeiten, deren electrisches Leitungsvermögen kleiner als dasjenige des absoluten Alkohols ist, bekomme ich Werthe, die beinahe mit den von der Kraftmessungsmethode gelieferten zusammenfallen;

III. speciell eine Reihe von Flüssigkeiten zu untersuchen, für welche die D.C.-en noch nicht bestimmt sind, und welche ihren optischen Eigenschaften nach merkwürdig sind: es sind ätherische Oele, die mit der Eigenschaft, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, begabt sind.

A. Apparate.

I. Den wesentlichsten Theil meiner Versuchsanordnung bildet ein Doppelcondensator, bestehend aus drei horizontal über einander gelegten cylindrischen Kupferplatten (Durchmesser der Grundebenen = 15 [cm], Höhe = 0,95 [cm]), die von einander mittelst je drei sehr nahe gleich dicker parallelepipedischen Spiegelglasplättchen getrennt sind (die Dicken der Plättchen betragen: für das der oberen Zwischenschicht angehörige System 0,1630; 0,1628; 0,1634, im Mittel also 0,1631 [cm]; für das andere System 0,1635; 0,1632; 0,1631, im Mittel also 0,1633 [cm]); die Grundflächen dieser Plättchen sind klein im Verhältnisse zu dem Flächeninhalte der Grundebenen von Kupferplatten (die gesammte Grundflächengrösse für je ein System von drei Glasplättchen macht ungefähr den 0,0037 ten Theil des Flächeninhaltes der Grundebene einer Kupferplatte aus). Von den zwei dünnen Zwischenschichten, welche die Kupferplatten trennen, wird entweder die obere allein mit einer Flüssigkeit gefüllt (zur Bestimmung der D. C. dieser Flüssigkeit in Bezug auf Luft), oder die beiden gleichzeitig mit zwei verschiedenen Flüssigkeiten (Controle-Versuche). Die Idee, solche capillare Lamellen herzustellen, gehört bekanntlich Herrn Christiansen (Wied. Ann., Bd. 14, 1881, S. 23), und ist schon öfters von mehreren Forschern zur Bestimmung der relativen Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten benutzt. Jedoch geschieht bei meinen Versuchen die Füllung von Zwischenschichten nicht nach der von Herrn Christiansen vorgeschlagenen Weise, sondern es werden die horizontal verlaufenden Spitzen von Trichterröhren von der Seite aus in die Zwischenschichten eingesteckt.

Der Doppelcondensator ist von einer zur Erde abgeleiteten metallischen „Schutzhülle" umgeben. Dieselbe ist aus einer 28 [cm] hohen und 26 [cm] breiten Glasglocke

hergestellt, deren innere Fläche mit einem Netzwerke aus Stanniolstreifchen belegt ist; die Glocke ruht auf einem ebenfalls mit Stanniol bedeckten Brette, auf welchem auch die untere Kupferplatte liegt (sie bleibt auch stets mit der Erde leitend verbunden). Das Brett ist von einem Gestell mit drei Fussschrauben, welches das horizontale Einstellen der Kupferplatten gestattet, getragen. Die Trichterröhre, sowie Zuleitungsdrähte zu den Kupferplatten gehen durch Löcher, welche durch die Glocke durchgebohrt sind, (die Zuleitungsdrähte durch Paraffinpfropfen).

II. Zur Messung der Potentiale dient ein Mascart'sches Electrometer in „Doppelschaltung" (Hallwachs, Wied. Ann., Bd. 29, 1886, S. 1) unter Benutzung einer etwa 30 [cm] hohen unifilaren Suspension der Nadel mittelst dünnen Platindrahtes und bei Beseitigung der Flüssigkeitsdämpfung (das Stäbchen, welches die Nadel trägt, berührt nicht die Schwefelsäure; letztere dient also ausschliesslich zur Beseitigung der Feuchtigkeit im Innern des Electrometergehäuses). Unifilare Suspension, sowie Beseitigung der Flüssigkeitsdämpfung sind nämlich, wie Hallwachs gezeigt hat (l. c.), für die Festigkeit des „Nullpunktes" und überhaupt für das regelmässige Functioniren des Electrometers von sehr grosser Wichtigkeit. Unter diesen Umständen ist die Schwingungsdauer der Nadel gleich 3,96 [sec]; das Verhältniss der Directionskraft des Platindrahtes zu dem Trägheitsmomente der Nadel beträgt also 0,63 $[\mathrm{sec}]^{-2}$. Es ist aus diesen Zahlen ersichtlich, dass die Empfindlichkeit meines Electrometers verhältnissmässig klein ist. Das bildet aber für mich keinen Uebelstand, weil ich mit hohen Potentialen zu thun habe; indessen hat die kleine Empfindlichkeit den Vortheil, den Nullpunkt fast absolut fest zu machen (wegen grosser Directionskraft des Platinfadens). Das logarithmische Decrement der Nadelschwingungen ist gleich 0,0396 (Luftdämpfung). Die Beobachtungen am Electrometer geschehen

mittelst Scala und Fernrohr (Abstand des Spiegels von der Scala = 294 [cm]).

Es sei das eine Quadrantenpaar sowie das Electrometergehäuse mit der Erde, das andere Quadrantenpaar und die Nadel mit einander und mit einer Quelle von constantem Potentiale = v verbunden (Doppelschaltung), dann ist, wie Hallwachs gezeigt hat, der Ausschlag gleich

$$\alpha = av^2 + bv + c. \tag{1}$$

Hier bedeutet α die „reducirte" (auf Proportionalität mit den Bögen) Zahl der Scalentheile a, b, c — Constanten, von denen c immer sehr klein ist: es ist nämlich c dem Producte der beiden kleinen Hallwachs'schen Constanten

$$N|Q \quad \text{und} \quad q_{12}$$

(l. c., SS. 4—5) proportional. Bei praktischen Anwendungen der Formel (1) kann immer c vernachlässigt werden: diese Constante hat nur theoretische Bedeutung (indem sie zur Bestimmung der theoretischen Constanten q_{12} dient); ihr Werth kann nur mittelst der, so zu sagen „mikrometrischen" Methode bestimmt werden, welche von Hallwachs vorgeschlagen ist (l. c., SS. 13—15).

Es sei nun v kein constantes, sondern ein periodisch (mit voller Periode = τ) oscillirendes Potential, und zwar derart, dass

$$\int_0^\tau v\,dt = o$$

ist. Diese Eigenschaft kommt bekanntlich dem Potentiale am isolirten Ende der Secundärrolle eines Inductoriums zu, wenn das andere Ende der Rolle mit der Erde verbunden ist und in derselben elektrische Schwingungen stattfinden.

Wenn wir das Elektrometer in Doppelschaltung mit dem erwähnten isolirten Pole verbinden, so muss der Ausschlag, wie es ganz einfache Betrachtungen zeigen, gleich sein

$$\alpha = a \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2 \, dt.$$

Das heisst: bei Anwendung der Doppelschaltung zur Energiemessung von Wechselströmen ist der Ausschlag von der Constanten b unabhängig (c aber ist einfach vernachlässigt worden). Für diesen Fall gilt also anstatt (1) eine einfachere Formel

$$\alpha = a w^2, \tag{2}$$

wo w^2 — das mittlere Quadrat des oscillirenden Potentials v bedeutet. Natürlich wird dabei vorausgesetzt, dass τ gegen die Periode der Eigenschwingungen der Electrometernadel sehr klein ist.

III. Ein in der soeben erwähnten Weise oscillirendes Potential liefert bei meinen Versuchen ein Inductorium, dessen secundäre Rolle die Länge = 31 [cm] und den Durchmesser = 11 [cm], bei dem Widerstande = 411 Siem. E., hat. Der primäre Strom ist von einem Grove-Elemente geliefert; der Widerstand der primären Kette kann mittelst eines eingeschalteten Rheostaten variirt werden; diese Variationen finden in den Grenzen von etwa 10 bis etwa 30 [Ohm] statt.

Als Unterbrecher wurde im Anfange der Arbeit das eine Rad eines Buff'schen Disjunctors (Durchmesser = 5,15 [cm]) mit einer auf ihm federnd schleifenden Bürste aus feinen Kupferdrähten benutzt. Es ist derselbe Unterbrecher, welcher Herrn Dr. Franke bei seiner Untersuchung über die Abhängigkeit der D.C.-en flüssiger Körper von der Temperatur diente (Franke, Inauguraldissertation, Bunzlau 1893; auch: Wied. Ann., Bd. 50, 1893, S. 163). Dieser Unterbrecher

(ich will ihn „Unterbrecher No. I" nennen) liefert 8 Unterbrechungen bei einer Umdrehung des Rades; wenn also das Rad n Umdrehungen in einer Secunde macht, so ist die volle Periode der Oscillationen von v auf dem isolirtem Pole des Inductoriums gleich

$$\tau = \frac{1}{8n} [\mathrm{sec}];$$

die Ladungszeit aber eines mit diesem Pole verbundenen Condensators beträgt

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{16 \cdot n} [\mathrm{sec}]. \qquad (\omega)$$

Die Berechnung der Ladungsdauer nach der Formel (ω) setzt voraus, dass die Bürste stets dicht am Rade liegt. Das kann aber natürlich durchaus nicht bei einer beliebigen Rotationsgeschwindigkeit des Rades der Fall sein: bei grossen Geschwindigkeiten findet ganz sicher das Ueberspringen der Bürste statt, und dann wird die Formel (ω) nicht mehr richtig; das kann zweifellos aus Messungen der D. Ç.-en von gut leitenden Flüssigkeiten geschlossen werden, wie es weiter unten ausführlich besprochen wird. Und zwar ist es selbstverständlich, dass beim Ueberspringen der Bürste die Formel (ω) nur zu kleine Werthe für die Ladungsdauer geben kann.

Es kann also nur bis auf eine gewisse Grenze vortheilhaft sein, die Rotationsgeschwindigkeit eines derartigen Unterbrechers zu vergrössern; nach dem Ueberschreiten dieser Grenze kann, wegen der Eigenschwingungen der Bürste, sogar die Zunahme der Ladungsdauer bei Vergrösserung der Geschwindigkeit eintreten.

Nachdem solches Verhalten des Unterbrechers No. I aus den Versuchsergebnissen festgestellt war, wurde ein neuer Unterbrecher construirt, welchen ich „Unterbrecher No. II" nennen werde. Der Unterbrecher No. II liefert 120 Unter-

brechungen bei einer Umdrehung; bei n Umdrehungen in der Secunde kann also die Ladungsdauer auf

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{240 \cdot n} \text{ [sec]} \qquad (\Omega)$$

herabgesetzt werden, wenn nur n eine gewisse obere Grenze nicht überschreitet.

Bei einer mässigen Rotationsgeschwindigkeit, die in den Grenzen

$$\text{von } n = 10 \text{ bis } n = 16$$

liegt, giebt der Unterbrecher No. II sehr gute Resultate.

Der Unterbrecher No. II hat folgende Dimensionen: Durchmesser des Rades = 13,8 [cm]; seine Breite an der Peripherie = 1,49 [cm]; Länge je eines metallischen resp. isolirenden Streifchens (die nämlich Schliessungen resp. Unterbrechungen des primären Stromes besorgen) = 0,2 [cm] (das ist die Dimension eines Streifchens in der Richtung der Peripherie des Rades); Breite dieser Streifchen (d. h. die der Rotationsaxe des Rades parallele Dimension) ist gleich der Breite des Rades an seiner Peripherie. Wegen kleiner Länge der Streifchen konnte natürlich eine aus feinen Drähten bestehende Bürste nicht mehr benutzt werden; statt dieser wurde ein dünnes 1 [cm] breites Kupferstreifchen angebracht, welches am Ende fein abgeschliffen und mit 7 Zähnen versehen ist; das Streifchen ist von einer Stahlfeder getragen, und sein abgeschliffenes Ende trifft die Peripherie des Rades unter dem Winkel von etwa 45°.

Die Räder der beiden benutzten Unterbrecher wurden durch eine Hefner-Alteneck'sche Maschine getrieben; die Maschine von 2 bis 5 grossen Accumulatoren gespeist; kleinere Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeit wurden durch Aenderungen in einem eingeschalteten Widerstande erzielt.

Die Rotationsgeschwindigkeit der Unterbrecherräder wird mittelst eines Tourenzählers und einer Secundenuhr bestimmt.

Da es meine Absicht war, die Versuche bei einer Reihe von ziemlich verschiedenen Ladungszeiten anzustellen, war es für mich von Wichtigkeit, auch sehr langsame elektrische Schwingungen zur Verfügung zu haben. Die beiden Unterbrecher konnten mich aber in dieser Hinsicht nicht befriedigen: bei sehr kleinen Rotationsgeschwindigkeiten functioniren sie gar nicht regelmässig (wegen der unter diesen Umständen zu geringen Trägheit der Räder). Dann habe ich, nach dem Rathe des Herrn Dr. Fomm, eine kleine Hauptschlussmaschine (bezogen von der Anstalt der Allgemeinen Elektricitäts-Gesellschaft zu Berlin, No. 2839) zur Erzeugung des oscillirenden primären Stromes benutzt, indem dieselbe in eine Wechselstrommaschine dadurch verwandelt worden ist, dass von zwei gegenüberliegenden Collectorstreifchen durch Bürsten stetig der Strom abgenommen wurde. Die Resultate erwiesen sich als sehr gut: wenn die Maschine von 30 Akkumulatoren gespeist ist, macht der Gramm'sche Ring von 4,5 bis 7 Umdrehungen in einer Secunde; der von der Maschine für das Inductorium gelieferte primäre Strom bietet von 9 bis 14 Wechsel der Richtung in einer Sekunde, und die vom secundären Strome bedingte Ladungsdauer des Condensators beträgt

$$\text{von } \tfrac{1}{14} \text{ bis } \tfrac{1}{9} \text{ [sec].}$$

Dabei sind aber die Schwingungen der die Energie des secundären Stromes messenden Electrometernadel merkwürdig regelmässig, und die Berechnung einer Gleichgewichtslage aus Umkehrpunkten gibt eine auffallende Genauigkeit: öfters kommt es vor, dass die vier aus fünf Umkehrpunkten berechneten Gleichgewichtslagen bis auf ein Zehntel eines Scalentheiles übereinstimmen, und zwar bei grossen Schwingungsamplituden. Indessen, wie aus den weiter unten mitgetheilten Zahlen ersichtlich ist, bekommt man unter Anwendung der Wechselstrommaschine

für die D.C.-en von gut iolirenden Flüssigkeiten sehr nahe richtige Werthe. Ich kann also die Anwendung dieser Maschine als ein sehr elegantes Mittel zur Untersuchung der dielectrischen Polarisation in gut isolirenden Substanzen empfehlen.

Beinahe eben so regelmässig sind die Schwingungen der Electrometernadel bei Anwendung des Unterbrechers No. II, wenn nur die Rotationsgeschwindigkeit innerhalb der oben mitgetheilten Grenzen liegt.

Was den Unterbrecher No. I betrifft, so functionirte er überhaupt bei Weitem nicht so regelmässig wie der Unterbrecher No. II. Dieser Umstand ist selbstverständlich dem kleineren Schwunge seines Rades zuzuschreiben. Der Unterbrecher No. I wurde von mir nur im Anfange der Arbeit benutzt, später aber ganz verlassen.

IV. Zur Herstellung von verschiedenen Verbindungen zwischen dem Doppelcondensator, dem Electrometer und dem Inductorium dient mir ein Commutator aus Paraffin. Derselbe gestattet:

1) die obere und mittlere Platte des Doppelcondensators zur Erde abzuleiten (die untere Platte, wie schon erwähnt, bleibt stets mit der Erde verbunden);

2) die obere Platte mit dem isolirten Pole des Inductoriums (der andere Pol stets zur Erde abgeleitet) und gleichzeitig die mittlere Platte mit dem Electrometer in Verbindung zu setzen;

3) das Electrometer allein mit dem erwähnten freien Pole des Inductoriums zu verbinden;

4) das Electrometer mit der oberen Platte und mit dem Inductorium zu verbinden, indem die mittlere Platte isolirt bleibt (NB.: die Anordnung für diese letzte Combination wurde nur bei den Vorversuchen benutzt; da sie

sich als nicht nöthig erwiesen hat, wurde sie später beseitigt).

Alle Verbindungen sind mittelst sehr dünner Messingdrähte hergestellt; zur Unterstützung derselben sind paraffinirte Glasstäbchen und Seidenfäden benutzt.

B. Messungsverfahren.

Nennen wir die obere Zwischenschicht des Doppelcondensators — „Schicht No. 1", die untere — „Schicht No. 2".

Nehmen wir weiter die Capacität des aus der oberen und mittleren Kupferplatte bestehenden Condensators, wenn die Luft die betreffende Zwischenschicht füllt, als Einheit der Capacitäten an, dann ist die Capacität des von der mittleren und unteren Platte gebildeten Luftcondensators auch (sehr nahe: s. oben) gleich Eins. Wenn aber die Schichten No. 1 und 2 mit Flüssigkeiten von D. C.-en δ_1 resp. δ_2 erfüllt sind, so sind die Capacitäten der beiden Condensatoren gleich δ_1 resp. δ_2.

Es sei noch γ die als constant vermuthete Capacität des Electrometers in Doppelschaltung + Capacität des Paraffincommutators + Capacität gesammter Zuleitungsdrähte.

Es seien jetzt die beiden Zwischenschichten mit Flüssigkeiten (δ_1 und δ_2) gefüllt; alle Platten und Electrometer seien zunächst mit der Erde verbunden, dann aber Electrometer und mittlere Platte isolirt und miteinander verbunden, während die obere Platte bis auf das Potential $= V$ geladen wird. Dann bekommt die mittlere Platte ein kleineres Potential $= v$, welches am Electrometer gemessen wird. Wenn wir nun annehmen, dass die beiden Flüssigkeiten und alle benutzten isolirenden Stützen vollkommene Isolatoren seien, so muss offenbar die Gleichung

$$\delta_1 (V - v) = \delta_2 v + \gamma v,$$

oder

$$(V : v) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1 \qquad (3)$$

bestehen.

Natürlich kann unsere Voraussetzung in Wirklichkeit nie in ganzer Strenge erfüllt werden. Man vermuthet jedoch, dass diesem ideellen Falle um so mehr genähert wird, je kleiner die Ladungsdauer ausfällt. Darauf beruht die Anwendung von Wechselströmen zur Bestimmung der D. C.-en; die Vermuthung wird von der Erfahrung bestätigt.

Es sei die obere Platte mit dem freien Pole eines Inductoriums, in welchem elektrische Schwingungen vor sich gehen, verbunden; die mittlere Platte aber isolirt und mit einem Electrometer in Doppelschaltung verbunden.

Das Potential der oberen Platte V ist dann eine periodische Function der Zeit t mit der Periode $= \tau$; das Potential der mittleren Platte v ist ebenfalls eine periodische Function von t und zwar mit derselben Periode.

Wenn wir nun

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V^2 dt = W^2$$

und

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v^2 dt = w^2$$

setzen, so wird anstatt der Gleichung (3) die folgende bestehen:

$$(W : w) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \qquad (4)$$

Auf unvollkommene Isolatoren angewandt gilt die Gleichung (4) nur angenähert; der oben ausgesprochenen Vermuthung gemäss ist aber die Annäherung um so grösser, je kleiner τ gemacht wird.

Die Grösse w ist nun unmittelbar von dem mit der mittleren Platte verbundenen Electrometer gegeben; und zwar kann sie nach der Gleichung (2) (Abschnitt A, Artikel II) aus dem Werthe des Ausschlages α berechnet werden.

Wie aber kann die Bestimmung von W geschehen?

Das geschieht ganz einfach im Falle, wo die zwei folgenden Voraussetzungen berechtigt sind: 1) dass die „electrostatische Capacität" der secundären Rolle des Inductoriums sehr gross gegen die von uns angenommene Capacitätseinheit erscheint; 2) dass die elektrischen Schwingungen im Inductorium ganz regelmässig vor sich gehen und keine merkliche Aenderung während der zu den weiter beschriebenen Manipulationen nöthigen Zeit erfahren.

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass die beiden Voraussetzungen erfüllt seien; dann verfahren wir folgendermassen:

Nachdem der Ausschlag α bestimmt ist, trennen wir sowohl das Electrometer als auch das Inductorium von unserem Doppelcondensator ab und verbinden sie miteinander. Dann entspricht offenbar der neue Ausschlag der Nadel (nennen wir ihn A) dem Potentiale W, d. h. es besteht dann die Gleichung

$$A = a \cdot W^2.$$

In diesem Falle ist also

$$W : w = \sqrt{A} : \sqrt{\alpha},$$

und die Gleichung (4) wird zu

$$(\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}) - 1 = (\delta_2 + \gamma) : \delta_1. \qquad (5)$$

Wenn aber die erste von den oben erwähnten Voraussetzungen **nicht** berechtigt ist, so **kann** die „electrostatische Capacität" des Inductoriums experimentell bestimmt, und ihr Werth in der von uns angenommenen Einheit angegeben werden. Dann kann man, jedoch unter der An-

nahme, dass die zweite von jenen Voraussetzungen doch richtig ist, das oben beschriebene Verfahren noch anwenden; nur die Formeln werden in diesem Falle ein wenig complicirter, indem die „electrostatische Capacität" des Inductoriums in die Gleichungen eintritt. Diese complicirteren Formeln theile ich nicht mit, weil bei meinen Versuchen die erste Voraussetzung so nahe erfüllt war, dass die „electrostatische Capacität" des Inductoriums wegen ihrer Grösse gegen die oben angenommene Capacitätseinheit nicht geschätzt werden konnte. Beim Anfange der Arbeit habe ich mehrmals versucht diese Capacität zu bestimmen, indem ich folgendermassen verfuhr: ich bestimmte den Ausschlag des Electrometers bei der im Abschnitte A, Artikel IV, unter 3) bezeichneten Verbindung; dann wurde auf die unter 4) bezeichnete Verbindung commutirt und der Ausschlag von neuem bestimmt; dabei hat sich aber bei einer ziemlich grossen Anzahl derartiger Versuche kein Unterschied zwischen den Grössen der beiden Ausschläge ergeben. Deshalb betrachte ich es als berechtigt das oben mitgetheilte vereinfachte Verfahren anzuwenden und zur Berechnung der Versuchsergebnisse die Formel (5) zu benutzen. Was aber die zweite von den oben erwähnten Voraussetzungen betrifft, so konnte sie bei meinen Versuchen nur ausnahmsweise, in durchaus seltenen Fällen, nicht erfüllt sein. Die Bürgschaft dafür ist erstens die grosse Regelmässigkeit des Functionirens der Wechselstrommaschine und der beiden Unterbrecher (bei passenden Rotationsgeschwindigkeiten), welche Regelmässigkeit aus dem Verhalten der Ausschläge der Electrometernadel wohl erkennbar ist; zweitens aber auch gute Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen einzelner Beobachtungen. Und zwar ist die Regelmässigkeit am grössten bei der Wechselstrommaschine, dann beim Unterbrecher No. II; dem Unterbrecher No. I kommt in dieser Hinsicht die letzte Stelle zu.

Mein Verfahren besteht also im Folgenden:

I. Ich beginne mit der im Abschnitt A, Artikel IV unter 1) bezeichneten Verbindung, um die Möglichkeit zufälliger Elektrisirung der Platten beim Anfange des Versuches auszuschliessen;

II. dann commutire ich auf die Verbindung, welche unter 2) angedeutet ist, und bestimme den Ausschlag α;

III. schliesslich commutire ich auf die unter 3) bezeichnete Verbindung und bestimme den Ausschlag A.

Um die ganze Manipulation möglichst kurz zu machen, was von grosser Wichtigkeit ist, werden die Gleichgewichtslagen aus Schwingungen bestimmt, nämlich aus 3 oder 5 Umkehrpunkten; für die Verkürzung der Dauer des Verfahrens ist der Umstand sehr günstig, dass die Schwingungen der Nadel meines Electrometers sehr rasch sind (s. oben). Das Abwarten des Eintretens der thatsächlichen Ruhe der Nadel raubt sehr viel Zeit, da die Luftdämpfung nur gering ist (s. oben), und kann deshalb gar nicht empfohlen werden. Zur Erleichterung der Berechnung von Gleichgewichtslagen aus Umkehrpunkten habe ich eine Hilfstabelle construirt.

Die Berechnung von Versuchsergebnissen geschieht nach der Formel (5). Dass diese Berechnung, wenn sie sich auf leitende Flüssigkeiten und dabei auf langsame elektrische Schwingungen bezieht, nur ganz illusorische Werthe für die D.C.-en geben kann, das liegt auf der Hand. Aber ich habe mir, wie oben schon erwähnt ist, die Aufgabe gestellt, zu prüfen, ob nicht diese Werthe, bei Abnahme der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$, sich asymptotisch einer festen unteren Grenze nähern.

Kehren wir zur Gleichung (5) zurück. Wenn die beiden Zwischenschichten des Doppelcondensators mit Luft erfüllt sind, kommt dieser Gleichung folgende Gestalt zu:

$$\sqrt{A} : \sqrt{\alpha} = 2 + \gamma. \tag{6}$$

Wie aus (6) erhellt, geben die Versuche mit der Luft in den beiden Zwischenschichten unmittelbar den Werth der Constanten γ.

Wenn nun die Schicht No. 1 mit einer Flüssigkeit (von der D.C. $= \delta_1$) erfüllt ist, die Schicht No. 2 dagegen mit Luft, so verwandelt sich die Gleichung (5) in

$$(\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}) - 1 = (1 + \gamma) : \delta_1. \qquad (7)$$

Derartige Versuche können also zur Bestimmung der D.C. einer Flüssigkeit in Bezug auf Luft dienen, wenn der Werth von γ aus Vorversuchen bekannt ist.

Endlich können Versuche mit zwei Flüssigkeiten [Gleichung (5)] als Controlversuche dienen.

C. Ergebnisse.

Wegen grosser Wichtigkeit einer möglichst genauen Kenntniss des Werthes von γ wurde zur Ermittelung desselben eine ziemlich grosse Anzahl Versuche angestellt.

Resultate:

aus Versuchen mit

Unterbrecher No. II	Unterbrecher No. I
$\gamma = 0{,}63$ (Mittel aus 117 Vers.)	$\gamma = 0{,}65$ (aus 30 Vers.)

Wechselstrommaschine

$\gamma = 0{,}66$ (Mittel aus 98 Versuchen).

Dabei wurden fast immer die mässigen Rotationsgeschwindigkeiten der beiden Unterbrecher benutzt (welche Geschwindigkeiten, wie schon erwähnt, dem regelmässigsten Functioniren der Unterbrecher entsprechen). Trotz grosser Anzahl von Beobachtungen konnte eine Abhängigkeit der Grösse γ von der Höhe der benutzten Potentiale (von der Grösse A) nicht nachgewiesen werden. Auf eine solche Abhängigkeit deutet Herr Arons bei dem von ihm benutzten Mascart'schen Electrometer hin (Wied. Ann. Bd. 35, 1888, SS. 294—295). Uebrigens variirten bei

meinen Versuchen die Potentiale innerhalb nicht so weiter Grenzen, wie es bei Herrn Arons der Fall war.

Was die Verschiedenheit der Werthe von γ bei verschiedenen Ladungsdauern betrifft (s. die oben angeführten Zahlen), so zeigen sie eine derartige Gesetzmässigkeit (je kleiner die Ladungsdauer ist, desto kleiner fällt auch γ aus), die wohl erklärbar zu sein scheint: es muss zu der wahren Capacität des Electrometers und der Zuleitungen (d. h. derjenigen Capacität, welche einer vollkommenen Isolation entsprechen würde) noch eine scheinbare hinzukommen, welche von der oberflächlichen Leitung der Seidenfäden und Unterstützungsstäbchen herrührt; es ist aber sehr wohl denkbar, dass die von Isolationsmangel herrührenden Electricitätsverluste (also auch die scheinbare Capacität) desto grösser sind, je länger die Ladungsdauer ausfällt; bei den ziemlich grossen Unterschieden in der Ladungsdauer, wie es bei den drei erwähnten Versuchsreihen der Fall war, können vielleicht diese Unterschiede einen wahrnehmbaren Einfluss auf das Resultat ausüben.

Jedenfalls kann die Verschiedenheit der Werthe von γ bei verschiedener Ladungsdauer nur einen kleinen Einfluss auf die Werthe der D.C.-en haben, nämlich: bei Berechnung dieser Werthe wird nicht γ selbst, sondern $1 + \gamma$ benutzt [s. Gleichung (7)]. Es kann also dieser Einfluss höchstens durch

$$1{,}8\,\%$$

der Grösse einer zu bestimmenden D.C. dargestellt werden.

Doch halte ich es für nothwendig, bei der Berechnung einer D.C. immer denjenigen von den oben mitgetheilten Werthen von γ zu benutzen, welcher zur zugehörigen Unterbrechungsart gehört.

Jetzt theile ich die bei den Versuchen mit verschiedenen Flüssigkeiten bekommenen Resultate mit. Die Versuche beziehen sich auf gewöhnliche Zimmertemperatur, die etwa

zwischen 17° und 20° schwankte. Bei zähen Flüssigkeiten wurde der Durchfluss durch die dünnen Trichterröhren (bei Füllung von Zwischenschichten des Doppelcondensators) durch Ausübung eines Luftdruckes beschleunigt.

Die weiter unten mitgetheilten Werthe der Ladungsdauer $\frac{\tau}{2}$ wurden nach den Formeln (ω) und (Ω) (Abschnitt A, Art. III) berechnet; aus dem oben erörterten Grunde wird diesen Werthen keine absolute Genauigkeit zugeschrieben: es handelt sich nur um eine ungefähre Schätzung der Ladungsdauer.

A. Schlecht leitende Flüssigkeiten.

I. Benzol.

Dicht. = 0,879 bei 19° C.

Unterbrecher No. II

$$\delta = 2{,}11 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2600}\right)$$

Unterbrecher No. I

$$\delta = 2{,}17 \left(\frac{\tau}{2} \text{ von } \frac{1}{160} \text{ bis } \frac{1}{320}\right)$$

Wechselstrommaschine

$$\delta = 2{,}18 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}\right).$$

Man sieht, dass die Wechselstrommaschine einen bis auf 3,3 % richtigen Werth geliefert hat.

Die von anderen Forschern gefundenen Werthe sind: 2,198 (Silow); 2,43 (Winkelmann); 2,13 (bei 20° C.) (Negreano); 1,948 (Donle); 1,766 (Ladungsdauer = 1 Secunde) (G. Weber); 2,207 (Ladungsdauer = $\frac{1}{8{,}33}$ [Sec.]) (G. Weber); 2,17 (Tsheglājew).

II. Olivenöl (käufliches.)

Dicht. = 0,9158 bei 18° C.

Unterbrecher No. II	Wechselstrommaschine
$\delta = 2{,}81 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2700}\right)$	$\delta = 2{,}86 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}\right)$

Der Unterschied beträgt nur 1,8 %.

Die von anderen Forschern gefundenen Werthe sind: 3,08 (Arons und Rubens; 3,16 (Hopkinson).

Die bedeutenden Unterschiede sind wahrscheinlich dem Umstande zuzuschreiben, dass Olivenöl keine chemisch definirbare Substanz ist, und verschiedene Proben desselben können ziemlich bedeutende Unterschiede der Zusammensetzung darbieten.

B. Besser leitende Flüssigkeiten.

a) Aetherische Oele.

Eine grosse Anzahl dieser Oele wurde schon im Jahre 1889 für das Physikalische Instititut von der Firma Dr. H. Koenig in Leipzig bezogen. Für manche dieser Oele wurde damals die Rotations- und Refractionsdispersion von Herrn Dr. R. Steinheil untersucht (Steinheil, „Beobachtungen über Rotations- und Refractionsdispersion", Inaugural-Dissertation, München, 1889). Unter den Oelen gibt es mehrere gleichen Namens, aber verschiedener Qualität. Ueber den Unterschied in der Herstellung der verschiedenen Sorten konnte nichts erfahren werden; dass aber die Oele von Verunreinigungen durch fette Oele vollständig frei und nur aus aromatischen Bestandtheilen zusammengesetzt sind, das wurde durch eine von Herrn Steinheil angestellte Untersuchung nachgewiesen (l. c., SS. 12—13).

Im Weiteren wird die von der Fabrik angewendete Unterscheidung der Proben durch Numerirung beibehalten, (wie es auch in der Abhandlung von Steinheil geschehen ist).

Für die drei ersten von den weiter unten angeführten Oelen wurden die Werthe der D.C.-en, zur Controle, auch nach der Methode der Kraftmessung bestimmt.

Das Verfahren war das von den Herren Cohn und Arons vorgeschriebene (Wied. Ann., Bd. 33, 1888, SS. 15—19). Als Flüssigkeitselectrometer wurde das von Herrn Dr. Franke schon früher zu dem nämlichen Zwecke benutzte angewendet, (Wied. Ann., Bd. 1893, S. 163). Für dasselbe beträgt die Schwingungsdauer der „Nadel" in der Luft 18 [sec], das logarithmische Decrement (ebenfalls in der Luft) 0,0100. Der Abstand des Spiegels von der Scala war gleich 560 [cm]. Zur Erzeugung von oscillirenden Ladungen wurde das schon oben erwähnte Inductorium benutzt; die Unterbrechung des primären Stromes (2 Daniel-Elemente, Widerstand von 5 bis 15 Ohm) war vom Unterbrecher No. II bei der günstigsten (für die Regelmässigkeit des Functionirens desselben) Rotationsgeschwindigkeit besorgt; die Ladungsdauer, nach der Formel (Ω) berechnet, betrug dabei etwa $\frac{1}{2400}$ [sec].

Die Beobachtungen wurden folgendermassen angestellt: zunächst bestimmte ich 3 Umkehrpunkte der Nadel des Mascart'schen Electrometers; dann machte ich dasselbe mit dem Edelmann'schen Electrometer (Flüssigkeitselectrometer); schliesslich von neuem mit dem Mascart'schen Electrometer. Aus den beiden für die Mascart'sche Nadel berechneten Ausschlägen wurde das arithmetische Mittel genommen. Der Unterbrecher functionirte so regelmässig, dass die beiden Ausschläge sehr oft zusammenfielen. Die Umkehrpunkte wurden am Edelmann'schen Electrometer nur für die Schwingungen seiner „Nadel" in der Luft bestimmt; bei den Schwingungen dieser „Nadel" in Oelen war die Dämpfung

sehr stark, und man konnte sehr wohl das Eintreten der thatsächlichen Ruhe derselben abwarten. Die Nullpunktsverschiebungen in den Oelen waren sehr klein im Verhältnisse zu den benutzten Ausschlägen: sie machten kaum $^1/_2$ % derselben aus. Dieser Umstand ist der bedeutenden Schwere der von Herrn Franke und mir für das Edelmann'sche Electrometer benutzten „Nadel" zuzuschreiben. Die davon herrührende kleine Empfindlichkeit des Edelmann'schen Electrometers stellte aber für mich keinen Uebelstand dar, weil, wie oben erwähnt, das Mascart'sche Electrometer auch eine kleine Empfindlichkeit besass, während die vom Inductorium gelieferten Potentiale genügend hoch waren.

Das von den Herren Cohn und Arons durch $F_0 : M_0$ bezeichnete Verhältniss (l. c., S. 16) erwies sich für meine Electrometer im Mittel gleich 2,80.

Ich konnte die Kraftmessungsmethode nur für diejenigen Oele anwenden, von denen mir hinreichend grosse Mengen (zur Füllung des Flüssigkeitselectrometers) zur Verfügung standen.

Im Weiteren behalte ich das Zeichen δ zur Bezeichnung der nach der Kraftmessungsmethode bekommenen Werthe von D.C.-en bei; die nach der Capacitätsmethode bekommenen Werthe (welche, bei kleiner Ladungsdauer, natürlich, illusorisch sind) werden durch D bezeichnet.

I. Oleum Juniperi e baccis No. IV.

Dicht. = 0,8657 bei 19,5°C.

Unterbrecher No. II:		Wechselstrommaschine:
$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3860}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{1900}$	$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}$
$D = 2{,}19.$	$D = 2{,}45.$	$D = 2{,}54.$

Methode der Kraftmessung:

$$\delta = 2{,}29 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Der von der Wechselstrommaschine gelieferte Werth ist bei diesem Oele schon bedeutend zu gross.

II. Oleum Foeniculi rectif. No. IV.

Dicht. = 0,9671 bei 20°C.

Unterbrecher No. II:

$$D = 4{,}32 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2900}\right)$$

Wechselstrommaschine:

$$D = 12{,}7 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{12}\right)$$

Methode der Kraftmessung:

$$\delta = 4{,}50 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

III. Oleum Lavendulae extrafin. No. III.

Dicht. = 0,881 bei 20°C.

Unterbrecher No. II:

$$D = 3{,}52 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Methode der Kraftmessung:

$$\delta = 3{,}56 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Bei diesem Oele stimmen die nach beiden Methoden gefundenen Werthe befriedigend überein. Was die bedeutenderen Abweichungen derselben bei den ersten Oelen betrifft, so können sie vielleicht von dem Unterschiede in der Ladungsdauer herrühren? Der Sinn dieser Abweichungen steht mit dem Sinne jener Unterschiede in keinem Widerspruche. Die Möglichkeit einer derartigen Erklärung ist also nicht ausgeschlossen.

IV. Oleum Foeniculi rectif. No. III.
Dicht. = 0,9561 bei 20°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstr.-Masch.	$\frac{1}{12}$	17,7
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{860}$	5,02
— —	$\frac{1}{2400}$	4,44
— —	$\frac{1}{3800}$	4,35

(Mit diesem Oele wurde eine sehr grosse Anzahl Messungen angestellt.)

Eine asymptotische Annäherung der Werthe von D zu einer festen unteren Grenze tritt hier sehr deutlich hervor.

Wenn wir es ferner als berechtigt betrachten, in den oben mitgetheilten kleinsten Werthen von D etwa den wahren D. C.-en nahe kommende Grössen zu vermuthen (die Controle durch die Kraftmessungsmethode scheint hiezu zu berechtigen), dann können wir constatiren, dass bei den beiden oben angeführten Proben des „Oleum Foeniculi“ die D. C.-en nahezu gleich sind. Nur für die grösste Ladungsdauer ist der Unterschied der Werthe von D sehr bedeutend, was auf eine merkliche Verschiedenheit des elektrischen Leitungsvermögens der beiden Proben hinzudeuten scheint. Wenn nun aber die wahren D. C.-en der beiden Proben wirklich nahezu einander gleich sind, dann gewährt die oben ausgesprochene Vermuthung über die Ursache einer bedeutenderen Abweichung zwischen den nach Capacitäts- bezw. Kraftmessungsmethode für die D. C. des „Oleum Foeniculi No. IV“ gelieferten Werthen eine Bestätigung: in der That haben wir bei dem „Oleum Foeniculi No. III“ einen Werth von D, welcher genau derselben Ladungsdauer entspricht,

wie der Werth von δ beim „Oleum Foeniculi No. IV“; die Zusammenstellung der beiden Werthe zeigt aber, dass zwischen ihnen nur ein 1.3 %-grosser Unterschied besteht:

Ol. Foenic. r. No. IV:	Ol. Foenic. r. No. III:
$\delta = 4{,}50 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right)$	$D = 4{,}44 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right)$

V. Oleum Juniperi e ligno No. I.
Dicht. = 0,985 bei 19°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{10}$	29,1
— —	$\frac{1}{11{,}6}$	26,3
— —	$\frac{1}{12}$	20,7
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{440}$	15,9
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3600}$	5,26

VI. Oleum Juniperi e ligno No. II.
Dicht. = 0,939 bei 19°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{9{,}6}$	20
— —	$\frac{1}{12}$	9,8
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{380}$	7,23
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3840}$	3,55

VII. Oleum Juniperi e ligno No. III.

Dicht. = 0,909 bei 19°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{12,3}$	12,6
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{300}$	4,29
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3120}$	2,98

VIII. Oleum Juniperi e ligno No. IV.

Dicht. = 0,973 bei 18,5°C.

Unterbrecher:	$\frac{\tau}{2}$	D
Wechselstrommasch.	$\frac{1}{12,4}$	31,3
Unterbrecher No. I	$\frac{1}{360}$	18,3
Unterbrecher No. II	$\frac{1}{3360}$	4,82

Für alle 4 angeführten Proben des Wachholderöls aus Holz ist die Drehung der Polarisationsebene von Herrn R. Steinheil gemessen worden.

Ich lasse eine Zusammenstellung der Werthe der D. C.-en dieser Oele mit den Grössen der ihnen zukommenden Drehungen folgen.

Nummern der Proben des Wachholderöls aus Holz	D C.	Drehung	Dichtigkeit bei 19° C.	Zähigkeit.
No. I . . .	5,26	klein: 1,2° für das ganze Spectrum	0,985	Am grössten.
No. II . .	3,55	35,29° für die Fraunhofer'sche Linie *B*	0,939	zwischen den den Nummern III und IV zukommenden.
No. III . .	2,98	43,09° für die *B* Linie	0,909	am kleinsten.
No. IV . .	4,82	19,09° für die *B* Linie	0,973	zwischen den den Nummern I und II zukommenden.

Die Grössen der Drehung (alle Proben links drehend) beziehen sich auf die 20 [cm] lange Flüssigkeitsäule.

Die Zähigkeiten wurden nur qualitativ nach den Durchflusszeiten durch ein und dasselbe Rohr geschätzt.

Es lassen sich folgende Gesetzmässigkeiten für diese 4 Oele gleichen Namens, aber verschiedener Qualität, constatiren: je grösser die D. C. ist, desto grösser sind auch Dichtigkeit und Zähigkeit, desto kleiner aber fällt die Drehung aus. Bei den Proben No. II und No. III besteht sogar umgekehrte Proportionalität zwischen der D. C. und der Drehung für die *B*-Linie:

$$43{,}09 : 35{,}29 = 1{,}221, \text{ während } 3{,}55 : 2{,}98 = 1{,}219.$$

Ich habe noch für manche andere ätherische Oele Versuche angestellt. Die Ergebnisse sind aber noch nicht ausgerechnet worden.

b) Alkohol.

I. Eine der beiden untersuchten Proben wurde unter dem Titel „absoluter Alkohol" bezogen. Jedoch hat die Dichtigkeitsbestimmung für diese Probe ergeben: Dicht. =

0,797 bei 15°C. Hieraus ergibt sich nach der „Alkoholometrischen Tabelle“ die Stärke des Alkohols gleich etwa 99 %.

Ich theile die Werthe von A und α (s. oben), welche bei einer von zwei mit dieser Probe angestellten Versuchsreihen bekommen wurden, mit:

Unterbrecher No. II.

Capacitätsmethode:

$$\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3240} \text{ [sec]}$$

A	α	$\sqrt{A}:\sqrt{\alpha}$
257,5	219,8	1,082
265,9	232,6	1,069
256,2	224,1	1,069
271,9	232,9	1,080
293,9	267,5	1,048
291,2	255,4	1,068
286,8	249,1	1,073
343,5	292	1,084
281,1	253,3	1,053
278	245,8	1,063
304	264,9	1,071

Mittel (aus 11 Beobachtungen): $\sqrt{A}:\sqrt{\alpha} = 1,069$

Die zweite Reihe (nach einer neuen Füllung der Schicht No. 1) hat ergeben: $\sqrt{A}:\sqrt{\alpha} = 1,071$ (aus 10 B).

Hauptmittel: $\sqrt{A}:\sqrt{\alpha} = 1,070$.

Die Formel (7) (Abschnitt B) ergibt also für diese Probe:

$$D = \frac{163}{7} = 23,3 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3240}\right).$$

Die von anderen Forschern gefundenen Werthe sind: $\delta = 26,5$ (98 %) (Cohn und Arons); $\delta = 25,8$ („absolut“, bei 14°C.) (Tereschin); $\delta = 22,29$ (Dicht. = 0,811 bei 15°C.) (Donle).

II. Die andere Probe wurde unter dem Titel „96°/₀iger Alkohol" bezogen. Lange in grosser Vorrathsflasche des Instituts gestanden. Unmittelbar vor den Versuchen wurde Dichtigkeitsbestimmung ausgeführt. Aus dem Werthe der Dichtigkeit konnte geschlossen werden, dass zu den Versuchen nur etwa 93°/o starker Alkohol benutzt wurde.

Unterbrecher No. II.

Capacitätsmethode:

$$D = 67{,}9 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{1400}\right); \qquad D = 34{,}7 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{3600}\right)$$

Kraftmessungsmethode:

$$\delta = 32{,}4 \left(\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right).$$

Bei einem so wasserreichen Alkohole gibt also der Unterbrecher No. II unter Anwendung der Capacitätsmethode noch zu grosse Werthe. Da aber mein Unterbrecher No. II natürlich kein letztes Wort der Technik darstellt, so wage ich zu vermuthen, dass mit einem noch bedeutend grösseren und (das ist die Hauptsache) noch mehrere Unterbrechungen bei einer Umdrehung gestattenden Unterbrecher vielleicht sogar die D. C. des Wassers nach der Capacitätsmethode richtig bestimmt werden kann.

Wie schon erwähnt, gibt der Unterbrecher No. II die besten Resultate, wenn seine Rotationsgeschwindigkeit in den Grenzen liegt, welche 10 und 16 Umdrehungen in einer Secunde entsprechen. Bei grösseren Geschwindigkeiten werden nicht nur die Electrometernadelausschläge bedeutend unregelmässiger, sondern es wird auch eine sehr deutliche Zunahme der Werthe von D wahrgenommen. Bei manchen gut leitenden Flüssigkeiten habe ich sogar bei 41 Umdrehungen in einer Secunde Werthe von D gefunden, welche etwa doppelt so gross sind, wie diejenigen, welche den günstigsten Rotationsgeschwindigkeiten entsprechen. Das deutet

offenbar auf ein bei grossen Geschwindigkeiten stattfindendes Ueberspringen der Bürste hin. Die erwähnten Grenzen, innerhalb deren die günstigsten Geschwindigkeiten liegen, wurden aus sehr vielen Versuchen bestimmt.

Es mögen noch die Resultate einiger Controle-Versuche (mit zwei Flüssigkeiten) mitgetheilt werden.

I. Die Schicht No. 1 ist mit Olivenöl, die Schicht No. 2 mit Benzol gefüllt. Es ist also $\delta_1 = 2{,}81$ und $\delta_2 = 2{,}11$ (s. oben), und der nach der Formel (5) berechnete Werth von $\sqrt{A} : \sqrt{\alpha}$ ist

$$1{,}975;$$

der beobachtete Werth aber desselben Verhältnisses betrug

$$1{,}980.$$

(Unterbrecher No. II, $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2600}$; bei Berechnung ist deshalb $\gamma = 0{,}63$ angenommen).

II. Umgekehrte Füllung. Unterbr. No. II, $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2600}$. Es ist also $\delta_1 = 2{,}11$ und $\delta_2 = 2{,}81$; $\gamma = 0{,}63$.

$\sqrt{A}:\sqrt{\alpha}$ (berechnet) $= 2{,}630$; $\sqrt{A}:\sqrt{\alpha}$ (beobachtet) $= 2{,}659$.

III. Die Schicht No. 1 enthält — „Oleum Lavendulae extraf. No. III"; die Schicht No. 2 — „Oleum Foeniculi rect. No. III". Unterbrecher No. II, $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}$. Es ist:

$$D_1 = 3{,}52 \left(\text{bei } \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right) \text{ und } D_2 = 4{,}44 \left(\text{bei } \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2400}\right);$$

$$\gamma = 0{,}63.$$

$\sqrt{A}:\sqrt{\alpha}$ (berechnet) $= 2{,}44$; $\sqrt{A}:\sqrt{\alpha}$ (beobachtet) $= 2{,}48$.

Um noch raschere, als die vom Unterbrecher No. II gelieferten, elektrische Schwingungen zu haben, habe ich versucht, die bei Entladungen von Leydener Flaschen entstehenden Oscillationen bei meiner Methode anzuwenden. Leider aber ging es nicht: aus den grossen Werthen, welche dabei für die D.C.-en ätherischer Oele bekommen wurden, liess sich mit Sicherheit erkennen, dass für die Ladung des Doppelcondensators nicht die Entladungsoscillationen, sondern nur die eigenen elektrischen Schwingungen eines die Ladung der benutzten Leydener Flasche besorgenden Inductoriums maassgebend waren (es wurde nicht das oben erwähnte, sondern ein anderes Inductorium dazu benutzt; der primäre Strom wurde dabei auf übliche Weise automatisch unterbrochen).

Referat über eine Arbeit:

Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale.

Von Hermann Brunn.

(Eingelaufen 8. März.)

Der Verfasser hat in seiner Doctordissertation, betitelt: „Ovale und Eiflächen" jene einfachen geometrischen Gestaltungen in der Ebene und im Raume behandelt, welche überall convex nach aussen begrenzt sind. In jener Arbeit kam es ihm darauf an, zu zeigen, dass sich auch über derartige geometrische Gebilde von ungemein wenig specialisirtem Bildungsgesetz eine Menge nicht ganz auf der Hand liegender Sätze aussagen lässt. Die Grundlagen für seine Entwicklungen entnahm er der Anschauung, und verzichtete bei den auf Seite 1—3 der Dissertation gegebenen Sätzen, auf welchen die folgenden sich aufbauen, in eine ausführliche Beweisführung einzutreten. Es geschah dies indess nicht, weil er die genannten Sätze eines Beweises nicht für fähig oder für bedürftig erachtet hätte.

Gerade auf eine exacte Festlegung dieser Grundlagen für die Theorie der Eigebilde nun bezieht sich die gegenwärtige Arbeit. Dass das Thema nicht so einfach ist, als uns der Augenschein verleiten möchte anzunehmen, dürfte schon der Umstand beweisen, dass es dem Verfasser nicht

gelang, seine Aufgabe auf weniger als etwa fünf Druckbogen zu erledigen.

Die Anregung, auf diesen Gegenstand zurückzukommen, dessen Bearbeitung dem Verfasser lange Zeit als eine undankbare erschien, schöpfte derselbe aus der Kenntnissnahme von gleichgerichteten Bestrebungen des Herrn Prof. Minkowski in Bonn (künftig Königsberg). Minkowski hat bei Teubner[1]) die Voranzeige eines im Drucke befindlichen Werkes betitelt „Geometrie der Zahlen" erscheinen lassen, in welchem eine unvermuthete und fruchtbare Verbindung zwischen der Zahlentheorie und der Geometrie der nirgends concav begrenzten Gebilde hergestellt werden und desswegen auch die Theorie der letzteren ausführlicher in analytischem Gewande behandelt werden soll. Es kommt somit den Eigebilden auch von anderem als rein geometrischem Standpunkt eine gewisse Wichtigkeit zu, und dies hat den Verfasser ermuntert, seine Doctorarbeit in der oben angedeuteten Weise zu ergänzen. Die vorliegende Arbeit wird vermuthlich mit gewissen Capiteln des Minkowskischen Buches in der Materie die grösste Verwandtschaft haben, doch steht zu hoffen, dass bei der grossen Verschiedenheit der Behandlungsmethoden (analytisch und rein geometrisch), sowie des Ausgangspunktes und des Zieles der Forschungen sich doch auch viele wesentliche und instruktive Abweichungen im Ausbau ergeben werden.

Die Untersuchung beschränkt sich auf die ebenen Ovalgebilde, auf deren Theorie sich diejenige der Eigebilde im Raume naturgemäss zu stützen hat.

Die Arbeit beginnt mit einem Abschnitt, der mit dem Namen „Seitenrechnung" betitelt ist. Es stellte sich näm-

1) Im Juni 1893 in den Anzeigen. Vgl. auch Bulletin des Sc. math. 2. série t. XVII janv. 1893: Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite, par M. H. Minkowski.

lich heraus, dass bei Besprechung der Eigenschaften der Ovale die Hälften, in welche eine Ebene durch eine Gerade, eine Gerade durch einen Punkt zerlegt wird, eine fast bedeutendere Rolle spielen, als die vollständigen Gebilde, dass es fortwährend galt, zwei „Seiten" zu unterscheiden. Um den auf Seiten bezüglichen Schlüssen eine handliche Form und Präcision zu geben, wurden ein Symbol S für „Seite" und symbolische Gleichungen der Form

$$Sa = Sb;\ c;\ d$$
$$Sa = -Sb;\ c;\ d$$

eingeführt. Die Bedeutung der ersten Gleichung ist, dass innerhalb einer getrennten Mannigfaltigkeit d die Elemente a, b auf der nämlichen, die der zweiten, dass sie auf verschiedenen Seiten der trennenden Mannigfaltigkeit c liegen. Es wurden die Bedingungen für die Anwendung der Seitenrechnung auf Gerade und Ebene untersucht, d. h. es wurde untersucht, welcher Theil der Axiome für die Ebenengeometrie bei der Seitenrechnung vorauszusetzen ist, resp. welche Fassung diese Axiome erhalten, wenn man den Seitenbegriff in den Vordergrund drängt.

Sodann war die Definition und Nomenclatur einer Anzahl unerlässlicher Grundbegriffe wieder mit steter Rücksicht auf den Seitenbegriff zu geben.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen wurde das eigentliche Thema mit der, wie der Verfasser glaubt, einfachsten Definition eines Ovals eröffnet, welche sich nicht auf das Oval als Curve, sondern als Flächenstück bezieht und aussagt, dass eine Gerade der Ebene des Ovals mit dem Oval höchstens e i n Stück gemein hat. „E i n Stück", das soll heissen: e i n e n Punkt, oder e i n e durch zwei Endpunkte begrenzte gerade Strecke. Die Möglichkeit von „Figuren" dieser Eigenschaft liegt auf der Hand, es wurde speciell von der Dreiecksfläche bewiesen, dass sie dazu gehört. Im übrigen wurde über die Figuren, welche der Definition genügen,

keine weitere Voraussetzung gemacht, auch nicht ein Mal die, dass es sich um zusammenhängende Ebenenstücke mit Rand und Inhalt etc. handle, wie es in gegenwärtiger kurzer Darstellung nach obiger Erwähnung des Wortes „Flächenstück" scheinen könnte. Im Gegentheil sucht die Arbeit ihr Verdienst eben darin, rein aus den Axiomen und der Definition alles andere abzuleiten und nicht zu postuliren.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass das, was Ovalen gemeinsam ist, wieder ein Oval sein muss. Es wird gezeigt, wie der Satz umzukehren ist, und ein Satz über „Ovaldifferenzen" angeschlossen. Gerade Strecken zwischen Ovalpunkten gehören vollständig zum Oval; es sind dabei je nach der Art der Endpunkte verschiedene Fälle zu behandeln (innere Punkte, Randpunkte). Es werden dann die Ovale in Beziehung gesetzt zu Strahlenbüscheln, deren Centrum innerhalb, auf dem Rande, oder ausserhalb des Ovals liegt. Es wird mittels innerer Büschel auf eine erste Art und Weise die Reihenfolge der Randpunkte des Ovals definirt. Die mit Figurpunkten belegten Geraden aus einem äussern oder Randpunkt füllen einen und nur einen von zwei „angelehnten" Geraden begrenzten Winkel. Die beiden von jedem Randpunkt ausgehenden Strahlen = Halbgeraden jener angelehnten Geraden, in deren Strahlwinkel die ganze Figur eingeschlossen liegt, werden Grenzstrahlen genannt, ihre Existenz und Bestimmtheit exact bewiesen.

Eine längere Reihe von Paragraphen beschäftigt sich sodann mit dem Nachweise, dass die Gesammtheit der Ovalrandpunkte die Natur eines stetigen geschlossenen Curvenzuges hat, eine Ovallinie bildet. Gerade hier ist Sorgfalt nöthig, um Sätze, die man mit grosser Bereitwilligkeit unbewiesen anzunehmen geneigt ist, strenge zu begründen. Es gibt für jeden Ovalrandpunkt Nachbarrandpunkte, welche ihm beliebig nahe liegen. Bei dieser Gelegenheit wird der Begriff des „Näherungsbogens" für einen Curvenpunkt a ein-

geführt. Ein Näherungsbogen *a b* für *a* muss die Eigenschaft haben, dass wenn *c* ein beliebiger Punkt desselben ist, alle zwischen *a* und *c* liegenden Bogenpunkte näher an *a* liegen als *c*. Um über das Zwischenliegen entscheiden zu können, muss man natürlich durch ein anderes Mittel, als die Entfernung ist, bereits über die „Reihenfolge" der Punkte eine Entscheidung getroffen, wie Kronecker sagt, „ein Fortgangsprincip" aufgestellt haben. Ein solches hat sich für die Ovalrandpunkte oben mittels innerer Strahlbüschel auch bereits ergeben. Es wird gezeigt, dass der ganze Ovalrand sich in eine endliche Anzahl aneinanderschliessender Näherungsbögen zerlegen und somit seine Punkte mittels des Fortgangsprincips der Entfernung sich in Reihenfolge setzen lassen, eine Reihenfolge, welche mit der vorher gewonnenen übereinstimmt. Schwierigkeit für die bei diesem Satz zunächst sich darbietende Beweismethode bot das mögliche Vorkommen gewisser Stellen, die als „Ecken $\geqq \frac{\pi}{2}$" bezeichnet werden, übrigens an einem Oval höchstens viermal auftreten können. Die Schwierigkeit wurde schliesslich mittels eines Satzes überwunden, welcher die Bedingung angibt, unter der ein Curvenbogen Näherungsbogen für seine beiden Endpunkte ist. Es werde gleich hier erwähnt, dass später mittels eines dritten Fortgangsprincipes — nämlich mittels einer parallel verschobenen Geraden — abermals die nämliche Reihenfolge der Ovalrandpunkte, zunächst auf einem Theilbogen erzielt wird.

Die Haupteigenschaft der nun als stetige, geschlossene Curven erkannten Ovalränder besteht darin, dass sie mit Geraden ihrer Ebene höchstens zwei getrennte Punkte oder höchstens eine zusammenhängende Strecke gemein haben.

Die Begriffe der angelehnten Geraden des Ovals und der Tangenten ihres Randes decken sich ihrem Umfange nach, was bei andern Arten von Figuren nicht der Fall ist. Dabei

ist unter einer angelehnten Geraden eine solche zu verstehen, welche Randpunkte des Ovals enthält und alle übrigen Ovalpunkte auf einer Seite liegen hat, und die Tangente ist als Grenzlage einer Secante zu definiren, auf der beide Schnittpunkte als beweglich und gegen einen festen Punkt der Curve hinrückend angenommen werden dürfen, während man gewöhnlich nur den einen beweglich, den andern fest denkt. Wollte man dem Begriff der Tangente diese Weite nicht geben, so würden die angelehnten Geraden in den sogenannten „Ecken“ des Ovals nicht sämmtlich auch Tangenten sein, sondern diese Charakterisirung würde nur den beiden äussersten, auf welchen die Grenzstrahlen liegen, zukommen.

Ein besonderer Theil der Arbeit befasst sich mit einer Reihe von Sätzen bezüglich auf die Schnitte von Grenzstrahlen, Tangenten und Secanten untereinander, welche sich, abgesehen von ihrem selbständigen Interesse, für das Folgende als nothwendig erweisen. Es handelt sich nicht um die Thatsache, dass die Tangenten etc. sich schneiden, sondern darum, welche Hälften derselben sich schneiden, und ist daher in diesem Theile der Arbeit die ausgedehnteste Anwendung von der Seitenrechnung zu machen. Die beiden Hälften einer Tangente werden als erste und zweite unterschieden mittels eines von fester Anfangslage ausgehenden, um einen inneren Ovalpunkt in bestimmtem Sinne σ sich drehenden Strahles, welcher die „erste“ Hälfte einer Tangente auf seinem Wege vor Erreichung des Berührpunktes, die „zweite“ nach dem Passiren desselben überstreicht. Nur für die Tangente des Ausgangspunktes dreht sich die Beziehung um. Einer der hauptsächlichsten Hilfssätze sei zur Charakterisirung hier angeführt: Sind c und d zwei Punkte auf einer der beiden Hälften eines Ovalrandes, in welche derselbe zerlegt wird durch die Berührungspunkte zweier parallelen Tangenten, und geht im Sinne σ genommen der Punkt c dem Punkt d voraus, so schneidet der zweite Grenz-

strahl aus c den ersten aus d, während sich der erste Grenzstrahl aus c und der zweite aus d, oder auch gleichbenannte Grenzstrahlen aus c und d nicht schneiden.

Man gelangt zu dem Satze, dass es für die Feststellung der Reihenfolge der Tangenten gleichgültig ist, ob man die Reihenfolge ihrer Berührungspunkte auf sie überträgt oder die Reihenfolge der Strahlen eines Büschels (mittels Parallelität) auf die „ersten“ oder „zweiten“ Hälften der Tangenten. Nur lässt das eine Fortgangsprincip unter Umständen die Reihenfolge eines Theiles der Tangenten unbestimmt und willkürlich, während das andere dieselbe eindeutig bestimmt. Die Totalkrümmung eines Ovalrandbogens ergibt sich demnach stets grösser als die eines Theiles von ihm, die Gesammtkrümmung des Randes natürlich zu 2π.

Es werden dann weiter die an einem Ovalrand möglicherweise vorkommenden Singularitäten: Ecken und gerade Stellen besprochen. Ecken sind solche Randpunkte, deren Grenzstrahlen einen Winkel $< \pi$ miteinander einschliessen. Die Grösse einer Ecke soll jedoch durch den Ergänzungswinkel dieses Winkels gemessen werden. Ecken, deren Grösse über einer endlichen Grenze bleibt, gibt es an einem Ovalrand nur in endlicher Anzahl. Dies schliesst nicht aus, dass die Anzahl der endlich grossen Ecken an einem Ovalrand über jede Zahl hinaus wächst, was nur eine geometrische Einkleidung der Thatsache ist, dass die Summe endlicher Grössen, deren Anzahl über jede Zahl hinauswächst, eine gewisse endliche Zahl nicht zu übersteigen braucht. Es gibt Ovale mit Rändern, von denen man kein noch so kleines Stück angeben kann, auf dem nicht Ecken endlicher Grösse enthalten wären. Es wird ein Beispiel eines solchen Ovales construirt, es werden die dualen Betrachtungen angedeutet, bei denen statt der Ecken gerade Strecken des Ovalrandes eintreten, und die genauere Discussion dieser nicht uninteressanten Curven einem anderen Orte vorbehalten. Das Gesagte

lässt ermessen, welche Hindernisse der allgemeinen Formulirung des Krümmungsmasses für Ovalränder in den Weg treten. Man hat bei einem allgemein definirten Oval keine Garantie dafür, dass das Krümmungsmass in einem Randpunkt nicht eine vollkommen unstetige Function der Lage des Randpunktes ist.

Wesentlich andere Singularitäten ergeben sich auf Ovalrändern als ausgeschlossen, insbesondere eigentliche Doppelpunkte, Wendepunkte, Rückkehrpunkte, Doppeltangenten. Nur jene Ausartungen eines Ovals, für welche auch sonst die gegebenen Sätze nur cum grano salis zu verstehen sind: der einzelne Punkt und die einzelne gerade Strecke, nehmen auch hier eine gewisse Ausnahmestellung ein.

Bisher ist die Ovallinie nur als Rand eines sogenannten „vollen“ Ovals, d. h. eines Flächenstückes von gewissen Eigenschaften definirt. Es ist erwünscht durch Umkehr früherer Sätze unabhängige Definitionen für die Ovalcurven zu erhalten. Bei dem hierauf gerichteten Bestreben ergeben sich Sätze wie die folgenden:

Eine im Endlichen liegende, stetige, geschlossene Curve aus einem Zug, die mit einer Geraden höchstens 2 Punkte oder höchstens eine gerade Strecke gemein hat, ist stets Berandung eines vollen Ovals.

Oder:

Eine im Endlichen liegende etc. etc. Curve, welche in jedem Punkt angelehnte Gerade aufweist, ist ein Ovalrand.

Nur für den Fall, dass man unter die obigen geschlossenen Curvenzüge auch gewisse Doppelcurven (uneigentlich geschlossene) einschliesst, muss den Sätzen eine Clausel angehängt werden.

Schliesslich werden sorgfältig ausgeführte Beweise dafür erbracht, dass jede Ovallinie eine bestimmte Länge, jedes volle Oval einen bestimmten Inhalt hat. Um die Nothwendigkeit dieser Beweise einzusehen, muss nochmals darauf

hingewiesen werden, dass wir nichts uns als gegeben betrachten wollen, als die Axiome, die Oval-Definition und das, was wir daraus abgeleitet haben, dass wir dagegen, was die Anschauung uns darbietet, mag es noch so plausibel erscheinen, nicht ungeprüft annehmen dürfen. Wir müssen diese Strenge der Auffassung innehalten, wenn wir wünschen, dass unseren geometrischen Sätzen auch ein functiontheoretischer Werth zukomme. Machen wir uns aber diese Auffassung zu eigen, so erscheint es eher wunderbar, als selbstverständlich, dass aus jener einfachen Definition des Ovals die ziemlich verwickelten Bedingungen folgen, welche das Vorhandensein einer mathematisch wohldefinirten Länge und eines wohldefinirten Inhaltes gewährleisten. Es ist die angewandte Vorsicht auch in Anbetracht der Erfahrung nöthig, dass es z. B. wirklich Curven gibt von scheinbar einfachem Verlauf, welche doch keine bestimmte Länge besitzen. Wir müssen, um beruhigt mit Ovalen operiren zu können, die absolute Sicherheit gewinnen, dass keine bisher unbemerkten die Allgemeinheit der aus der Anschauung geschöpften Sätze störenden Einzelfälle möglich sind.

Auf das Detail der Beweise kann hier nicht eingegangen werden.

Ein Satz über Eiflächen.

Im Anschluss an das Vorstehende sei es gestattet, einen Hauptsatz aus des Verfassers Doctorarbeit gegen etwaige Einwendungen sicherzustellen. Derselbe lautet (Ov. u Eifl. S. 23):

1. „In einer Eifläche findet sich unter einer Schaar von parallelen ebenen Schnitten ein und nur ein Maximum an Inhalt, das entweder durch *eine* Schnittfigur oder durch *eine* stetige Folge congruenter Schnittfiguren gebildet ist, die einen Cylindertheil bilden.

Der Beweis des ersten Theiles des Satzes lässt sich, ohne dass er im wesentlichen irgendwie geändert würde, vermittels der im vorausgehenden Referate beschriebenen Untersuchungen schärfer präcisiren. Bezüglich der letzten Behauptung des Satzes, dass ein Cylindertheil entsteht, hat mich Herr Professor Minkowski aufmerksam gemacht, dass die in meiner Doctorarbeit (III, 9, 10) gegebenen Andeutungen des Beweises in Anbetracht einer auftretenden Schwierigkeit doch gar zu dürftig sind. Es möge dem Verfasser gestattet sein, diese Lücke hier auszufüllen.

2. Satz:

Wenn eine Eifläche 𝔈 drei ebene Parallelschnitte 𝔄, 𝔅, ℭ von gleichem Inhalt 𝔍 aufweist, so sind diese Schnitte von congruenter Form, ähnlich gelegen und die Begrenzung von 𝔈 zwischen den Ebenen der beiden äussern Schnitte 𝔄, ℭ ist ein Cylindermanteltheil.

Beweis.

3. Voraus schicken wir als Hilfssatz: An einem von zwei Rechtecken gleichen Inhalts i als Deckflächen begrenzten „Obelisken" ist der Inhalt m eines parallel zu den Deckflächen geführten ebenen Schnittes A grösser als i, gleich nur dann, wenn die Deckrechtecke congruent sind, s. Ov. u. Eifl. S. 23. Es folgt aus den dort gegebenen Formeln

$$m - i = \lambda\lambda' \frac{(b' - b)^2}{b'} . a; (\lambda + \lambda' = 1) \ (0 < \lambda < 1)$$

a und a' sind die Längen der Seiten des einen Deck-Rechtecks, b und b' die Längen der resp. parallelen Seiten des andern.

4. Den Eiflächenschnitt 𝔄 zerlegen wir nun durch parallele Gerade $A_0, A_1, A_2 \ldots A_n$ der Richtung ϱ in Streifen, ebenso 𝔅 durch die Geraden $B_0, B_1 \ldots B_n$, ℭ durch C_0,

$C_1 \ldots C_n$; alle diese Geraden seien ebenfalls von der Richtung ϱ. A_0, B_0, C_0 speciell seien die Tangenten (angelehnten Geraden) der Richtung ϱ der Schnittovale auf der linken, A_n, B_n, C_n die desgleichen auf der rechten Seite, und die Geraden sollen von links nach rechts nach Angabe ihrer Indices aufeinander folgen. Der Inhalt eines Ovalstreifens zwischen zwei aufeinander folgenden Parallelgeraden werde durch die in runde Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausgedrückt und es sei die Eintheilung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ so getroffen, dass

$$(A_\nu A_{\nu+1}) = (C_\nu C_{\nu+1}) \qquad \nu = 0, 1 \ldots n-1$$

B_ν sei die durch die Verbindungsebene von A_ν und C_ν in der Ebene von $\mathfrak{B}$ ausgeschnittene Gerade. Wir nennen die Streifen $(A_\nu A_{\nu+1})$, $(B_\nu B_{\nu+1})$, $(C_\nu C_{\nu+1})$ entsprechende. Im folgenden werden an Stelle der Streifen Rechtecke treten zwischen den nämlichen Parallelgeraden, welche wir durch die in eckige Klammer gesetzten Buchstaben der Geraden ausdrücken. Die auf den Geraden A, B, C liegenden Seiten dieser Rechtecke nennen wir die „Langseiten"; die andern, die „Schmalseiten" gehen von den Endpunkten der Ovalsehnen auf A_ν, B_ν, C_ν aus nach rechts. Beim Beweis vom Inhalt der Ovale ist vom Verfasser gezeigt, dass bei genügend enger Annahme der Geraden A die Summe der Rechtecke einer festen Grösse, dem Inhalte $\mathfrak{J}$, beliebig nahe kommt. Es fragt sich nun, ob sich die Theilung von $\mathfrak{A}$ so annehmen lässt, dass auch die davon abhängigen Theilungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ unseren Wünschen entsprechend eng genug werden, d. h. dass zu gleicher Zeit

$$\mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [A_\nu A_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon; \mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [C_\nu C_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon$$

$$\mathfrak{J} - \varepsilon < \sum_0^{n-1} [B_\nu B_{\nu+1}] < \mathfrak{J} + \varepsilon$$

wird. In der That ist dies möglich und lässt sich beweisen auf Grund folgender Thatsachen:

a) Wenn 𝔄 kein entartetes Oval ist, so sind auch 𝔅 und ℭ eigentliche Ovale und es hat in ihnen jede von einer Tangente wenn auch noch so wenig entfernte parallele Sehne endliche Länge.

b) Bei genügender Annäherung einer parallelen Sehne an eine Tangente wird der zwischen beiden enthaltene Ovalstreifen beliebig klein seinem Inhalte nach.

c) Es ist möglich, durch genügende Annäherung von A_1 und A_0 die Entfernungen von A_0 und A_1, C_0 und C_1 zu gleicher Zeit unter eine beliebig kleine Grösse herabzudrücken, zugleich auch die Entfernung von B_0 und B_1, weil sie linear von jenen abhängt. Analoges gilt von $A_{n-1}\,A_n$, $C_{n-1}\,C_n$, $B_{n-1}\,B_n$.

d) Die Breite eines Rechtecks mit noch so kurzer, constanter Langseite, das einem gegebenen flächengleich ist, wird beliebig klein, wenn nur das gegebene Rechteck genügend klein an Inhalt ist. (In Anwendung zu bringen für die mittleren Seiten.)

5. Wir beweisen weiterhin: Die Sehnen auf A_ν und C_ν sind längengleich.

Denn nehmen wir ein Mal an:

$$A_\mu - C_\mu = d_\mu; \qquad d_\mu > 0.^{1)}$$

a_μ, c_μ seien die obern, α_μ, γ_μ die untern Endpunkte der resp. Sehnen A_μ, C_μ, und sei $0 < \mu < n$. Irgend ein rechts (oder links) von A_μ in endlicher Entfernung innerhalb 𝔄 gelegener Punkt heisse p, die von c_μ und γ_μ nach rechts (oder links) ziehenden Grenzstrahlen seien C'_μ und Γ'_μ. Man lege Ebene ℭ auf Ebene 𝔄, Gerade C_μ auf Gerade A_μ und zwar so, dass die Strecke $c_\mu\,\gamma_\mu$ ganz innerhalb der Strecke $a_\mu\,\alpha_\mu$ liegt,

---

1) A_μ, C_μ bezeichnen jetzt kurz die Sehnenlängen.

γ_μ zwischen c_μ und α_μ, so dass $\overline{a_\mu c_\mu}$, $\overline{\alpha_\mu \gamma_\mu}$ von Null verschieden sind. Dann müssen auch $\overline{c_\mu s}$ und $\overline{\gamma_\mu \sigma}$ endlich sein, wo s, σ die resp. zweiten Schnittpunkte von C'_μ, Γ'_μ mit dem Rande des Dreiecks $a_\mu p \alpha_\mu$ sind, welches sich innerhalb $\mathfrak{A}$ befindet. Es sei die Gerade $G \parallel C_\mu$ und

$$Ss = S\sigma = - SC_\mu;\ G,$$

dann liegen ersichtlich alle zwischen C_μ und G parallel zu C_μ gezogenen $\mathfrak{C}$-Sehnen innerhalb $\mathfrak{A}$, sind also kleiner wie die entsprechenden $\mathfrak{A}$-Sehnen und zwar wird der Unterschied entsprechender Sehnen in diesem Intervall über einer von den übrigen Daten der Figur abhängigen angebbaren endlichen Grenze Δ bleiben. Es ist erlaubt, die Theilung so eng anzunehmen, dass sowohl $A_{\mu+1}$, als $C_{\mu+1}$ in das Intervall $C_\mu G$ fallen.

Wir verdichten die Theilung der Streifen $(A_\mu A_{\mu+1})$ und $(C_\mu C_{\mu+1})$ durch Einschiebung der Geraden

$A_{\mu,1},\ A_{\mu,2}\ \dots\ A_{\mu,q}$
$C_{\mu,1},\ C_{\mu,2}\ \dots\ C_{\mu,q}$ u. der „entsprechenden“ [1])
$B_{\mu,1},\ B_{\mu,2}\ \dots\ B_{\mu,q}$ in $\mathfrak{B}$ und setzen

$$A_{\mu,0} \equiv A_\mu;\ A_{\mu,q+1} = A_{\mu+1};\ C_{\mu,0} \equiv C_\mu \text{ etc.}$$

Die Entfernung von $A_{\mu,\varkappa}$ und $A_{\mu,\varkappa+1}$ kürzen wir durch $e_{\mu,\varkappa}$, welches somit die Länge einer Rechteckschmalseite ist. Nun ist

$$D_{\mu x} \equiv [B_{\mu,x},\ B_{\mu,x+1}] - [A_{\mu,x},\ A_{\mu,x+1}]$$
$$= \lambda\lambda' \frac{(A_{\mu,x} - C_{\mu,x})^2}{C_{\mu x}} \cdot e_{\mu,x}$$

nach 3. Bedenkt man, dass $A_{\mu,x} - C_{\mu,x} > \Delta$, und setzt den grössten Werth unter den $C_{\mu,x}$ gleich C, so kommt:

$$D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} \cdot e_{\mu,x} \text{ und } \sum_{x=0}^{x=q} D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} \sum_{x=0}^{x=q} e_{\mu,x}$$

1) Die unter 4. festgesetzte Art der Abhängigkeit zwischen den Geraden, welche mittels der Buchstaben A, C, B bezeichnet werden, soll auch für die neuen Geraden gelten.

oder $$\sum D_{\mu,x} > \lambda\lambda' \frac{\Delta^2}{C} . e = K$$

wenn e die Entfernung von A_μ und $A_{\mu+1}$ bedeutet. Die rechts stehende Grösse K in der Ungleichung ist nun ganz unabhängig von dem Grad der Enge der Theilung zwischen A_μ und $A_{\mu+1}$.

Da weiter, nach dem Hilfsatz, die übrigen ausserhalb des bisher betrachteten Intervalls $(\mu, \mu + 1)$ gelegenen Rechtecke $[B_\nu B_{\nu+1}]$ niemals kleiner sind als die entsprechenden $[A_\nu A_{\nu+1}]$, so gilt für jede noch so weit getriebene Theilung, sobald die $A_{\mu x}$ schon vorliegen, und die Geraden wieder durchlaufend mit einem Index bezeichnet werden:

$$\Sigma \{A_\nu A_{\nu+1}] + K < \Sigma [B_\nu B_{\nu+1}]$$

im Widerspruch zu der aus 4. folgenden Ungleichung:

$$\Sigma [B_\nu B_{\nu+1}] - \Sigma [A_\nu A_{\nu+1}] < 2\varepsilon$$

welche für beliebig klein gegebenes ε (also auch für $2\varepsilon < K$) gelten soll bei genügend enger Theilung.

Auf solchen Widerspruch führt uns die Annahme, A_μ und C_μ seien verschieden, also muss

$$A_\mu = C_\mu$$

sein. q. e. d.

Eine Ergänzung bedarf der Beweis für den Fall, dass μ gleich 0 oder n gesetzt wird. Dann und nur dann können C'_μ und Γ'_μ in die Richtung von C_μ selbst fallen. In diesem Falle bestimme man auf dem Ovalrande, doch nicht auf $\overline{c_\mu \gamma_\mu}$, zwei Punkte c', γ' innerhalb von Kreisen, die mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ um c_μ, γ_μ resp. geschlagen sind. ε sei jedenfalls kleiner als die endlichen Sehnen der von c_μ, γ_μ ausgehenden Näherungsbögen. Dann lege man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ wie oben aufeinander und mache ε auch noch kleiner als die endlichen Entfernungen der Punkte c_μ, γ_μ von den Geraden $a_\mu p$, $\alpha_\mu p$ resp, wobei p wieder einen inneren Punkt von $\mathfrak{A}$ bedeutet.

$C_1 \parallel C_0$ werde so nahe an C_0 gerückt, dass beide kleinen Kreise um c_0, γ_0 geschnitten werden (resp. C_{n-1} so nahe an C_n etc.). Dann enden die Sehnen C_0 und C_1, sowie alle dazwischen liegenden parallelen Sehnen von $\mathfrak{C}$ innerhalb der Kreise und sind kleiner als die entsprechenden Sehnen von $\mathfrak{A}$ (Analoges gilt bei C_n, C_{n-1}) um eine Differenz, welche über einer angebbaren endlichen Grösse bleibt. Von hier aus vollzieht sich der Beweis genau wie vorher.

Unser bisheriges Resultat können wir so formen:

Schneiden die parallelen Sehnen A_μ, C_μ von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ resp. Stücke gleichen Inhalts ab, welche auf *einer* Seite der Ebene $A_\mu C_\mu$ liegen, so ist ihre Länge gleich.

Hieraus folgt weiter:

6. Die Entfernung von A_0 und A_μ ist gleich der von C_0 und C_μ.

Man findet nämlich, dass bei genügend enger Theilung die Inhalte und damit die Schmalseiten zweier entsprechenden Rechtecke sich nur noch um einen beliebig kleinen Bruchtheil ihrer Grösse unterscheiden. Daher wird sich auch die Summe der Schmalseiten der Rechtecke zwischen A_0 und A_μ von der entsprechenden Summe zwischen C_0 und C_μ bei genügend enger Theilung beliebig wenig unterscheiden, d. h. die beiden Summen müssen dann, weil constante Grössen, gleich sein.

7. Aus dem bisher Bewiesenen ergibt sich zwar noch nicht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, aber doch so viel, dass $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{A}$ durch eine Transformation hervorgeht, bei welcher die Sehnen der Richtung ϱ von $\mathfrak{C}$ in ihren Geraden ohne Aenderung der Länge verschoben werden. Die völlige Willkürlichkeit der Richtung ϱ zieht die Congruenz von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ indess nothwendig nach sich, wie wir sehen werden.

8. Die Entsprechung zwischen den Sehnen A_μ, C_μ zieht eine Entsprechung der Endpunkte a_μ, c_μ einer-, α_μ, γ_μ andrer-

seits nach sich. Bedenkt man noch, dass $\overline{a_0 \alpha_0}$ und $\overline{c_0 \gamma_0}$, $\overline{a_n \alpha_n}$ und $\overline{c_n \gamma_n}$ congruent sind, so erkennt man, wie die Ränder von 𝔄 und ℭ für jede Richtung ϱ der 𝔄 und ℭ Punkt für Punkt aufeinander in bestimmter Weise beziehbar sind. Die geraden Strecken zwischen entsprechenden Randpunkten von 𝔄 und ℭ bilden ein Stück 𝔐 einer Regelfläche, welches ganz innerhalb oder höchstens auf der Fläche 𝔈 selbst liegt; es liegt also auch die Schnittfigur 𝔖 der Ebene von 𝔅 mit 𝔐 völlig innerhalb 𝔅 oder reicht wenigstens nicht über dessen Rand hinaus.

Somit ist Inhalt von 𝔖 kleiner höchstens gleich 𝔍, letzteres nur, wenn 𝔖 und 𝔅 identisch sind. Zugleich ist aber nach 1. Inhalt von 𝔖 grösser höchstens gleich 𝔍.[1]) Inhalt 𝔖 kann daher nur gleich 𝔍, und 𝔖 muss mit 𝔅 identisch sein. Auf jeder erzeugenden Strecke von 𝔐 liegt daher ausser einem Punkte a_μ, resp. α_μ und einem Punkte c_μ, resp. γ_μ ein dritter Punkt b_μ, resp. β_μ der Fläche 𝔈, woraus folgt, dass diese Strecken vollständig auf 𝔈 liegen, 𝔐 ein Theil von 𝔈 ist.

9. Unser Beweis wird nun vollendet:

a) Durch Verwendung der Maximalsehne bestimmter Richtung in den Ovalen;

b) Durch Benutzung der Thatsache, dass gewisse Theile der Eifläche, resp. der Ovale, welche durch Abschneiden mittels Gerader und Ebenen entstehen, die nämlichen Eigenschaften haben müssen, wie die ganzen Ovalgebilde.

10. Hilfsatz. Die Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ müssen parallel und gleichlang sein.

---

1) Denn die Annahme, dass zwischen zwei gleich grossen Parallelschnitten von 𝔈 ein kleinerer Parallelschnitt sich befinde, ist mit dem Vorhandensein nur eines Maximums unverträglich.

Aus 6. folgt:

$$\text{Entfernung } (A_0 A_n) = \text{Entfernung } (C_0 C_n)$$

$$\overline{a_0 \alpha_0} = \overline{c_0 \gamma_0}$$

$$\overline{a_n \alpha_n} = \overline{c_n \gamma_n}$$

Maximalsehne d. Richt. $(a_0 a_n)$ in $\mathfrak{A}$ = Max.-S. d. Richt. $(a_0 a_n)$ in $\mathfrak{C}$

" " " $(c_0 c_n)$ " $\mathfrak{C}$ = " " " $(c_0 c_n)$ " $\mathfrak{A}$

Weiter:

Wenn eine Folge von Maximalsehnen der Richtung $a_0 a_n$ in $\mathfrak{A}$ ein Parallelogramm bildet, so müssen die Maximalsehnen der nämlichen Richtung in $\mathfrak{C}$ ein congruentes Parallelogramm erfüllen, da hier wie dort Gerade von gleicher Länge zwischen parallelen angelehnten Geraden gleicher Entfernung eingespannt werden, also hier wie dort gleiche Neigung gegen letztere haben, und hier wie dort wegen 5. und 6. die erste von der letzten Maximalsehne den nämlichen Abstand hat. Analoges gilt bei Vertauschung der Rollen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$.

Wir dürfen ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit unserer Annahmen die Bezeichnungen so vertheilt voraussetzen, dass:

$$\overline{a_0 \alpha_0} \leqq \overline{a_n \alpha_n} \quad \text{also auch} \quad \overline{c_0 \gamma_0} \leqq \overline{c_n \gamma_n} \text{ ist.}$$

Man bringe nun durch Parallelverschiebung a_0 mit c_0, α_0 mit γ_0 und dadurch A_n mit C_n zur Deckung. Würden hierauf a_n und c_n nicht aufeinanderfallen, sondern ein Punkt „unter“ den andern — z. B. c_n unter a_n — so würde entgegen erwiesener Thatsache ein Parallelogramm von Maximalsehnen des einen Ovals im andern kein congruentes Analogon finden können — z. B. das Parallelogramm mit den Ecken α_0, a_0, α_n kein Analogon in $\mathfrak{C}$ — folglich müssen nach der Parallelverschiebung auch a_n und c_n sich decken. Also ist $\overline{a_0 a_n} = \overline{c_0 c_n}$. Der Beweis ist auch für den Fall gültig, dass in

den Ovalen nur eine einzige Maximalsehne der betrachteten Richtung existirt. Analoges wie für a_0, a_n, c_0, c_n gilt für α_0, α_n, γ_0, γ_n.

Zurück zum Beweise des Hauptsatzes! (s. Fig. 1 und 2)

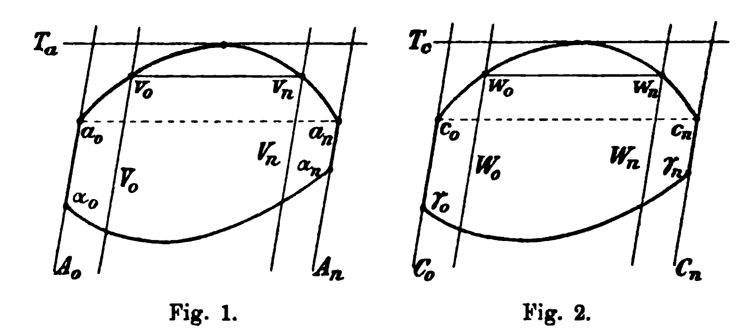


Fig. 1. Fig. 2.

Die angelehnten Geraden von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, welche den Sehnen $a_0 a_n$ und $c_0 c_n$ parallel sind und deren Berührpunkte zu den a und c, nicht zu den α und γ gehören, sollen resp. T_a und T_c heissen. Nach 6. ist die Entfernung von T_a und $\overline{a_0 a_n}$ gleich der von T_c und $\overline{c_0 c_n}$. Wir betrachten jetzt für die Ebene $\mathfrak{A}$ die Geraden A_0 und T_a, für $\mathfrak{C}$ die Geraden C_0 und T_c als Axen (X und Y resp.) cartesischer Coordinatensysteme und nennen Punkte und Figuren in beiden Ebenen entsprechend, wenn sie die nämlichen Grössen zu resp. Coordinaten haben.

Es werde nun in $\mathfrak{A}$ zu A_0 irgend eine parallele Sehne V_0 gezogen, in $\mathfrak{C}$ die entsprechende W_0. Die zu den a gehörigen Endpunkte mögen resp. v_0, w_0 heissen. Von v_0 ziehe man dann eine Sehne parallel T_a, deren anderer Endpunkt v_n heisse und durch diesen wieder eine Sehne V_n parallel V_0. In $\mathfrak{C}$ ziehe man zu V_n die entsprechende Sehne W_n, deren zu den c gehöriger Endpunkt w_n heisse.

Der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ liegende Theil der „vollen" Eifläche $\mathfrak{E}$ ist seitlich durch ein Regelflächenstück $\mathfrak{M}$ begrenzt und bildet selber eine volle Eifläche $\mathfrak{F}$. Die Ebenen (V_0 W_0)

und (V_n W_n) schneiden von 𝔉 gewisse Theile ab, ebenso von 𝔄 und 𝔈, aber das übrigbleibende ist wieder eine Eifläche 𝔖 mit Deckovalen 𝔑 und 𝔘; der Mittelschnitt 𝔅 von 𝔉 wird zu einem Mittelschnitt 𝔗 von 𝔖 zugestutzt, der ebenfalls ein Oval ist und den nämlichen Inhalt erhält wie die gleichen Ovale 𝔑 und 𝔘. Folgt alles aus den vorhergehenden Sätzen. Wir können daher auf 𝔖 und 𝔑, 𝔘 die nämlichen Schlüsse anwenden wie auf 𝔈 und 𝔄, 𝔈, erhalten also durch Anwendung unseres letzten Hilfsatzes: $\overline{v_0 v_n}$ ist gleich und parallel zu $\overline{w_0 w_n}$. Ausserdem ist nach 6.

Entf. $(T_a, \overline{v_0 v_n})$ = Entf. $(T_c, \overline{w_0 w_n})$ und nachdem schon Entf. $(V_0\, A_0)$ = Entf. $(W_0\, C_0)$
Entf. $(V_n\, A_0)$ = Entf. $(W_n\, C_0)$

ist, so erkennt man leicht, dass v_0 und w_0, v_n und w_n für beide Coordinatensysteme entsprechende Punkte sind. V_0 und v_0 waren aber ganz beliebig, und was auf Seite der a gilt, gilt analog auf Seite der α, daher stellen sich die Ovale 𝔄 und 𝔈 als entsprechende Figuren beider Coordinatensysteme und als congruent heraus. q. e. d.

Im Austausch gegen meinen Beweis hat mir Herr Professor Minkowski einen analytischen Beweis des nämlichen Satzes mitgetheilt, der sich auch auf Gebilde von mehr als drei Dimensionen erstreckt.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 13. Januar 1894.

Seite

F. Richarz: Ueber die elektrischen und magnetischen Kräfte der Atome 3

K. Döhlemann: Ueber eine einfache, eindeutige Raumtransformation 3. Ordnung 41

Sitzung vom 3. Februar 1894.

C. v. Kupffer: Ueber Monorhinie und Amphirhinie . . 51

*Ad. v. Baeyer: Ueber Terpentinöl 51

Sitzung vom 3. März 1894.

*L. Sohncke: Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten 61

B. W. Stankewitsch: Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der dielektrischen Polarisation in Flüssigkeiten . . 63

Hermann Brunn: Exacte Grundlagen für eine Theorie der Ovale 93

*Ad. v. Baeyer: Ueber Kümmelöl 61

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1894. Heft II.

München.

Verlag der K. Akademie.

1894.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 135. Stiftungstages

am 28. März 1894.

Der Classensecretär Herr C. v. Voit gedachte der seit dem vorigen Stiftungstage gestorbenen Mitglieder.

Die mathematisch-physikalische Classe hat im verflossenen Jahre zwei einheimische Mitglieder durch den Tod verloren, das ordentliche Mitglied Johann Bauschinger und das ausserordentliche Mitglied Adolf Steinheil. Dann acht auswärtige und correspondirende Mitglieder: die Mathematiker Ernst Eduard Kummer in Berlin und Moritz Abraham Stern in Göttingen; die Physiker John Tyndall in London und Heinrich Rudolf Hertz in Bonn; die Zoologen Alexander Theodor von Middendorff in St. Petersburg und Peter J. van Beneden in Löwen; den Botaniker Alphonse de Candolle in Genf und den Geologen Arcangelo Scacchi in Neapel.

Johann Bauschinger.

Am 25. November 1893 starb im 59. Lebensjahre das ordentliche Mitglied der Classe, Johann Bauschinger, Professor der technischen Mechanik und graphischen Statik an der hiesigen technischen Hochschule, nachdem er nur ein Jahr lang unserer Akademie angehört hatte. Er hat in der Stille der Arbeitsstube und des Laboratoriums als ein echter, sein ganzes Leben der Wissenschaft dienender Gelehrter eine Reihe wichtiger Arbeiten auf dem Gebiete der Wärmelehre und der Festigkeitslehre ausgeführt und sich dadurch einen bedeutenden Namen gemacht.

Bauschinger wurde am 11. Juni 1834 zu Nürnberg geboren. Das Geschick hatte ihn in ärmliche Verhältnisse gesetzt, aber ihm dafür mancherlei Fähigkeiten mit auf den Weg gegeben. Der Vater war ein einfacher Handwerker, der eine zahlreiche Familie zu ernähren hatte; es muss schon in dem Knaben ein hohes Maass von Energie und sittlichem Ernst, die ihm stets zu eigen geblieben sind, gewohnt haben, denn bereits im Alter von 14 Jahren erwarb er sich durch Stundengeben die Mittel zum Lebensunterhalt. Er liess sich durch Entbehrungen und Hindernisse nicht abschrecken, sondern gewöhnte sich, nicht in äusserlichen Vergnügungen, sondern in dem Streben nach Höherem seine Freude zu suchen. Der ganz auf seine eigene Kraft Angewiesene empfand aber auch bald den Segen, der in der Arbeit ruht.

Frühe zeigte sich in ihm eine besondere Begabung und Neigung für die mathematischen Naturwissenschaften; er besuchte in seiner Vaterstadt die Gewerbeschule und dann die polytechnische Schule mit grossem Erfolge, so dass er im Jahre 1853 das Absolutorium der letzteren mit Auszeichnung bestand und nebenbei gleichzeitig auch das der Lateinschule.

Es war von Anfang an der Wunsch Bauschinger's sich dem Lehrfach der Mathematik und Physik zu widmen; er trat daher an die hiesige Universität über, woselbst er als „Techniker" die kleine Matrikel erhalten hatte und sieben Semester verblieb. Zunächst wurde er hier mit dem hervorragenden Physiker Simon Ohm, der leider schon im Jahre 1854 starb, näher bekannt; er schätzte denselben als Lehrer ausserordentlich hoch, da er ihm in seiner Ausbildung viel verdankte und in ihm einen stets hilfsbereiten Berather fand. Er hörte nicht nur seine Vorlesungen über Experimentalphysik und die physikalischen Uebungen, sondern durfte auch an den bekannten abendlichen Zusammenkünften in dem Franziskanerkeller Theil nehmen, wobei physikalische Fragen zu ernster Besprechung kamen. Ausserdem gelang es dem strebsamen, den Namen eines Studenten mit Recht tragenden Jünglings, in der Sternwarte in Bogenhausen, deren Vorstand Lamont war, auf Empfehlung Ohm's, Aufnahme zu finden; er konnte sich daselbst in theoretischer und praktischer Astronomie sowie in höherer Mechanik ausbilden, besonders aber auch in der Behandlung und Beobachtung mit magnetischen, elektrischen und meteorologischen Instrumenten, was für ihn später von grossem Vortheil war.

Im Jahre 1856 machte er die Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik mit und bestand sie mit der ersten Note, worauf er alsbald als Aushilfslehrer für Physik und darstellende Geometrie an der polytechnischen Schule in Augsburg Verwendung fand. Ein Jahr darauf wurde er als Lehrer der Mathematik und Physik an der Gewerbeschule in Fürth angestellt, woselbst er neun Jahre zubrachte. Hier begannen neben einer angestrengten Lehrthätigkeit die ersten wissenschaftlichen Arbeiten Bauschinger's; der Tag war durch die Schule in Anspruch genommen, ein Theil der Nacht dem Studium und den Versuchen gewidmet. Diese seine Arbeiten lenkten die Aufmerksamkeit der Kreise der Wissen-

schaft und der Technik sowie der Staatsregierung auf den jungen Gelehrten. Er wurde im Jahre 1866 an das Realgymnasium zu München versetzt, kam aber zwei Jahre darauf an die richtige Stelle, nämlich an die damals neu gegründete technische Hochschule dahier, an der er durch die Einsicht ihres ersten Direktors, des Geheimraths v. Bauernfeind, die Professur für technische Mechanik und graphische Statik erhielt.

Hier war dem nun im 34. Lebensjahre Stehenden die seinen Talenten völlig entsprechende Wirksamkeit eröffnet. Er beschränkte sich dabei nicht nur auf theoretische Vorlesungen, sondern gründete alsbald für sein Fach ein Laboratorium, wie es der Physiker oder der Chemiker besitzt. Er hatte nämlich mit klarem Geiste erkannt, dass die technische Mechanik nicht mehr auf der Empirie beruhen dürfe, sondern eine wissenschaftliche Grundlage durch Thatsachen haben müsse, und um diese zu erhalten ein besonderes Laboratorium nothwendig sei. Nach vielen Bemühungen konnte er im Jahre 1870 ein mechanisch-technisches Laboratorium eröffnen, welches anfangs noch provisorisch untergebracht war; erst im Jahre 1873 wurde für solche Zwecke auf dem Areal der technischen Hochschule ein eigenes Haus erbaut, das ganz nach seinen Plänen eingerichtet wurde und ein Muster und Vorbild für alle Anstalten der Art geworden ist. Durch die Gründung dieses Laboratoriums, einer Versuchsstation für die Festigkeitslehre, namentlich der Baumaterialien, wirkte Bauschinger bahnbrechend: er hat durch seine zahlreichen und genauen Versuche der Mechanik eine feste Basis geschaffen.

Seine ersten in Fürth (1863—65) entstandenen wissenschaftlichen Arbeiten sind noch rein theoretischer Natur und beziehen sich auf die Grundgesetze der mechanischen Wärmelehre. Dieselben müssen als wichtige Vorarbeiten für die von Clausius so glänzend durchgeführte mechanische Wärme-

theorie bezeichnet werden. Ueber den sogenannten Entropiebegriff entspann sich zwischen ihm und Clausius eine Controverse, welche zu wissenschaftlich interessanten Ergebnissen führte und darthat, dass Bauschinger seinem berühmten Gegner vollständig gewachsen war. Im Speziellen behandelte er dann das wichtige Problem des Ausströmens von Gasen und Dämpfen sowie auch das des Druckes im Erdinnern, indem er in seinen Bemerkungen zu einigen Stellen von Heim's Untersuchungen „über den Mechanismus der Gebirgsbildung“ aus den allgemeinen Gleichungen der Elastizitätslehre einige interessante Resultate über das Gleichgewicht der Erdkugel ableitete, welche dabei als feste, von einer Flüssigkeit erfüllte Hohlkugel gedacht wird. Er erkannte als einer der Ersten, dass beide Probleme nur unter Zuziehung der Prinzipien der Wärmetheorie eine befriedigende Lösung finden können. Wenn dieselben auch damals nicht zum Abschluss gebracht wurden und später durch neue Hilfsmittel bedeutend gefördert worden sind, so werden doch Bauschinger's Leistungen auf diesem Gebiete stets ihren Werth behalten.

Sein der Anwendung der Wissenschaft schon früh besonders zugeneigter Geist beschäftigte sich ausserdem mit Vorliebe mit der theoretischen und angewandten Mechanik, aus welchen Studien sein vortreffliches, nach Delaunay's Buch frei bearbeitetes, in zwei Auflagen (1861 und 1866) erschienenes Werk: „Schule der Mechanik“ entstand. In diese Zeit (1867 und 1868) gehören auch seine Versuche mit dem zur Feststellung der Leistung von Dampfmaschinen dienenden Richards'schen Indikator, welche für die Wissenschaft besonders werthvoll geworden sind; dabei wurden acht Lokomotiven, vier mit Stephenson- und vier mit Meyer-Steuerung auf zahlreichen Fahrten untersucht und auf sieben Bahnstrecken mit 63 Meilen Gesammtlänge und mit Höheunterschieden bis zu 300 Metern 500 Diagramme aufgenommen.

Diese theilweise auch die Nacht über währenden mit ungewöhnlich grosser Mühe und Anstrengung verbundenen Versuche hielt Bauschinger für seine beste Leistung und that sich auf sie immer am meisten zu Gute.

Vor der Einrichtung des Laboratoriums erfolgte seine Bearbeitung der „Elemente der graphischen Statik", von welcher zwei Auflagen (1871 und 1880) erschienen sind. Der Zweck des Buches war, auf die Culmann'schen Arbeiten in einfacher gemeinverständlicher Art vorzubereiten, was dem Autor auch völlig gelungen ist.

Seine hauptsächlichste und ganz eigenartige Wirksamkeit, die seinen Namen erst weiterhin bekannt gemacht hat, entfaltete aber Bauschinger durch die im mechanisch-technischen Laboratorium gemachten, wahrhaft klassischen Versuche, welche, im Jahre 1871 begonnen, nicht nur der Praxis eine Menge werthvoller Thatsachen brachte, sondern auch der Wissenschaft zu Gute kamen.

Es wurden während 22 Jahren alle Baumaterialien auf ihre Festigkeit und Elastizität geprüft: Eisen und Stahl, Holz, Steine, Cemente und Mörtel.

Er hat zu diesen Bestimmungen die genauesten und sinnreichsten Messapparate und Methoden angewendet und zum Theil selbst erfunden, wie sie zu ähnlichen Zwecken für die physikalische Forschung gebraucht werden, so dass die erhaltenen Resultate für die Physik nicht minder werthvoll sind wie für die Kenntniss der in der Technik verwendeten Materialien. So hat er z. B. durch Einführung der Gauss'schen Methode der Spiegelablesung die Messung der Dehnung ausserordentlich verfeinert und die elastischen Formänderungen der schwersten Maschinentheile oder der stärksten Brückenglieder der Wahrnehmung zugänglich gemacht; hundertstel Millimeter wurden von ihm gemessen mittelst seiner Rollenfühlhebel, durch welche die Relativbewegungen der beobachteten

Punkte durch Reibung einer Stange auf das Zeigerwerk übertragen werden.

Auf diese Weise entstanden die Zug-, Druck-, Biegungs- und Torsions-Versuche Bauschinger's, seine Versuche über die Abnützbarkeit und die Frostbeständigkeit der Gesteine, und die über die Knickfestigkeit und die Widerstandsfähigkeit von Säulen im Feuer. Zuletzt (von 1881 an) machte er die wichtigen Dauerversuche mit oft wiederholter Beanspruchung des nämlichen Körpers, wodurch die Veränderungen der Eigenschaften des Materials durch längeren Gebrauch ersichtlich wurden. Seine Apparate sind auch angewendet worden, um die Festigkeit der Knochen des menschlichen Körpers zu prüfen, was für die Mechanik der Bewegungen desselben sowie für die Chirurgie von Bedeutung geworden ist.

Die Versuche sind zumeist in den 23 Heften der Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium veröffentlicht worden; dieselben bilden eine Fundstätte für den wissenschaftlich gebildeten Techniker und haben vielfache Anregungen gebracht, welche noch auf lange Zeit richtunggebend sein werden. Das Institut Bauschinger's stand an der Spitze der Unternehmungen der Art und es flossen ihm von allen Seiten Materialien zur Untersuchung und Aufträge für die Praxis zu. Ein besonderes Verdienst erwarb er sich noch durch die Gründung der so ungemein nützlich gewordenen „Konferenzen zur Vereinbarung einheitlicher Methoden für die Prüfung von Bau- und Konstruktionsmaterialien“; als Vorstand derselben wusste er mit grossem Geschick die Verhandlungen zu leiten, die vielfachen Gegensätze auszugleichen und die gemeinsamen Versuche nach bestimmten, meist von ihm geschaffenen Methoden zu veranlassen.

Es ist schon betont worden, dass Bauschinger's Zerreissungsversuche nicht allein für die Praxis, sondern auch für die Wissenschaft von Wichtigkeit geworden sind, da sie Aufschluss über das Verhalten der festen Körper in der

Nähe der Elastizitätsgrenze und bei Ueberschreitung derselben geben. Eine rationelle Elastizitätstheorie muss aber das Verhalten der Körper von den kleinsten bis zu den grösstmöglichen Deformationen berücksichtigen.

Als Forscher war Bauschinger von grossem Scharfsinn in der Beobachtung der Erscheinungen und im Ausdenken der richtigen Versuche, von unermüdlicher Ausdauer und seltener Gewissenhaftigkeit. Diese Gewissenhaftigkeit war ihm auch als Lehrer eigen; er lehrte gerne: sein Vortrag war durchdacht und von durchsichtiger Klarheit. Der Mann, welcher sich durch seine wissenschaftlichen Arbeiten so hoch in den Reihen der Gelehrten erhoben hatte, hätte wohl auch den Titel eines Doktors verdient.

Durch eigene Tüchtigkeit aus den einfachsten Verhältnissen hervorgewachsen, blieb er sein Leben hindurch schlicht und bescheiden. Er drängte sich nicht vor, sondern liess die Leute an sich herankommen; dann aber war er ungemein freundlich und wohlwollend und gerne bereit, Jedem zu nützen und zu helfen. Seine unverbrüchliche Wahrheitsliebe liess ihn stets offen seine Meinung sagen, so dass manchmal sein Wesen etwas schroff erscheinen konnte. In der Arbeit und in der Erfüllung der Pflicht suchte und fand er die höchste Befriedigung.

Bauschinger ist in seiner Art für die technische Hochschule und die Wissenschaft kaum zu ersetzen; sein Name wird als der eines sehr verdienten, seine eigenen Wege einschlagenden Forschers noch lange fortleben.

Adolf Steinheil.

Dr. Adolf Steinheil, Inhaber der optisch-astronomischen Werkstätte Carl August Steinheil Söhne, ist am 4. November 1893 aus dem Leben geschieden. Es ist von besonderem Interesse, den Entwicklungs- und Lebensgang dieses so überaus thätigen und eigenartigen Gelehrten zu verfolgen.

Er wurde am 12. April 1832 als der zweite Sohn unseres berühmten Mitgliedes Carl August v. Steinheil dahier geboren. Dieser Sohn hatte das ungewöhnliche Talent des Vaters für Mathematik sowie für die Anwendung derselben zur Lösung physikalischer Probleme geerbt. Die Beiden waren sich überhaupt in ihren Anlagen ungemein ähnlich und bieten ein vortreffliches Beispiel dafür, wie sich die Organisation und die Ausbildungsfähigkeit bestimmter Theile des Gehirns zu vererben vermag. Denn schon im kindlichen Alter trat bei dem Sohne das Verständniss für Zahlenverhältnisse und die entschiedene Vorliebe dafür hervor. Es wird erzählt, er habe als fünfjähriger Knabe vor dem Eintritte in die Volksschule bei Betrachtung seiner gewürfelten Bettdecke sich klar gemacht, dass 2×6 und 3×4 die gleiche Zahl geben. In dem Gymnasium übertraf er die Mitschüler weit in dem Verständniss für Arithmetik und Mathematik und bei den mathematischen Aufgaben erfand er Lösungen, welche von dem Lehrer nicht vorgetragen worden waren. Dem entsprechend hatte er auch zeitlebens das treueste Gedächtniss für Zahlen: so z. B. wusste er von jeder Pflanze zu sagen, auf welcher Seite von Koch's Deutscher Flora sie sich beschrieben findet, und konnte er eine grosse Anzahl von Logarithmen aus dem Kopfe angeben.

Es ist verständlich, dass der so veranlagte Sohn sich zu dem gleich gearteten Vater besonders hingezogen fühlte und schon früh für dessen Thun das lebhafteste Interesse empfand.

Man muss die Besonderheit des Vaters gekannt haben, um die Stellung des Sohnes zu ihm zu verstehen. Der Vater war ein selten genial angelegter Mann, unablässig geistig beschäftiget und voll von Ideen; er verband mit der Gründlichkeit und Schärfe des Gelehrten den beweglichen Geist, den sicheren Blick und die Beherrschung der Technik des ausgezeichneten Praktikers. Ein Schüler von Bessel und

Gauss, die ihn, wie ihr Briefwechsel darthut, besonders hoch hielten, hatte er von diesen Geistesheroen gelernt, die Mathematik als Mittel zum Zweck anzusehen. Man nennt ihn wohl gewöhnlich als den Begründer der jetzt die ganze Erde umspannenden Telegraphen, welche er durch seine Erfindungen praktisch möglich gemacht hat. Zu diesen gehören: die Art des Aufschreibens und die Wahl der Zeichen, dann die Benützung der leitenden Erde statt des zweiten Drahtes und die Ableitung des Blitzes von den Apparaten durch die Blitzplatten, ferner der sogenannte schweizerische Commutator und die Translatoren, durch welche eine an einer Station anlangende Depesche sich selbst weiter telegraphirt. Aber man vergisst häufig, dass in vielen anderen Fällen, wo es galt eine schwierige physikalische Aufgabe durchzuführen, sein Geist alsbald die Mittel dazu fand.[1]) Wer das Glück

---

1) Es sei nur erinnert: an sein Photometer zur Bestimmung der relativen Helligkeiten der Sterne; an das zur Sendung optischer Zeichen in grosse Entfernungen bestimmte Heliotrop; an die erste Verwendung physikalischer Eigenschaften z. B. der Brechbarkeit und der Zerstreuung des Lichtes, des specifischen Gewichtes etc. etc. zur quantitativen chemischen Analyse; an die Herstellung genauer Maassstäbe, Gewichte und Waagen; an seinen Astrographen zum Zeichnen der Sternkarten; an das Pyroskop zur sicheren Ermittelung von Brandstätten bei Nacht; an seine Angabe durch einen mit einer elektrischen Batterie in Verbindung gebrachten Draht kranke Theile rasch abzubrennen als erstes Beispiel der für die Chirurgie so wichtig gewordenen Galvanokaustik; an die Vorrichtung, um bei der Richtung des astronomischen Fernrohrs auf den Quecksilberhorizont das Spiegelbild des Fadenkreuzes sichtbar zu machen, wobei er eine Aufgabe, welche optisch derjenigen des viel jüngeren Augenspiegels ganz nahe verwandt ist, mit völlig ähnlichen Mitteln löste; an den für die berühmten spectralanalytischen Versuche von Bunsen und Kirchhoff von ihm construirten Spectralapparat, und endlich an die mit Kobell vor Daguerre gemachte erste Fixirung von Lichtbildern auf Papier, welche als erste Photographien auf Papier noch auf der letzten Nürnberger Ausstellung zu sehen waren. Wahrlich eine reiche Anzahl der wichtigsten, noch jetzt fortwirkenden Leistungen, wie sie nicht leicht ein Gelehrter aufzuweisen vermag.

hatte, diesem merkwürdigen Manne näher zu treten, der wird die Stunden, die er in seinem Umgange zubrachte, nie vergessen. So wenig bestechend sein Vortrag war, so war er doch im Umgang ein ungemein anregender Lehrer für reifere Schüler, bei denen er durch den Reichthum und die Originalität der Gedanken das grösste Interesse für seine Wissenschaft zu erwecken wusste.

So kam es auch, dass der Sohn zeitlebens zu dem Vater, welcher für ihn das Ideal eines Naturforschers war, voll Verehrung aufsah und in Pietät das that, was der Vater forderte, wenn ihm auch die Erfüllung nicht selten recht schwer geworden ist.

Denn der Vater hielt strenge Zucht in seinem Hause, verlangte unbedingten Gehorsam und pünktlichste Ausführung seiner Anordnungen. Er war jedoch durchaus kein finsterer Mann von pedantischem grübelndem Wesen, sondern vielmehr gerne heiterem Leben zugewandt, an dem er auch seine Kinder Theil nehmen liess.

Besondere Anschauungen hatte der Vater sich über die Erziehung gebildet; der gewöhnliche Bildungsgang durch das Gymnasium und die Universität sagte diesem unabhängigen Geiste nicht zu und er wünschte nicht, dass seine Söhne in den Staatsdienst giengen: sie sollten sich ganz durch eigene Kraft durch das Leben durchringen. Er beachtete bei der genialen Leichtigkeit seines Arbeitens nicht, dass nur besonders veranlagte Naturen dies vermögen und der Mittelmässige am sichersten den gewöhnlichen Weg einschlägt.

Durch diesen Widerstand entschloss sich der junge Steinheil, die Nothwendigkeit akademischer Studien erkennend, nach Absolvirung der zweiten Gymnasialklasse Privatstunden im Lateinischen und Griechischen zu nehmen, wozu er sich die vom Vater verweigerten Mittel durch Stundengeben in der Mathematik erwarb, so dass er schon nach einem Jahre (1849) am Gymnasium zu St. Anna in

Augsburg das Absolutorium bestand. Er hörte darnach während eines Jahres (1849/50) als Eleve des ersten Kurses Vorlesungen über Mathematik und Physik an der früheren hiesigen polytechnischen Schule, die ihm jedoch keinen besonderen Gewinn brachten, und gieng dann mit seinen Eltern (1850) nach Wien, wohin der Vater als Sektionsrath in das Ministerium berufen worden war, um in Oesterreich die elektrischen Telegraphen einzurichten. In Wien besuchte er während des Jahres 1850/51 an der Universität und der polytechnischen Schule mathematische, chemische und botanische Vorlesungen bei Moth, Petzval, Schrötter und Unger, und lernte auch hervorragende Naturforscher im elterlichen Hause näher kennen, was für ihn von nachhaltiger Bedeutung war.

Aber bald riss ihn der Wille des Vaters aus diesen regelmässigen Studien heraus; er bestimmte ihn (1851) den Lehrkurs und die Prüfung zur theoretisch-praktischen Heranbildung von Staatstelegraphisten mitzumachen, liess ihn zum Aushilfstelegraphisten mit einem Taggeld von 1 fl. ernennen und beauftragte ihn mit der Herstellung der Telegraphenlinien in der Lombardei. Es war dies eine schlimme Zeit für den jungen wissensdurstigen Mann, eine Zeit voller Anstrengungen und Entbehrungen, denn er musste mit seinen italienischen Arbeitern, mit denen er die harte Arbeit und die ärmliche Kost theilte, die Träger aufrichten und die Drähte ziehen. Nach Lösung dieser Aufgabe schwer krank nach Wien zurückgekehrt, fand er keine Ruhe, denn der Vater hatte die Herstellung des Telegraphennetzes in der Schweiz übernommen und die Einrichtung der Büreaux und die Ueberwachung der Legung der Leitungen sowie die Ausbildung der Obertelegraphisten dem noch nicht zwanzigjährigen Sohne in selbständiger Stellung vorbehalten. Es war eine schwierige, aber dankbare Aufgabe, welche ihm hier zuviel; man erkannte in der Schweiz die Wichtigkeit

der Sache und interessirte sich in allen Kreisen lebhaft dafür; bald hatte sich auch der junge zum Oberinspektor ernannte Mann durch seine Kenntnisse und Energie die lebhafteste Anerkennung der Behörden und des Publikums erworben. Seine Schüler bei den in deutscher und französischer Sprache abgehaltenen Lehrkursen waren älter als er; aber sie haben ihn alle hoch geachtet, wie aus den mit ihm noch später unterhaltenen Beziehungen hervorgeht, und auch er hat sich stets mit Freude und Genugthuung dieser Zeit erfreulicher Wirksamkeit (Februar bis Oktober 1852) erinnert.

Es hätte sich ja wohl daran eine bleibende Stellung anknüpfen lassen, aber es sollte die Aufgabe seines Lebens eine ganz andere werden. Im Herbst 1852 von der Schweiz nach München zurückgekommen, wo der Vater wieder Anstellung gefunden hatte, hörte er an der Universität im Winter- und Sommersemester historische und philologische Vorlesungen, besonders aber die Experimentalphysik bei Simon Ohm, um sich für die Doktorprüfung vorzubereiten. Er war aber auch zu gleicher Zeit Hospitant des Ingenieurkurses an der polytechnischen Schule, wodurch er befähiget wurde, schon im Sommer 1853 das Absolutorium dieser Schule zu erlangen und im Herbst desselben Jahres die theoretische Prüfung für den Staatsbaudienst als Ingenieur zu bestehen. Er glaubte dadurch einen Rückhalt für alle Fälle zu haben. Seit dieser Zeit hatte er in seinem damaligen verehrten Lehrer Bauernfeind einen väterlichen Freund erworben.

Mittlerweile hatte der Vater praktisch-optische Arbeiten begonnen, um die Mittel zum Lebensunterhalte für seine Familie zu verdienen. Er war dazu besonders geschickt, nicht nur durch die frühere Erfindung optischer Instrumente, sondern auch durch deren vortreffliche Ausführung in seiner Werkstätte bei der mathematisch-physikalischen Sammlung der Akademie; er hatte auch in seiner Jugend Fraunhofer's Arbeiten verfolgt und war sogar von diesem aufgefordert

worden als Theilnehmer in sein Institut einzutreten, was er bescheiden abgelehnt hatte. König Maximilian II. ermunterte ihn zu seinem neuen Unternehmen, indem er ihm den Wunsch aussprach, es möchte München als der Vorort für die praktische Optik in Deutschland, der es durch Fraunhofer geworden war, erhalten bleiben. Nach einigen Vorarbeiten konnte im Mai 1855 die optisch-astronomische Werkstätte in Schwabing bei München eröffnet und der erste Prospekt ausgegeben werden. Der Sohn wurde der erste und beste Mitarbeiter bei derselben. Nur mit Mühe und unter Widerstreben des Vaters vermochte er noch die Zeit zu gewinnen, das Doktorexamen zu machen, welches er im Jahre 1855 unter dem Dekanate Liebig's, der mit Scharfblick sein Talent erkannte und ihm stets gewogen blieb, mit der Dissertation: „Tafeln zur Entnehmung der Radien von Fernrohrobjectiven, deren innere Flächen in einander passen“ bestand.

Von da an blieb er ganz bei der Optik, welche sein Lebensberuf werden sollte. Er wurde durch den Vater in dessen Ideen und Entwürfe eingeweiht und hatte die Aufgabe dieselben durchzuführen. Es war ihm namentlich die Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen durch die Linsen und das Suchen nach den besten Formen übertragen. Es begann damit für ihn eine Zeit rastlosester Thätigkeit, ein Schaffen ohne Gleichen; Jahrelang hat er, ohne sich eine Erholung gewähren zu dürfen, täglich zwölf Stunden gerechnet; dadurch aber eine so grosse Erfahrung und so eingehende Kenntnisse erlangt, wie sie in diesem Zweige des Wissens wohl noch Niemand gehabt hat. Dieser geistige Erwerb bildete die sichere Grundlage für seine späteren Leistungen; eine kurze Rechnung belehrte ihn später, ob der eingeschlagene Weg zum Ziele führt, und ein Blick in die Rechnungen, ob und welche Fehler die Rechner gemacht hatten. Jene ersten Jahre des Betriebs der Werkstätte waren Steinheils eigentliche Lehrjahre; er fühlte, dass er jetzt in

seinem Elemente sich befinde und befähiget sei, hierin das Beste zu vollbringen.

Im Jahre 1865 zog sich der Vater, welcher eine Sache nur so weit verfolgte, als er glaubte, schöpferisch wirken zu können, von dem optischen Institute zurück, um ausser Problemen der Wissenschaft seinen Neigungen, der Malerei und der Musik, sich hinzugeben. In Folge davon war der Sohn von da an ganz auf seine eigene Kraft angewiesen; er kaufte dem Vater das Geschäft ab, und führte es anfangs mit seinem älteren Bruder Eduard[1]), welcher im Wesentlichen den technischen und kaufmännischen Theil übernommen hatte, später nach dessen Tode allein fort. Und welchen Aufschwung nahm das Institut in kurzer Zeit unter seiner sachkundigen Leitung!

Von Anfang an gieng sein Bestreben dahin, alles Empirische zu verbannen und auf rein wissenschaftliche Weise durch strenge trigonometrische Rechnung, nachdem die optischen Constanten der Glassorten bestimmt waren, die besten Formen zu ermitteln und diese dann mit den feinsten von seinem Vater verbesserten Methoden der Prüfung mittelst des Sphärometers, des Fühlspiegels und der Newton'schen Farbenringe auf das Genaueste auszuführen. Solchen Proben auf die Güte unterlagen auch die Glasarten und die fertigen Instrumente. Es ist ihm dadurch gelungen, eine Anzahl der wichtigsten Neuerungen in die Optik einzuführen.

Steinheil ist in seinen optischen Untersuchungen der direkte Nachfolger Fraunhofer's geworden; er hat da ange-

---

1) Dieser Bruder Eduard, welcher sich ursprünglich für die Maschinenkunde, dann für die Landwirthschaft ausgebildet hatte, war ebenfalls für die Naturwissenschaft begeistert; er war eine Autorität in der Entomologie und besass eine unwiderstehliche Lust ferne Welttheile zu sehen. Er hatte die Insel Elba, Algier und Columbien kennen gelernt; auf seiner zweiten Reise nach Columbien erlag der talentvolle Mann auf der Insel St. Thomas dem Sonnenstich.

schlossen, wo letzterer durch einen allzu frühen Tod die Arbeit abbrechen musste. Stets hat er jedoch dankbarst anerkannt, welche Förderung ihm durch die hervorragenden theoretischen dioptrischen Arbeiten unseres verehrten Mitgliedes Seidel geworden ist.

Fraunhofer hatte durch Verwendung der von ihm im Sonnenspektrum entdeckten fixen Linien eine strenge Rechnung in der Optik ermöglicht; er war dadurch in den Stand gesetzt worden, die Lichtstrahlen durch trigonometrische Rechnung durch ein Linsensystem zu verfolgen, den Einfluss der Halbmesser, der Dicken und der Abstände der Linsen auf die Vereinigungsweiten verschiedener Strahlen zu bestimmen und so die Dimensionen festzustellen, welche für gegebene Glasarten ein möglichst deutliches Bild eines in der Axe gelegenen leuchtenden Punktes ergeben.

Fraunhofer's Fernrohrobjektive mit kleineren Dimensionen erfüllten drei Bedingungen: sie hatten eine bestimmte Brennweite bei gleichzeitiger Hebung des Kugelgestalt- und Farbenfehlers. Bei seinen Fernrohrobjektiven von grösseren Dimensionen kam noch die Wahl der Glassorten in Bezug auf das nach Vereinigung der Hauptfarben noch bleibende sogenannte sekundäre Spektrum hinzu, sowie die von ihm angestrebte Erfüllung einer vierten Bedingung, welche aber trotz eifriger Untersuchungen des berühmten Fernrohrs noch nicht mit Sicherheit festgestellt werden konnte. Alles dieses hatte Fraunhofer durch Anwendung von nur zwei Linsen erreicht und dadurch zuerst bewiesen, dass die Wissenschaft eine zuverlässigere Führerin ist als die Empirie, um unter vielen Möglichkeiten die günstigste Form zu wählen.

Steinheil's erste Aufgabe war, in der Construktion der Fernrohre womöglich über Fraunhofer hinaus zu kommen. Er studirte eingehend das Objektiv desselben und berechnete dann (1861) das von Gauss, dessen Oeffnung im Verhältniss zur Brennweite eine grosse ist, wodurch die Helligkeit be-

trächtlicher als bei dem ersteren Fernrohr wird. Es gelang Steinheil in dieser Beziehung (Grösse des Oeffnungswinkels) noch das von Gauss Geleistete zu übertreffen. Ferner erkannte er es als einen wesentlichen Vortheil, wenn die dauerhaftere Flintglaslinse der aus Crownglas vorausgestellt werde; das Objektiv erhält dadurch stärker gekrümmte Flächen, wodurch das Bild ausser der Axe genauer wird und die unvermeidlichen Reflexbilder weiter vom Objektivbild entfernt werden, so dass sie nicht so störend wirken. Da aber bei den Fernrohren im Wesentlichen nur das Bild in der Axe deutlich zu sein braucht, und das Fraunhofer'sche die dafür nöthigen drei Bedingungen erfüllt, so ist letzteres auf einem so hohen Grad der Vollkommenheit angelangt, dass man es kaum zu überbieten vermag.

Eine ganz neue Form führte dann Steinheil durch die Mikrometerokulare und die vorzüglichen aplanatischen Lupen ein. Früher hatte man bekanntlich als Lupen zumeist nur einfache chromatische Linsen mit ganz geringem Gesichtsfelde und als Okulare nur getrennt stehende einzelne Linsen, welche ebenfalls chromatisch waren und vielfach störende Reflexe zeigten, verwendet. Steinheil setzte die beiden aus drei mit einander verkitteten Linsen, einer biconvexen Crownglaslinse zwischen zwei Flintglaslinsen, zusammen, wodurch er achromatische, von Reflexen freie Bilder erhielt. Seine eigenthümlichen monocentrischen Okulare bestehen ebenfalls aus einer Kugel von Crownglas, welche von zwei Flintglasmenisken eingeschlossen ist, deren Radien sich nur durch die Dicke unterscheiden, so dass alle Radien den gleichen Mittelpunkt haben, der zugleich optischer Mittelpunkt ist; sie zeigen grosse Bildschärfe in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt des Gesichtsfelds und haben mannigfache Anwendung z. B. bei Ringmikrometern gefunden.

Die grösste Aufgabe erwartete Steinheil jedoch durch die Photographenobjektive. Die sich so rasch entwickelnde

Photographie stellte nämlich an die Optik eine Reihe anderer Anforderungen, viel schwierigere als es bis dahin die Astronomie gethan hatte. Auf diesem Felde konnte Steinheil's Methode der Rechnung und der Herstellung der Objektive die bedeutendsten Erfolge erringen. Bei dem astronomischen Fernrohr wird nämlich von dem durch das Objektiv entworfenen Bild gewöhnlich nur ein kleiner centraler Theil durch das Okular betrachtet, wesshalb das Fernrohrobjektiv, wie erwähnt, zumeist nur in der Axe und deren nächster Nähe ein scharfes Bild zu liefern braucht, während es gleichgiltig ist, ob dieses Bild in seiner weiteren Ausdehnung scharf bleibt, d. h. ob es eben oder gekrümmt ist. Bei der Photographie dagegen soll das vom Objektiv entworfene Bild eine grosse Ausdehnung besitzen und in der ganzen Ausdehnung gleich genau sein, es soll ferner vollkommen in einer Ebene liegen und eine grosse Tiefe besitzen, welches letztere dann erreicht ist, wenn die Linse die Fähigkeit hat, von ungleich entfernten Objekten gleichzeitig ein deutliches Bild in der nämlichen Ebene zu erzeugen.

Dabei genügt es nicht wie bei dem Fernrohr nur die Strahlen in der Axe in einem Punkte zu vereinigen, da das Bild eines ausser der Axe liegenden leuchtenden Punktes einen zu grossen Durchmesser erhalten kann; man muss daher in diesem Falle die trigonometrische Durchrechnung auch noch auf einen Bildpunkt ausser der Axe ausdehnen, wodurch die Aufgabe eine viel complizirtere wird. Man hat hier nach den Darlegungen Steinheil's zu berücksichtigen: bei dem Bildpunkt in der Axe: die Brennweite, die Hebung des Kugelgestaltfehlers und des Farbenfehlers; bei dem Bildpunkt ausser der Axe: die Hebung der Farben ausser der Axe, dann der Verzerrung, der Bildkrümmung, des regelmässigen und unregelmässigen Astigmatismus und des Kugelgestaltfehlers ausser der Axe. Die Correktur der drei letzteren Fehler wurde ihm nur durch die von Seidel entwickelten

„trigonometrischen Formeln für den allgemeinsten Fall der Brechung des Lichtes an centrirten sphärischen Flächen“ möglich. Fraunhofer hatte schon, wie gesagt, bei seinen Fernrohrobjektiven von grösseren Dimensionen ausser den drei Bedingungen für den Bildpunkt in der Axe eine vierte einzuführen gesucht.

Bevor sich Steinheil mit der Construktion photographischer Objektive befasste, existirte nur ein einziger guter Typus, der von dem Mathematiker Petzval in Wien bald nach Erfindung der Daguerreotypie ersonnene; er war aus vier Linsen zusammengesetzt, von denen drei einzeln stehen, und aus drei Glasarten hergestellt. Dieses Petzval'sche Objektiv ist noch immer im Gebrauch, alle anderen, wesentlich neuen Photographenobjektive sind von Steinheil eingeführt worden. Hierin zeigt sich seine vollkommene, einzig dastehende Beherrschung der Theorie am prägnantesten.

Im Laufe der Zeit sind von ihm drei Constraktionstypen für Photographen-Apparate ausgegeben worden.

Zuerst das Periskop (1865), welches nur aus zwei symmetrischen Linsen von einer Glasart besteht, also chromatisch und von geringer Helligkeit ist, jedoch ein sehr grosses Gesichtsfeld und eine ganz correkte Zeichnung besitzt. Dieses Instrument wird noch heute trotz seiner Farbenzerstreuung gewünscht, da es in Folge der ausserordentlich einfachen Construktion für seine Leistung sehr billig ist.

Den zweiten Typus nannte er Aplanat, welcher. aus vier paarweise verkitteten symmetrischen Linsen von zwei Glasarten besteht. Im Jahre 1866 wurden die ersten Apparate der Art vollendet, im Jahre 1871 die Weitwinkelapparate für Reproduktion von topographischen Landkarten als Lösung einer von dem österreichischen Kriegsministerium gestellten Aufgabe ausgeführt, und im Jahre 1879 die ersten Gruppenaplanate ausgegeben. Diese Aplanaten haben die weiteste Verbreitung gefunden und wurden überall unter den ver-

schiedensten Namen nachgemacht. In ihnen finden sich die Elemente für alle Bedingungen; nur eines dieser Elemente, der Astigmatismus, ist darin noch nicht berücksichtiget.

Der dritte Typus ist der im Jahre 1881 entstandene Antiplanet. Derselbe beruht auf einem ganz neuen, höchst geistreich erdachten Prinzip, indem durch eine vordere Doppellinse alle Fehler absichtlich gross gemacht und dann durch ein zweites Linsenpaar vollständiger, als dies sonst möglich war, korrigirt werden. Er besteht aus nur vier paarweise verkitteten nicht symmetrischen Linsen von nur zwei Glasarten, und es ist in ihm auch der letzte Fehler, der des Astigmatismus, fast ganz gehoben. Dieser Antiplanet, ein Instrument von denkbar grösster Einfachheit, erforderte unendlich mühsame Berechnungen, bis die Möglichkeit der Anwendung des Prinzips erkannt war, er hat aber auch zu einem glänzenden Resultat geführt. In Folge der in dem letzten Jahrzehnt in der Glastechnik gemachten grossen Fortschritte haben Andere versucht, diesen Steinheil'schen Antiplanet noch zu verbessern.

Von Steinheil wurde die von dem deutschen Reiche zur Beobachtung des Venusdurchgangs im Jahre 1874 ausgesandte Expedition mit vortrefflichen photographischen Fernrohrobjektiven ausgestattet.

Zuletzt fesselte ihn die wichtige Aufgabe der Herstellung von Instrumenten zur Photographie der Himmelskörper. Bei den Pariser Verhandlungen, welche die einheitliche photographische Aufnahme des Fixsternhimmels vorzubereiten hatten, vermochte er darzuthun, welchen Bedingungen ein astrophotographisches Objektiv zu genügen hat, woraufhin er zunächst das Potsdamer Observatorium mit Apparaten der Art versorgte, welche schon manche neue Aufschlüsse geliefert haben.

Steinheil's astrophotographische Objektive bedingen einen erheblichen Fortschritt in der Wissenschaft, mit dem sein

Name stets verknüpft bleiben wird, denn sie gestatten die Stellung der Sterne noch nach Jahrhunderten zu ersehen und die Veränderungen derselben zu erkennen. Die hiesige Sternwarte, welche überhaupt kein grösseres Instrument von Steinheil besitzt, ist wegen Mangel von Mitteln leider nicht in der Lage, sich an diesem durch unseren Mitbürger ermöglichten geistigen Wettkampfe zu betheiligen.

Die Hauptschwierigkeiten bei der Berechnung optischer Construktionen liegen darin, für den jeweiligen Fall die richtige Reihenfolge zu finden, in welcher alle die nothwendigen Bedingungen erfüllt werden müssen, und direkt vergleichbare Fälle für die Auswahl herzustellen, sowie auch die in Bezug auf ihr Brechungs- und Zerstreuungsvermögen passenden Glasarten zu wählen. Steinheil liess nie ab, immer wieder zu prüfen, ob sich der Zweck nicht vollständiger und mit einfacheren Mitteln erreichen lasse. Er besass ausserdem ein ganz besonderes Geschick in der Erfindung von Methoden, nach welchen genaue Formen hergestellt werden können, ohne vom Arbeiter besondere Kenntnisse zu verlangen, wobei er zumeist von aus der Mathematik bekannten Sätzen ausgieng. Um z. B. eine genaue Planfläche herzustellen, liess er, ganz unabhängig von Withworth und Anderen, drei Flächen schleifen, von welchen jede auf jede der beiden anderen passt, denn in diesem Falle mussten auch die Flächen eben sein. War ihm ferner die Aufgabe gestellt, ein Prisma zu machen mit einem Winkel von genau 90° und zwei Winkeln von genau 45°, so gieng er von den beiden geometrischen Sätzen aus, dass im Quadrat jeder Winkel ein rechter ist und dass im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck die Winkel an der Hypothenuse einander gleich und von 45° sind.

Aus der optisch-astronomischen Werkstätte Steinheil's, welche im Jahre 1862 aus Schwabing nach München in die Landwehrstrasse verlegt und im Jahre 1890 in ein eigens

für diesen Zweck auf der Theresienhöhe errichtetes grosses Gebäude transferirt wurde, sind Tausende von kleinen und grossen Fernrohren, Prismen, Photographenapparaten etc. in alle Welttheile ausgegangen und haben seinen Namen als den eines der erfindungsreichsten und sorgfältigsten Optiker aller Zeiten bekannt gemacht. Seine Kenntnisse und seine Energie haben das berühmte Institut geschaffen; sein Geist wird in letzterem noch ferner walten. Die in seine Fussstapfen Tretenden haben jetzt leichtere Mühe das von ihm Erdachte weiter fortzuführen.

Steinheil hat durch seine optischen Untersuchungen und die Herstellung optischer Instrumente nicht nur indirekt die Wissenschaft gefördert, sondern sich auch direkt an der Erweiterung derselben betheiligt. In manchen exklusiven Kreisen der Gelehrten sieht man zwar noch immer nur die ganz ideale, auf keinen praktischen Nutzen gerichtete Thätigkeit als die wissenschaftliche an und hält eine Beschäftigung um so weniger für eigentlich wissenschaftlich und für würdig, je mehr sie einer direkten Anwendung fähig ist. Aber hören wir denn nicht so oft sagen, dass jede durch die Wissenschaft festgestellte Thatsache, auch die allerabstrakteste, einmal ihre Bedeutung für das menschliche Leben gewinnt, eine Bedeutung, welche zumeist Niemand vorzuahnen im Stande ist? Und soll es für den Forscher einen Unterschied machen, ob dieser Nutzen erst nach Hunderten von Jahren oder alsbald sich einstellt? Der Entdecker neuer Gebiete und Thatsachen in der Wissenschaft erkennt nicht selten bei einem gewissen Stande des Wissens auch zuerst deren Anwendbarkeit und findet wohl auch am besten den richtigen Weg dazu. In solcher Weise wurde Lavoisier der erste praktische Hygieniker, denn er hat sich nach der Erkenntniss der Rolle des Sauerstoffs im Thierkörper viel mit der Beschaffung reiner Luft und mit anderen Fragen der öffentlichen Gesundheitspflege befasst. Gerade unsere Aka-

demie bietet in ihrer Vergangenheit leuchtende Beispiele dafür, dass die grössten Gelehrten es nicht verschmäht haben, die Früchte ihrer wissenschaftlichen Arbeit zum Wohle der Menschheit zu verwerthen. Liebig wurde auf Grund seiner chemischen Untersuchungen der Begründer des rationellen Ackerbaues; der edle Fraunhofer, gegen dessen Aufnahme in die Akademie als eines Autodidakten und Praktikers von mancher Seite Bedenken bestanden, stellte in seinem optischen Institut die ersten genauen achromatischen Fernrohre her, mit denen er, wie die von Utzschneider ihm gesetzte stolze Grabschrift aussagt: approximavit sidera; es ist schon erwähnt worden, wie der geistvolle Steinheil, der Aeltere, zuerst die Apparate für die elektrische Telegraphie brauchbar zu gestalten wusste, wodurch er der Kultur einen der grössten Dienste erwies. Sollen dies Alles wirklich keine wissenschaftlichen Werke gewesen sein? In der That, seitdem auf vielen Gebieten die Praxis nicht mehr eine Empirie ist, sondern nichts Anderes als Wissenschaft, ist hierin die Grenze zwischen Theorie und Praxis nicht mehr zu bestimmen. Den Entscheid, ob eine Leistung eine wissenschaftliche ist oder nicht, liefert nur die dabei benützte Methode. Häufig gehört auch zur Herstellung nutzbarer Dinge auf wissenschaftlichem Wege mehr Geist und schöpferische Kraft als zu einer rein wissenschaftlichen Thätigkeit auf schon längst gebahnten Wegen. Und dass Steinheil bei seinen Arbeiten nach streng wissenschaftlicher Methode verfuhr, das weiss Jeder, der sie kennt.

Er hatte auch auf dem Höhepunkt seines Lebens die grosse Freude sich als Mann der Wissenschaft voll anerkannt zu sehen. Unsere Akademie, in welcher sich Männer befinden, die als erste Sachverständige auf dem Gebiete der Optik gelten, hat ihn im Jahre 1888 zum ausserordentlichen Mitgliede gewählt. Bei dem vorher erwähnten internationalen Congresse in Paris (1887), bei welchem die Methoden der

photographischen Aufnahmen des Sternhimmels festgesetzt werden sollten, hat der deutsche Optiker mit Alle überzeugender Klarheit und Sicherheit seine gereiften Anschauungen hierüber dargelegt, denen sich die illustre Versammlung einstimmig anschloss. Als im Jahre 1891 die internationale astronomische Gesellschaft dahier ihre Versammlung abhielt, konnte er den sachkundigen Gelehrten seine neue Werkstätte mit ihren vollendeten Einrichtungen zeigen; Alle haben damals die Ueberzeugung gewonnen, dass sie eine auf wissenschaftlicher Grundlage ruhende Anstalt gesehen haben. Ein Zeichen der Anerkennung seiner Verdienste um die Wissenschaft war es auch, dass er im Jahre 1887 zum Mitgliede des Kuratoriums der physikalischen-technischen Reichsanstalt, deren Vorstand Helmholtz ist, ernannt wurde, wo sein erfahrener unparteiischer Rath gerne gehört wurde.

In seiner Liebe zur Wissenschaft hat er in uneigennützigster Weise Alles zu ihrer Förderung gethan. Wie oft haben sich Astronomen und Physiker, welche zu einem besondern Zweck eines optischen Apparates bedurften, an Steinheil gewendet, der denselben ersann und herstellte, ohne für seine geistige Thätigkeit und besondere Mühe einen Preis in Ansatz zu bringen. Bei Gelegenheit der 100jährigen Geburtstagsfeier Fraunhofer's machte er zu Gunsten der hiesigen technischen Hochschule eine Stiftung von 10000 Mark zur Errichtung einer optischen Prüfungsstation, in welcher von sachkundiger Seite Prüfungen optischer Instrumente vorgenommen werden können; es war sein Wunsch dadurch den wissenschaftlichen Betrieb der Mechanik und Optik in München, wo die Werkstätten von Utzschneider, Fraunhofer, Reichenbach und Ertel blühten und in der Bevölkerung noch so viel Talent für solche Arbeiten sich findet, zu fördern; allerdings scheint von diesem hochherzigen Geschenk in weiteren Kreisen nichts bekannt geworden zu sein. Das gemeinschaftlich mit Ernst Voit herausgegebene verdienst-

volle Handbuch der angewandten Optik, an dem beide Autoren den gleichen Antheil haben, ist ein Hilfsbuch für den ausübenden Optiker, um ihm ein klares Bild von der Leistung optischer Systeme zu verschaffen und ihn in den Stand zu setzen, die Berechnung derselben mit wissenschaftlicher Strenge durchzuführen. Steinheil hat darin alle seine Methoden der Oeffentlichkeit preisgegeben, damit sie Gemeingut und Anderen nutzbar würden und es nicht so gehe, wie mit den leider verloren gegangenen Methoden Fraunhofer's. Wo aber fände sich ein zweiter, der in gleichem Falle so uneigennützig gehandelt hätte?

Durch die frühzeitige intensivste, lange Zeit sein ganzes Denken in Anspruch nehmende Beschäftigung mit einem besonderen Zweige des Wissens, ohne die er nie sein Ziel erreicht hätte, erhielt er scheinbar eine gewisse Einseitigkeit. Er besass jedoch auch für andere Dinge ein lebhaftes Interesse. Mit den einheimischen Pflanzen, Käfern und Schmetterlingen war er, wie sein Vater und Bruder, in seltenem Grade vertraut; er kannte genau ihre Fundorte und Lebensweise, so dass Spaziergänge mit ihm für den Naturfreund zu einem wahren Genusse wurden. Gerne und mit Verständniss folgte er Erörterungen über schwierige, noch nicht aufgeklärte Fragen aus ihm sonst ganz fremden Gebieten und wusste nicht selten den Kernpunkt zu finden und auf den richtigen Weg zu leiten. Der hiesigen Stadt hat er während 12 Jahren (1869—1881) als Gemeindebevollmächtigter namentlich durch seine rechnerischen Kenntnisse und seinen leichten Ueberblick bei Aufstellung des städtischen Haushaltes und auch auf dem Gebiete der Volksschule erspriessliche Dienste geleistet, wobei er sich die intimste Freundschaft des unvergesslichen Bürgermeisters Erhardt erwarb.

Das Bild von Steinheil's Wirken und Wesen wäre unvollständig, wenn man nicht auch seiner Charaktereigenschaften gedenken würde. Bei so Manchem entspricht die

Ausbildung des Charakters nicht der des Geistes; wir vermögen ihn ob letzterer zu bewundern, ihn aber ob ersterer nicht zu lieben. Steinheil ist durch ruhiges und tiefes Nachdenken über sich und die Welt sowie durch sein Handeln darnach zu einem der edelsten Menschen geworden.

Wer ihn nur oberflächlich kennen lernte, bemerkte an ihm eine auffallende, manchmal fast zu gross erscheinende Bescheidenheit. Diese hatte er nicht, weil er seine Person zu niedrig stellte, denn er wusste für sich im Stillen recht wohl, was er werth war; sie entsprang vielmehr einer gewissen Verlegenheit und Unbeholfenheit im Umgang mit Leuten, die ihm noch fremd waren, aber auch der aufrichtigen Hochachtung für jegliches Verdienst. Von einer ungewöhnlichen Milde im Urtheil gegen Andere hat ihn wohl Niemand in aufbrausendem Zorne gesehen; nur dann konnte er indignirt und sogar scharf seine Meinung äussern, wenn er eine Unwahrheit wahrnahm. Es währte darum lange, bis er von einem Menschen Böses dachte, aber es gelang schwer, wenn er einmal aus einem solchen Grunde gegen Jemanden eingenommen war, ihm eine bessere Meinung über ihn beizubringen.

Von einer unendlichen Liebe war er für seine Mitmenschen erfüllt. Von den reichen Mitteln, die er sich durch seinen Fleiss erworben, hat er den edelsten Gebrauch gemacht und unendlich viel Gutes und Segensreiches gestiftet. Vielen Menschen hat er geholfen und in einer Weise, dass sie die Wohlthaten nicht drückend, sondern als eine wahre Herzensfreude des Gebers empfanden. Für jeden seiner vielen Arbeiter war er ein sorgender Freund; sie wussten aber auch, was sie an ihm hatten und suchten es ihm durch treue Anhänglichkeit zu vergelten. Es war ein wahres Wort, was ein auswärtiger Fachgenosse an seinem Grabe aussprach: die soziale Frage wäre wohl bald gelöst, wenn alle Arbeitgeber so dächten und handelten wie Steinheil.

Sein Nachdenken hat ihn auch dazu geführt, die Welt trotz aller ihrer Unvollkommenheit als gut und weise eingerichtet zu betrachten, und er konnte gegen pessimistische Anschauungen lebhaft ankämpfen. Das Schlimme wusste er immer wieder zum Guten auszulegen und sich und Andere zu beruhigen. Das Unvermeidliche und das Unglück betrachtete er als nothwendige Folge der gegebenen Bedingungen, und er war sich klar darüber, dass der Mensch von der Natur nicht ausgenommen sei, sondern einen Theil derselben bilde. In diesem Sinne ertrug er die Abnahme seines Sehvermögens und den Verlust des einen Auges mit wahrhaftem Heldenmuth, während er der Verfeinerung dieses Sinnesorganes für die übrigen Menschen seine ganze geistige Kraft widmete.

Man kann ermessen, was ein Mann von solcher Gesinnung seinen Freunden sein musste. Er war für sie von unwandelbarer Treue, voller Theilnahme im Glück und Unglück, von geradezu rührender Aufmerksamkeit und Aufopferung. Sie allein haben die ganze Fülle von Edelsinn, dessen der nach Aussen hin so anspruchslos erscheinende Mann fähig war, erkennen können.

In einer Zeit, in welcher selbst in der Wissenschaft so Viele nicht mehr mit reinem Sinne ausschliesslich die Wahrheit suchen, sondern sie zu einem Tummelplatz niedriger egoistischer Leidenschaften machen, erfreut und erhebt man sich an dem Lebensbilde eines nur dem Idealen zugewandten Mannes wie Steinheil. Er hat die ihm verliehenen Gaben dazu benützt, unser Wissen und Können zu vermehren, und indem er Andere beglückte, ist er selbst glücklich gewesen.

Ernst Eduard Kummer.

Ernst Eduard Kummer[1]) war geboren zu Sorau in der Niederlausitz hart an der schlesischen Grenze den 29. Januar 1810. Schon 1813 verlor er seinen Vater und der Mutter fiel es bei knappen Mitteln schwer, ihn studiren zu lassen.

Er besuchte das Gymnasium seiner Vaterstadt und bezog 1828 die Universität Halle, wo er unter der Leitung von Professor Scherk sich der Mathematik widmete. Im 3. Studienjahre löste er eine mathematische Preisfrage und wurde auf Grund dieser Arbeit 1831 zum Doktor promovirt.

Von 1832—1842 wirkte Kummer als Gymnasiallehrer in Liegnitz. Hier legte er den Grund zu seinem künftigen Ruhme durch verschiedene Arbeiten, vorzugsweise dem Gebiete der Reihenlehre und der Integralrechnung angehörig; hervorzuheben ist hier das Liegnitzer Programm „Ueber eine Differentialgleichung 3. Ordnung" 1834, und ganz besonders seine Arbeit über die hypergeometrische Reihe (1836), in welcher er die berühmte Abhandlung von Gauss über diese Reihe fortsetzte und in würdiger Weise ergänzte. Diese Arbeiten verschafften ihm schon 1839 die Ernennung zum correspondirenden Mitglied der Berliner Akademie und 1842 die Berufung an die Universität Breslau.

In der Breslauer Periode von 1842—55 waren es zumeist zahlentheoretische Untersuchungen, die ihn beschäftigten. Auf diesem abstrakten Gebiete zeigte sich ganz besonders sein Scharfsinn und das tiefe Eindringen seines Geistes. Seine Abhandlung „über die aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen" (1845), in welcher er den neuen Begriff der „idealen complexen Prim-Faktoren" einführt und genau definirt; seine Untersuchungen über einen

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Gustav Bauer.

Satz von Fermat, dessen allgemeinen Beweis er zuerst erbrachte (1850), verschafften ihm den grossen Preis der Berliner Akademie.

Wie hoch damals das Ansehen Kummer's gestiegen war, geht wohl am besten daraus hervor, dass er 1855 Nachfolger Dirichlet's an der Berliner Universität, wie in der Akademie wurde. Es ist bemerkenswerth, dass Kummer in dieser letzten Periode seines Wirkens sich von den abstrakten Problemen der Zahlentheorie immer mehr den concreteren Problemen der Geometrie zuwandte. In diese Periode fällt seine berühmte Abhandlung „Ueber die allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlsysteme“ (1860); seine Abhandlung über Flächen 4. Grads, auf denen Schaaren von Kegelschnitten liegen, und 1864 die Entdeckung der Fläche 4. Ordnung, die durch eine merkwürdige Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen ausgezeichnet ist und als „Kummer'sche Fläche“ allen Mathematikern bekannt ist. Auch auf das Gebiet der Physik griff er über; seine Untersuchung über Strahlsysteme führten ihn auf die atmosphärische Strahlenbrechung; seine Vorträge an der Kriegsschule über ballistische Probleme auf physikalische Untersuchungen über den Luftwiderstand.

Kummer war ein ausgezeichneter Lehrer und hatte Freude am Lehren. Erst im Alter von 74 Jahren stellte er seine Vorlesungen ein und lebte fortan in stiller Zurückgezogenheit nur für seine zahlreiche Familie, bis ihn 9 Jahre später am 14. Mai 1893 ein Anfall von Influenza dahinraffte. Er war lange Zeit das Haupt der Berliner mathematischen Schule und der bedeutendste Vertreter dieser Wissenschaft in Deutschland.

Moritz Abraham Stern.

Moritz·Abraham Stern[1]) war ein Schüler von Gauss und verbrachte seine ganze Gelehrten-Laufbahn als Professor der Mathematik zu Göttingen. Seit 1850 Mitglied unserer Akademie, hatte er das seltene Glück weit über das gewöhnliche Zeitmaass hinaus für die Wissenschaft thätig sein zu können. Seine zahlreichen und werthvollen Arbeiten, fast sämmtlich in dem Crelle'schen Journal veröffentlicht, erstrecken sich auf einen Zeitraum von 60 Jahren und ziehen sich durch 100 Bände des Journals hindurch. 1830 erschien seine erste Arbeit im 6. Bande des Journals und 1890 seine letzte im 106. Bande. Die meisten seiner Arbeiten, darunter auch seine erste und seine letzte Publikation, liegen auf dem Gebiete der höheren Arithmetik oder Zahlentheorie. Andererseits aber verdankt man ihm viele schätzbare Untersuchungen in verschiedenen Theilen der algebraischen Analysis, so insbesondere über die Theorie der Bernoulli'schen Zahlen und über die Theorie der Kettenbrüche. Ferner gehört hieher seine Abhandlung „über die Auflösung der transscendenten Gleichungen“, eine von der königlich dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönte Preisschrift (1840), und, als wichtige Ergänzung hiezu, seine Abhandlung „Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transscendente Gleichungen“ (1846). Als selbständiges Werk erschien 1860 sein vortreffliches und allbekanntes „Lehrbuch der algebraischen Analysis“. Er ist im 87. Lebensjahre am 30. Januar 1894 zu Zürich im Hause seines Sohnes, des Historikers Alfred Stern, gestorben.

---

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Gustav Bauer.

John Tyndall.

In den weitesten Kreisen bekannt war der hervorragende englische Physiker und Naturforscher John Tyndall, der am 4. Dezember 1893 auf seinem Landsitze Hind Head bei Haslemere im 74. Lebensjahre verschieden ist. Er konnte sich nicht wie so viele seiner mit Glücksgütern gesegneten Landsleute sorgenlos seiner Ausbildung und seinen ersten Studien hingeben, denn armer Leute Kind musste er sich die Mittel dazu selbst erwerben. Er war zuerst als Gehilfe bei der trigonometrischen Vermessung Englands und dann beim Eisenbahnbau beschäftigt, wodurch er nach zehnjähriger Arbeit sich so viel erspart hatte, um das ersehnte Ziel, eine Universität besuchen und naturwissenschaftliche Studien betreiben zu können, zu erreichen. Es ist ein für unsere Universitäten ehrenvolles Zeugniss, dass ein Mann wie Tyndall nach Deutschland kam, um sich Wissen zu erwerben. Er begab sich zunächst, schon 28 Jahre alt, mit seinem Landsmann Frankland nach Marburg, wo er neben Mathematik und Physik die Chemie bei dem vorzüglich auf dem Grenzgebiete der Physik und Chemie thätigen Bunsen betrieb und auch die Doktorwürde erwarb. Darauf ging er nach Berlin, um bei Gustav Magnus zu arbeiten, in dessen Laboratorium damals eine ungewöhnlich grosse Anzahl talentvoller junger Naturforscher mit Problemen der Physik beschäftigt war. Tyndall untersuchte daselbst die Erscheinungen an einem Wasserstrahl, dann in Gemeinschaft mit Knoblauch, dem jetzigen verdienstvollen Präsidenten der Kais. Leopoldinischen Akademie der Naturforscher, das Verhalten krystallisirter Körper zwischen den Polen eines Magneten.

Diese Arbeiten, welche ein ungewöhnliches Talent verriethen, lenkten die Aufmerksamkeit der englischen Gelehrten auf den aufstrebenden Physiker; denn nach seiner Rückkehr nach England erhielt er alsbald eine Lehrstelle am Queenwood

College, dann an der Royal Society und im Alter von 33 Jahren die Professur der Physik an der Royal Institution zu London als der Nachfolger des genialen Thomas Young und von Faraday, des grössten Experimentators seiner Zeit. Und nun begann für Tyndall eine an Erfolgen reiche wissenschaftliche Thätigkeit. Seine rein physikalischen Forschungen erstreckten sich über fast alle Theile dieser Wissenschaft; man verdankt ihm namentlich die wichtigsten Bereicherungen der Lehren von dem durch Faraday entdeckten Diagmagnetismus, der Polarisation des Lichtes, der Wärmestrahlung und der Akustik.

Tyndall hat sich jedoch nicht nur auf dem Gebiete der Physik Verdienste erworben; er war ein umfassender Geist, der überall in der Natur Probleme für seine Forschung fand.

Er hat sich bei der Lösung der so ungemein wichtigen Frage nach der Entstehung der niedersten Organismen betheiliget, ob dieselben sich aus den Nährlösungen von selbst, durch sogenannte Urzeugung bilden können oder ob ihr Auftreten stets einen schon vorhandenen Keim oder eine Organisation voraussetzt. Es gelang ihm als einem der ersten in der Luft das Vorkommen von Milliarden von Keimen nachzuweisen, welche auch da noch sich finden, wo man sie früher zerstört zu haben glaubte; auch gab er im Anschlusse an die Versuche von Schwann, M. Schultze, Schröder und Dusch, Hofmann etc., Methoden an, durch welche man jene Keime sicher zu tödten vermag. Er hat sich dadurch, namentlich durch seine Abhandlung über Staub und Krankheit, um die Ausbildung der jetzigen Lehre von der Fäulniss und Gährung, wodurch man auch ganz andere Anschauungen über die niedersten Organismen als Krankheitserreger erhalten hat, sehr verdient gemacht. Er war der Ansicht, die ersten Keime des Lebendigen wären durch Meteore von entwickelteren Weltkörpern auf unsere Erde gebracht worden.

Von mächtiger Wirkung waren seine auf mühsamen Wanderungen gemachten Beobachtungen über das Entstehen

und die Natur der Gletscher, über die Bewegung derselben und über die physikalischen Eigenschaften sowie die Bildung des Eises. Es haben diese seine Forschungen viel zu der regen wissenschaftlichen Untersuchung der Alpen beigetragen.

Auch ist sein Antheil an der Feststellung und der Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, welches er in allen seinen Schriften consequent durchführte, zu erwähnen.

Sehr bemerkenswerth und von grossem Erfolge begleitet waren Tyndall's Bemühungen, das durch die Wissenschaft Erkannte dem Volke in verständlicher Weise zugänglich zu machen; er wollte das Wissen verbreiten, um das leibliche und geistige Wohl des Menschengeschlechtes zu fördern. Als eifriger Wanderlehrer hielt er durch Klarheit der Darstellung und Gedankenreichtum wahrhaft mustergiltige Vorträge: über die Wärme, den Schall, das Licht, die Elektrizität etc. welche auch durch treffliche Uebersetzungen seiner Fachgenossen und Freunde Helmholtz und Wiedemann dem deutschen Publikum bekannt geworden sind.

Tyndall war ein tiefer Denker, der sich nicht nur mit den nächsten Ursachen einer Erscheinung befasste, sondern auch die gemeinschaftliche Ursache für eine grössere Gruppe von Erscheinungen zu finden trachtete, und sich viel mit der Frage der Wege und der Grenzen der menschlichen Erkenntniss abgab. Eine zur Eröffnung der Jahresversammlung der British Association zu Belfast gehaltene Rede über Naturwissenschaft und Offenbarung rief leidenschaftliche Anklagen der Orthodoxen gegen ihn hervor; man wird in späteren Jahren nicht mehr verstehen, wie es möglich war, die Naturforscher zu bekämpfen, welche in ihrer Wissenschaft ausschliesslich die Erscheinungen festzustellen und die Ursachen der Dinge zu suchen haben, aber in der Offenbarung kein Objekt für ihre Forschung finden.

Tyndall hat durch seinen Aufenthalt an deutschen Uni-

versitäten das Wesen der deutschen Naturforscher näher kennen und schätzen gelernt und namentlich durch seine Freundschaft mit Helmholtz die Beziehungen der englischen und deutschen Gelehrten inniger gestaltet und dadurch beiden Theilen wesentliche Dienste erwiesen. Es ist mit Tyndall ein Forscher von grossem Scharfsinn und von unermüdlicher Ausdauer in der Arbeit dahingegangen, der die Wissenschaft über Alles liebte und in uneigennützigster Weise seine Mittel zu ihrer Unterstützung sowie zur Beförderung des Wohles der Menschheit verwendete. Man wird ihn stets zu den bedeutendsten Naturforschern unserer Zeit zählen.

Heinrich Rudolf Hertz.

Durch den am 1. Januar 1894 erfolgten frühzeitigen Tod des Professors der Physik an der Universität zu Bonn, Heinrich Rudolf Hertz, hat die Naturwissenschaft einen der schmerzlichsten Verluste erlitten.

Hertz wollte sich anfangs dem Baufache zuwenden und besuchte zu diesem Zwecke die technischen Hochschulen zu Dresden und Berlin; aber immer mehr trat bei ihm die lebhafteste Neigung für die Mathematik und die Physik hervor, so dass er sich bald ganz dem Studium derselben, zuerst in München und dann in Berlin bei Helmholtz, widmete. In kürzester Zeit hatte sich der ausserordentlich talentvolle junge Mann, namentlich durch seine mit grösstem Scharfsinn erdachten und mit seltener Beherrschung der Mittel durchgeführten elektrischen Versuche an die Spitze der Physiker gestellt. Nachdem schon vor ihm Manche, wie Faraday und besonders Maxwell, gewisse Beziehungen des Lichtes und der Elektrizität angenommen und glaublich zu machen versucht hatten, ferner Bezold dieselben durch höchst bemerkenswerthe, von Hertz voll anerkannte Versuche erwiesen hatte, gelang es Letzterem den sicheren Beweis des innigen Zusammenhanges von Licht und Elektrizität zu führen. Er zeigte in

seinem berühmten Buche „über die Ausbreitung der elektrischen Kraft“, dass die elektrischen Wirkungen sich wie die Lichtwellen ausbreiten, dass sie ebenfalls auf Schwingungen des Aethers beruhen, dass die elektrischen und magnetischen Schwingungen wie die des Lichtes transversale sind, dass sie sich mit der nämlichen Geschwindigkeit wie die des Lichtes fortpflanzen, dass sie durch metallische Wände reflektirt, durch Hohlspiegel gesammelt, durch Prismen aus Asphalt gebrochen werden, durch Isolatoren wie die Lichtwellen durch Glas hindurchgehen, und die Erscheinungen der Polarisation zeigen können. Er hat die Länge der elektrischen Wellen gemessen und gefunden, dass sie viel grösser sind wie die Lichtwellen und eine Länge von mehreren Metern besitzen. Die Wellenbewegungen von einer sehr grossen Anzahl von Schwingungen in der Sekunde erregen unsere Netzhaut und bringen in uns die Empfindung des Lichtes hervor, bei einer geringeren Anzahl von Schwingungen haben wir die dunkeln Wärmestrahlen mit ihrer Wirkung auf die Thermosäule, und bei einer noch geringeren Anzahl die elektrischen Wellenerscheinungen.

Durch das hohe Interesse, welches diese Entdeckungen von Hertz bei jedem denkenden Menschen erregen mussten, ist sein Name auch ausserhalb der engeren Fachkreise weithin bekannt geworden; man durfte die grössten Hoffnungen in die fernere Thätigkeit des noch nicht 37 Jahre alten, in vollster geistiger Kraft stehenden Forschers setzen, welche nun durch sein Hinscheiden vernichtet sind.

Hertz war eine vornehme Natur, von edelster Gesinnung und tief bescheidenem Wesen. Noch wenige Wochen vor seinem Tode hat der schwer leidende Mann in einem an mich gerichteten Schreiben (vom 26. November 1893), in welchem er mich ersuchte, der Akademie, die ihn zu ihrem Mitgliede erwählte hatte, seinen Dank auszusprechen, dieser Bescheidenheit den rührendsten Ausdruck gegeben. Ich

kann es mir nicht versagen, in diesen seinem Andenken gewidmeten Zeilen seine Worte wiederzugeben; er schreibt: „Gleichzeitig aber bitte ich Sie auch, freundlichst der Vermittler meines Dankes an die Akademie selbst sein zu wollen, welche mir eine so grosse Freude bereitet hat und mir eine Ehre erwiesen hat, die mir unendlich theuer ist. Mit gerechtem Stolze erfüllt mich der Gedanke, nun in einen Kreis aufgenommen zu sein und ihm zugerechnet zu werden, welcher mir, wie ich mich wohl erinnere, schon während meiner Studienzeit in München als eine hoch und unerreichbar über mir schwebende Verkörperung idealen wissenschaftlichen Strebens erschien. Mit Schmerz erfüllt es mich freilich auch, dass ich nun in diesem Kreise nicht mehr diejenigen Männer begrüssen kann, welche damals in engerem Sinne meine Lehrer waren; vor allen wünschte ich gar zu gern den von mir hochverehrten v. Beetz noch als Collegen die Hand schütteln zu können, dessen einfache Gewissenhaftigkeit in der Forschung und milde Freundlichkeit als Lehrer mir immer als Vorbild vorgeschwebt hat. Doch dies liegt im natürlichen Lauf der menschlichen Dinge und auch so fühle ich durch diese Aufnahme dankbar die Vorstellungen und Empfindungen in mir aufleben, mit welchen es mir vergönnt war, mich in München zuerst der reinen Wissenschaft zuzuwenden".

Für alle Zeiten wird man gedenken, dass Hertz es war, der das neue grosse Gebiet der elektrischen Wellen und Strahlen durch Experimente erschlossen hat, welche der Ausgangspunkt für heute noch ungeahnte weitere Erkenntnisse sein werden.

Alexander Theodor v. Middendorff.

Der angesehene russische Naturforscher und Reisende Alexander Theodor von Middendorff ist am 28. Januar 1894 auf seinem Gute zu Hellenorm in Livland in einem Alter

von $78^1/_2$ Jahren nach Vollendung seiner Lebensaufgabe gestorben. In St. Petersburg geboren, studirte er an der Universität Dorpat Medizin und erwarb sich daselbst den Grad eines Doktors der Heilkunde. Seine Begabung sowie auch die Neigung noch wenig bekannte Länder zu sehen und deren Fauna und sonstige Eigenart kennen zu lernen, führten ihn zu eingehenden naturwissenschaftlichen Studien, welche er an den Universitäten zu Berlin, Erlangen, Wien und Breslau eifrig oblag. Durch dieselben wohl vorbereitet, wurde er nach der Rückkehr in sein Vaterland zum Adjunkten des Professors für Zoologie an der Universität Kiew bestellt, begann aber ein Jahr darauf im Alter von 25 Jahren seine umfassenden Reisen, für welche er durch glückliche Eigenschaften des Körpers und Geistes in hohem Grade geeignet war.

Die erste Reise führte ihn mit der von Carl Ernst v. Baer geleiteten Expedition an das weisse Meer und nach Lappland, wo ihm die Aufgabe zufiel, die Vogelwelt des hohen Nordens zu studieren. Dadurch wurde man in den Kreisen der kais. russischen Akademie der Wissenschaften auf ihn aufmerksam und erwählte ihn, nachdem er vorher zum ausserordentlichen Professor der Zoologie in Kiew ernannt worden war, zum Leiter der auf Veranlassung der Akademie ausgesandten grossen Expedition in den äussersten Norden und Osten Sibiriens, wobei er durch das Pamirland bis an den Amur vordrang. In Folge der glücklichen Ergebnisse dieser kühnen und für die Naturgeschichte überaus fruchtbaren Reise wurde er Adjunkt für Zoologie an der Petersburger Akademie, dann ausserordentliches und ordentliches Mitglied und später Sekretär und Ehrenmitglied dieser Akademie, zu deren bekanntesten Mitgliedern er zählte. Er hat darnach noch mehrere Reisen gemacht; mit dem Grossfürsten Alexis Alexandrowitsch nach der Krim und durch das Mittelmeer nach Teneriffa, Orotava und den Cap Verdischen Inseln; dann mit dem Grossfürsten Wladimir Alexandrowitsch in das mittlere und südliche

Sibirien an den Altai bis zur chinesischen Grenze; mit dem Grossfürsten Alexei nach dem Norden Russlands, nach dem Weissen Meer, Nowaja Semlja und Island; hierauf noch seine berühmte Reise in das Ferghana-Gebiet und endlich eine letzte abermals in den Norden Russlands.

Die Resultate dieser Fahrten, welche er in grösseren Werken beschrieb, waren für die Kenntniss Russlands, seine geologischen, geographischen, ethnographischen und meteorologischen Verhältnisse und für die Wissenschaft sehr nützlich. Vor Allem wichtig sind die ornithologischen Ergebnisse der Lappländer Reise; die Funde der Reise in den äussersten Norden und Osten Sibiriens, bei deren Bearbeitung er die zoologische Abtheilung übernommen hatte, welche eine würdige Ergänzung zu den früheren Arbeiten von Pallas bildet; die Beschreibung der Barobinzensteppe im asiatischen Russland, die Untersuchung des Golfstroms ostwärts vom Nordkap und seine Einblicke in das Ferghanathal im Süden von Turkestan. Von besonderer Einsicht und kritischer Schärfe zeugen ferner die Untersuchungen an Schädeln des gemeinen Landbären als Beleuchtung der Streitfrage über die Arten fossiler Landbären; die Beiträge zur Malacozoologia rossica waren für die Kenntniss der Thierwelt des russischen Reiches von Bedeutung; auch sind seine Angaben über die Wahrscheinlichkeit eines im Vergleich mit dem Meerwasser der Jetztzeit höheren Gehaltes an Bittererde in dem Wasser vieler Meere der Juraperiode, sowie seine Untersuchung über die Temperaturen im Scherginschacht zu Jakutzk hervorzuheben.

Middendorff hat sich durch diese Arbeiten einen wohlverdienten Ruf als Naturforscher, Geograph und Ethnograph gemacht.

Peter Josef van Beneden,

Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität Löwen, eines der thätigsten Mitglieder der belgischen Akademie und einer der bedeutendsten Naturforscher seines Vaterlandes, ist am 8. Januar 1894 im hohen Alter von 84 Jahren gestorben. Er hatte wie so viele andere Naturforscher anfänglich Medizin studirt, interessirte sich aber von früh an lebhaft für die Organisation der Thiere. Sein Name wurde zuerst bekannt durch die wichtigen Studien über die Fauna der belgischen Nordsee, wozu er sich aus eigenen Mitteln in Ostende ein Laboratorium und ein Aquarium eingerichtet hatte, als erste am Meere gelegene zoologische Station in Europa. Seine grösste Leistung waren seine Untersuchungen über die Parasiten des Thierkörpers; in seinem grossen Werke über die Geschichte der Entwicklung der innerlichen Würmer hat er die vielfachen Umgestaltungen und die sonderbare Vermehrung der Eingeweidewürmer als einer der ersten nachgewiesen und den feineren Bau, sowie die Entwicklung, die Metamorphosen, die Fortpflanzung und die ganze Lebensgeschichte dieser Thiere auf das Genaueste beschrieben. Gleichzeitig mit unserem verstorbenen Collegen von Siebold, oder eigentlich schon vorher, hatte van Beneden die entozootische Fauna der ozeanischen Fische, besonders der Rochen und Haie, untersucht und gezeigt, dass die als blosse Köpfe oder finnenartige Parasiten in verschiedenen Organen vorkommenden Bandwurmköpfe (Tetrarhynchusköpfe) aus wandernden Embryonen hervorgehen und sich dann in dem Darmkanal von Fischen, welche dieselben mit den Wirthen verschlungen haben, durch Gliederbildung in die geschlechtsreifen Formen verwandeln. Dadurch lieferten van Beneden und Siebold den Beweis für Steenstrup's Anschauung über den Generationswechsel, nach welcher der Kopf des Bandwurmes eine larvenartige Amme ohne Geschlechtstheile dar-

stellt, die Glieder aber die Geschlechtsthiere repräsentiren. Es existirt somit in einem gewissen Stadium der Entwicklung von den späteren Bandwürmern nur der selbständig lebende sogenannte Kopf (Scolex), der allmählich unter günstigen Verhältnissen an seinem hinteren Ende ein Glied nach dem anderen hervortreibt. Die in den Organen abgelagerten Blasenwürmer hatte Siebold für pathologische Gebilde gehalten, während van Beneden darthat, dass sie sich an die Tetrarhynchusköpfe anschliessen und unreife Zustände der Bandwürmer darstellen, die sich ebenfalls dann im Darm geeigneter Thiere in Bandwürmer verwandeln.

Diese seine Untersuchungen haben die Annahme einer Urzeugung, welche man bei den Eingeweidewürmern noch am längsten festgehalten hatte, da man deren Entstehung aus vorhandenen Eiern nicht nachzuweisen im Stande war, erschüttert und gestürzt. Die französische Akademie krönte sein Werk mit dem grossen Staatspreise für Naturwissenschaft.

van Beneden stellte in einer bedeutsamen Arbeit den Unterschied zwischen Parasitismus und Commensalismus in der Thierwelt auf; die bei dem Menschen und den Hausthieren nicht vorkommenden Commensalen sind darnach nur scheinbare Parasiten, Geschöpfe, die zwar ganz nach Parasitenart auf grösseren Thieren leben und durch ihre Organisation den Parasiten ähneln, aber doch keine Schmarotzer sind, indem sie nicht von den Säften und Geweben ihres Trägers sich nähren, sondern als Mitesser von den Nahrungsstoffen desselben zehren.

In einer späteren Abhandlung beschrieb er die lebenden und fossilen Walfische, zu welchem Zwecke er sich an mehreren Expeditionen zum Fange dieser grossen Säuger betheiligte. Auch als Paläontologe hat er sich verdient gemacht, indem unter seiner Leitung die bei den Befestigungsarbeiten von Antwerpen ausgegrabenen fossilen Ueberreste von Seethieren präparirt und aufgestellt wurden.

van Beneden gehört zu den Begründern der heutigen vergleichenden Anatomie; er war einer der Ersten, der die Zoologie aus den Fesseln einer bloss äusserlichen Beschreibung der Arten befreien half.

Alphonse de Candolle.

Am 4. April 1893 ist zu Genf der berühmte Botaniker Alphonse de Candolle[1]) aus dem Leben geschieden. Er hat vor Allem das Verdienst die von seinem Vater Pyramus de Candolle begonnenen grossen systematischen und pflanzengeographischen Unternehmungen in der erfolgreichsten Weise fortgesetzt zu haben. Durch den Einfluss des Vaters, in dessen Besitz sich umfassende Pflanzensammlungen und eine werthvolle Bibliothek befanden, wurde die Neigung zur Botanik in ihm erweckt; aber nachdem er anfangs an der Universität zu Genf Vorlesungen über Philosophie, beschreibende Naturwissenschaften und Physik gehört hatte, veranlasste ihn in den damaligen kritischen Zeiten der Vater vorerst die Jurisprudenz zu absolviren und den juristischen Doktorgrad zu erwerben, um sich eine sichere Lebensstellung zu verschaffen. Erst darnach gab er sich ausschliesslich den botanischen Studien unter der Leitung seines Vaters hin. Bald vermochte er den Letzteren in dem akademischen Unterrichte zu unterstützen, so dass er schon im Alter von 29 Jahren als sein Nachfolger erwählt wurde, nachdem jener sich von dem Lehramte zurückgezogen hatte, um ganz seinen wissenschaftlichen Unternehmungen sich widmen zu können. Nach dem Tode des Vaters war er der Erbe des Herbariums, der Bücher und der Aufzeichnungen desselben; er hatte aber damit auch die Verpflichtung ererbt, dieselben im Sinne des Verblichenen fortzuführen und für die Wissenschaft nutzbar zu machen. Dies hat er nun auch in einer so freigebigen

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Ludwig Radlkofer.

und uneigennützigen Weise gethan, wie es noch nie von einem Botaniker geschehen war. Im Alter von 44 Jahren wurde er zu seinem Schmerz durch politische Einflüsse genöthigt, seiner Professur und der Vorstandschaft des botanischen Gartens zu Genf zu entsagen, was aber seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu Gute kam, ja sie in ihrer Ausdehnung erst ermöglichte.

Es sind vorzüglich zwei Werke, durch welche Alphonse de Candolle sich schwerwiegende Verdienste um die Wissenschaft erworben hat, jedes für sich ausreichend, um dem Manne die dauernde Dankbarkeit der Fachgenossen zu sichern und ihm eine Stelle unter den ersten Förderern der Wissenschaft zu gewinnen: der von seinem Vater im Jahre 1826 begonnene, von A. de Candolle (von dem im Jahre 1844 erschienenen VIII. Bande ab) fortgesetzte und im Jahre 1873 (mit dem XVII. resp. XX. Bande für die Dicotyledonen) abgeschlossene Prodromus systematis naturalis regni vegetabilis (gefolgt von den Suites au Prodromus für die Monocotyledonen etc.); ferner dessen Géographie botanique raisonnée (1855).

Durch das erstere, grosse allgemeine Pflanzenwerk, von welchem er selbst wesentliche Theile verfasste, und zu dessen Durchführung es trotz des Zaubers, den der Name de Candolle auf die Systematiker ausübte, einer zielbewussten Ausdauer und Energie bedurfte, wie sie eben A. de Candolle auszeichnete, hat derselbe der Gewächskunde ein tieferes Fundament geschaffen, welchem er die grösstmögliche Festigkeit und Nutzbarkeit dadurch zu geben verstand, dass er ihm ein jederzeit erneuter Berathung zugängliches Archiv, eine Sammlung naturhistorischer Dokumente zur Seite stellte, indem er in dem Herbarium Prodromi soviel nur immer möglich und in einem Maasse, wie es bis dahin noch nirgends geschehen war, ein reiches Material für die Bearbeitung der einzelnen Familien zu vereinigen und nach der Bearbeitung für die Dauer niederzulegen bestrebt war. Es bedurfte in einer Zeit, in welcher

die systematische Arbeit durch die in den Vordergrund getretene anatomische und entwicklungsgeschichtliche Richtung eine wesentliche Einbusse erlitten hatte und noch fern von dem jetzt durch die Anwendung eben dieser Richtungen auf sie gewonnenen Aufschwunge war, der ganzen Hingebung eines für die ererbte Aufgabe begeisterten Mannes, wie A. de Candolle, um dieselbe zu entsprechendem Ende zu führen. Nach dem richtigen, in seiner „Phytographie" 1883 gemachten Ausspruche A. de Candolle's selbst, dass die systematisch-descriptiven Werke am längsten ihren Werth behalten, mag man getrost den Prodromus als das wichtigste Werk de Candolle's betrachten, wenn er auch nicht lediglich, wie seine Pflanzengeographie, ihm selbst seinen Inhalt verdankt. Mit demselben hängt auch A. de Candolle's verdienstvolle Arbeit bezüglich der gesetzmässigen Regelung der botanischen Nomenclatur (unter Sanctionirung durch den internationalen botanischen Congress zu Paris im Jahre 1867) zusammen.

Durch das zweite, durch Alexander von Humboldt's Schriften über die Verbreitung der Pflanzen sowie durch die Arbeiten seines Vaters angeregte Werk, die Geographie botanique, erscheint A. de Candolle gleichsam als der Schöpfer der pflanzengeographischen Disziplin, insoferne sich dieselbe die Erforschung der ursächlichen Momente für die gegenwärtige Vertheilung der Pflanzenwelt auf der Erdoberfläche zum Ziele setzt. Um das „Rerum cognoscere causas", wie er direkt hervorhob, handelte es sich ihm dabei, und nicht bloss, was bis dahin im Wesentlichen die Pflanzengeographie ausmachte, um die Registrirung und Schilderung der thatsächlichen Verhältnisse in der Vertheilung der Pflanzen. Er wendete namentlich der Abhängigkeit der Pflanzenvertheilung von dem Einflusse der Wärme und des Lichtes sein Augenmerk zu und nahm zugleich entsprechende Rücksicht auf die damals bereits bekannt gewordenen geologischen Befunde, jedoch nicht ohne entsprechende Vorsicht bei ihrer

Verwerthung zu üben und zu verlangen. Mit besonderer Vorliebe ging er der Vertheilung und dem Ursprunge der Kulturpflanzen nach, über welche er noch in seinem 77. Jahre (1883) eine besondere, in den weitesten Kreisen geschätzte Arbeit (Origine des plantes cultivées) lieferte, welche ebenso seinen unermüdlichen Fleiss wie seinen kritischen Sinn hervortreten lässt.

Eine besonders originelle Schrift ist seine: Histoire des sciences et des savants depuis deux siècles, suivies d'autres études sur des sujets scientifiques, en particulier sur la sélection dans l'espèce humaine (1873), in der er in geistreicher Weise die Leistungen der Gelehrten aus ihren Eigenschaften abzuleiten suchte.

Die Werke de Candolle's sind auf eine durch einen erstaunlichen Fleiss und eine musterhafte Genauigkeit und Treue der Untersuchung gewonnene umfassende Erfahrung gegründet: sie werden daher einen für alle Zeiten bleibenden Werth in der botanischen Wissenschaft besitzen.

Arcangelo Scacchi [1])

geboren den 9. Februar 1810 in Gravina (Bari) auf Sizilien, Senator des Königreichs Italien, Professor der Mineralogie an der Universität und Direktor des mineralogischen Museums zu Neapel, seit 1867 auswärtiges Mitglied unserer Akademie, starb am 11. Oktober 1893 in Neapel, wo er mehr als 50 Jahre hindurch gewirkt hatte.

Am meisten bekannt ist Scacchi wohl durch seine Arbeiten über den Vesuv. Seit 1842 widmete er seine Zeit dem Studium der Eruptionen dieses Vulkans und der Produkte desselben, und ihm verdanken wir wesentlich die Kenntniss der grossen Mannigfaltigkeit von Mineralien, welche sich theils als sublimative Bildungen auf den Laven des Kraters,

1) Nach Mittheilungen von Herrn Collegen Paul Groth.

theils in den zahlreichen Auswürflingen der Somma, hier meist metamorphischer Entstehung, finden. Nicht nur von den früher bereits bekannten Mineralien lieferte er eingehendere Untersuchungen, welche, wie die berühmte Arbeit über die Humitgruppe, die Grundlage jedes weiteren Studiums derselben geworden sind, sondern auch die Entdeckung zahlreicher neuer Mineralien, zum Theil noch gar nicht bekannter chemischer Verbindungen, war das Ergebniss seiner Vesuvstudien, welche besonders bei den sehr vergänglichen Sublimationsprodukten mit grossen Schwierigkeiten verbunden waren. Trotzdem war er stets darauf bedacht, jene in solchen Mengen zu sammeln, dass sie nicht nur zu seinen Untersuchungen und zur Bereicherung des von ihm geleiteten Museums dienen konnten, sondern ihn auch in den Stand setzten, seinen Fachgenossen in reichlichem Maasse davon mitzutheilen. Dies that Scacchi nun in einer selten liberalen Weise und ermöglichte dadurch auch eine Reihe wissenschaftlicher Arbeiten Anderer über Vesuvmineralien, ebenso wie er gern fremde Sammlungen durch Abgabe von Mineralien unterstützte. So verdankt auch die hiesige Sammlung, an älteren Vorkommnissen des Vesuv wohl eine der reichsten ausserhalb Italiens, ihm wesentliche Vervollständigung durch seltene neuere Vorkommen. In chemisch-geologischer Beziehung nicht minder wichtig, als seine Studien am Vesuv, war seine Untersuchung der fluorhaltigen Auswürflinge der bis dahin unbeachteten kleinen Vulkane, welche die Tuffe von Sarno und Nocera in der Campagna hervorgebracht haben, weil diese über Fumarolenwirkungen belehrten, welche eine merkwürdige Aehnlichkeit ihrer chemischen Produkte mit gewissen, in den ältesten massigen Gesteinen, besonders den Graniten, vorkommenden Mineralbildungen zeigen.

Neben diesen mineralogischen und geologischen Studien beschäftigten Scacchi zahlreiche und umfangreiche Arbeiten auf dem Gebiete der chemischen Krystallographie. Seine

mit höchster Sorgfalt angestellten Beobachtungen über die Schwankungen der Flächenwinkel der Krystalle und die Verschiedenheiten der physikalischen und krystallographischen Eigenschaften chemisch übereinstimmender Körper führten ihn auf theoretische Vorstellungen, welche er in seinen Publikationen über „Polyedrie“ und „Polysymmetrie“ niederlegte. Wenn diese Vorstellungen auch heute nicht mehr als anerkannte gelten können, so behalten doch seine Beobachtungen selbst stets hohen Werth in Folge der geradezu mustergiltigen Sorgfalt, mit welcher dieselben angestellt und in Wort und Bild wiedergegeben sind, so dass es möglich ist, sie in ganzem Umfange als thatsächliche Grundlagen der inzwischen aus den Fortschritten der Wissenschaft sich ergebenden Anschauungen zu benutzen. Namentlich enthalten seine Arbeiten über die rechts- und linksweinsauren Salze ein hochinteressantes und bisher noch viel zu wenig berücksichtigtes Material von Beobachtungen über gewisse merkwürdige Hemiedrieverhältnisse, welche erst in neuester Zeit als theoretisch möglich anerkannt, von ihm aber schon vor Jahrzehnten richtig beobachtet und beschrieben worden waren, so dass diese Arbeiten in nicht geringerem Grade, als die zuerst erwähnten, für alle Zeiten eine grosse Bedeutung für die Entwicklung der Krystallographie behalten werden.

Scacchi war einer der angesehensten Gelehrten Italiens; sein Name wird für immer mit dem des Vesuv's verknüpft bleiben.

Sitzung vom 5. Mai 1894.

1. Herr N. Rüdinger hält unter Vorzeigung von anatomischen Präparaten einen Vortrag: „über die Gehirne verschiedener Hunderacen".

2. Herr Hugo Seeliger macht eine Mittheilung: „Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes".

3. Herr E. v. Lommel legt eine Arbeit der Herren L. Graetz und L. Fomm: „über normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen" vor.

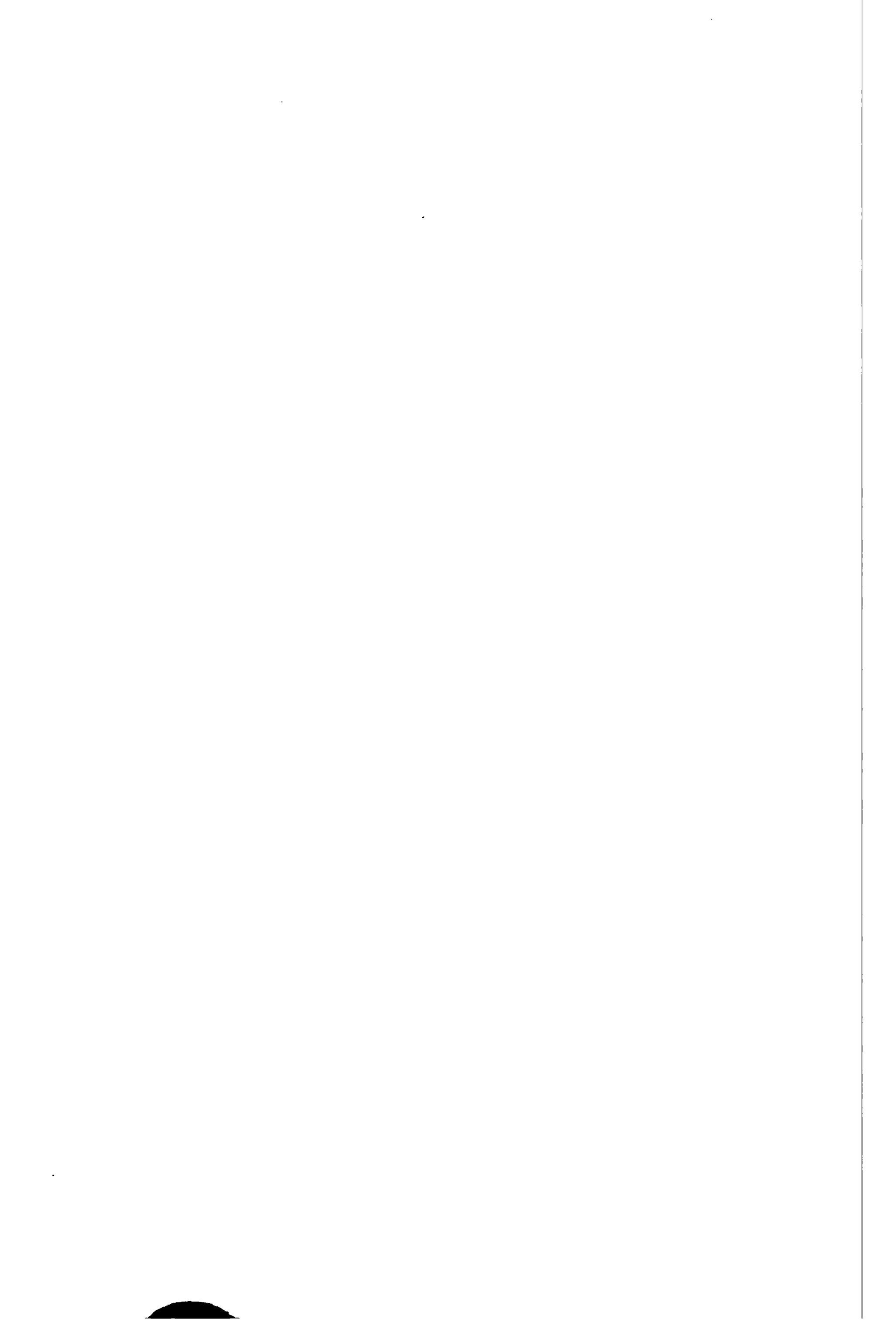
4. Herr Ludwig Boltzmann bespricht drei Abhandlungen

a) von dem Vortragenden: „über den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen";

b) von dem Vortragenden: „zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten";

c) von Prof. A. Wassmuth in Graz: „über die Anwendung des Prinzips des kleinsten Zwangs auf die Elektrodynamik".

5. Herr W. v. Gümbel überreicht eine Abhandlung des auswärtigen Mitgliedes F. v. Sandberger in Würzburg: „über die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge".



Maxwell's und Hirn's Untersuchungen über die Constitution des Saturnringes.

Von H. Seeliger.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Bei verschiedenen Gelegenheiten habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass ein Theil der Untersuchungen Maxwell's[1]) über den Saturnring keineswegs einwandfrei ist und dass sich gegen die Richtigkeit der von ihm angewandten Integrationsmethode begründete Zweifel vorbringen lassen. Ich möchte mir erlauben im Folgenden auf diesen Gegenstand zurückzukommen, hierbei aber auch auf die von Hirn[2]) veröffentlichten Untersuchungen, die wenig bekannt zu sein scheinen, in Kürze eingehen. Wie schon die ganz verschiedenen Wege, welche beide Forscher gehen, klar zeigen, ist die Hirn'sche Abhandlung ohne Kenntniss der mehr als 16 Jahre früher ausgearbeiteten Untersuchung von Maxwell entstanden. Es wird dies im Uebrigen noch besonders in einem von Hirn an Moigno gerichteten Briefe hervorgehoben, welcher der Abhandlung als Anhang beigegeben ist.

---

1) On the Stability of the motion of Saturn's Ring. An Essay, which obtained the Adams Prize for the year 1856 in the University of Cambridge.

2) Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne, présenté le 16 Septembre 1872 à l'Académie des Sciences.

Was die Maxwell'sche Untersuchung betrifft, so werde ich mich hier im Wesentlichen nur mit seiner Theorie der Bewegung eines festen Ringes beschäftigen. Die Maxwell-sche Arbeit enthält bekanntlich noch sehr viel mehr und darunter sehr interessante Dinge, freilich nicht alles in wünschenswerther oder auch nur erforderlicher Strenge. Hierauf zurückzukommen, muss ich mir für eine spätere Gelegenheit vorbehalten.

Zunächst möchte ich aber an die von Laplace in der Mécanique céleste gegebenen Entwicklungen anknüpfen und einige Bemerkungen anschliessen, da hierdurch die Sachlage, wie sie die Annahme einer festen Constitution der Saturnringe schafft, nicht schwieriger zu klären sein dürfte, als durch die viel complicirteren aber nicht strengen Untersuchungen von Maxwell oder die Bemerkungen von Hirn.

Es seien R und S die Gesammtmasse des Ringes und des Saturn und mit denselben Buchstaben mögen die beiden Schwerpunkte bezeichnet werden.

Es sei ferner r die Entfernung RS, ϑ der Winkel, den RS mit einer festen durch R gehenden Richtung bildet, φ der Winkel, den RS mit einer durch R gehenden mit dem Ringe fest verbundenen Richtung bildet, dm ein Massenelement des Ringes und ϱ, r' seine Entfernungen von R bezw. von S.

Setzt man dann $\varphi + \vartheta = \psi$ und ausserdem das Potential

$$V = k^2 \sum \frac{dm}{r'}$$

wo k die Anziehungsconstante ist, so werden die zuerst von Maxwell aufgestellten Differentialgleichungen für die Bewegung von R gegen S, sofern die Bewegung als in der Ringebene vor sich gehend betrachtet wird:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\psi}{dt^2}\cdot\sum\varrho^2\,dm = S\frac{\partial V}{\partial\varphi}\\
&\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\\
&\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right) = -\frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Es werde nun der von Laplace betrachtete Fall eines homogenen unendlich dünnen Kreisringes betrachtet. Hier ist V unabhängig von φ und demzufolge, wenn γ eine Constante bedeutet:

$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}$$

Führt man rechtwinkelige Coordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ ein, so kann man schreiben:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{R+S}{R}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\frac{y}{r}$$

S beschreibt also um das Centrum des Kreisringes eine Centralbewegung.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass $\frac{\partial V}{\partial r}$ stets positiv ist, woraus folgt, dass S vom Centrum des Kreises abgestossen wird. Die Bewegung ist also instabil und ein Zusammenstoss des Ringes mit dem Saturnkörper unausbleiblich. Es soll hier gezeigt werden, in wie hohem Grade der Zustand, wenn S genau im Centrum des Kreises sich befindet, instabil ist und wie eine minimale Verschiebung ausreicht, um das Auffallen des Ringes auf den Saturn in kurzer Zeit herbeizuführen. Erhält S eine sehr kleine Geschwindigkeit c vom

Kreismittelpunkt fort, so wird es sich offenbar in gerader Linie dem Ringe nähern. Man hat dann

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r}$$

und hieraus

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + 2\frac{R+S}{R}(V - V_0) \qquad (2)$$

wo V_0 der Werth von V für $r = 0$ ist. Für V ergiebt sich sofort, wenn a der Ringradius ist:

$$V = \frac{k^2 \cdot R}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\psi}}$$

Mit Hülfe der Transformation

$$\frac{\sin\psi}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{a}\cos\psi + \frac{r^2}{a^2}}} = \sin u$$

kann man für alle Rechnungen viel bequemer schreiben:

$$V = \frac{2k^2 R}{\pi a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}}$$

$$V_0 = \frac{k^2 R}{a}$$

Man hat also jetzt

$$\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = c^2 + \frac{4k^2(R+S)}{\pi a}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 u}} - \frac{\pi}{2}\right\}$$

Entwickelt man noch Potenzen von $\frac{r}{a}$ und setzt zur Abkürzung:

$$x = \frac{r}{a}$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot x^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x^4 + \dots$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{2a}$$

so wird einfach

$$d\,t = \frac{a\,d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho\, x^2}}$$

Um die Zeit t zu berechnen, welche verfliesst vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der Saturnoberfläche mit dem Ringe, hat man:

$$t = a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho\, x^2}}$$

wobei x_1 den Endwerth von x bedeutet.

Das Integral kann unschwer mit beliebiger Annäherung berechnet werden. Ich begnüge mich, seinen Werth zwischen zwei genügend nahe Grenzen einzuschliessen. Man sieht sofort, dass

$$a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2}} > t > a \int_0^{x_1} \frac{d\,x}{\sqrt{c^2 + \lambda_1^2 x^2}}$$

wobei

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 \left[1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x_1^2 + \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}\right)^2 x_1^4 + \dots\right]$$

Man hat demzufolge:

$$\frac{a}{\lambda} \cdot \log\left[\frac{\lambda x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda^2 x_1^2}}{c}\right] > t$$

$$t > \frac{a}{\lambda_1} \log\left[\frac{\lambda_1 x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda_1^2 x_1^2}}{c}\right]$$

Der Saturnring könnte nach Ansicht von Laplace aus einer sehr grossen Anzahl unendlich dünner Ringe, welche aber inhomogen sind, bestehen. Der Augenschein lehrt aber, dass der Saturnring, als Ganzes aufgefasst, den Eindruck einer im hohen Grade homogenen Massen-Anordnung in peripherischer Richtung macht und man wird die Bewegung von S gegen das gemeinsame Centrum dieser Ringe jedenfalls nahezu erhalten, wenn man den ganzen Saturnring als eine breite aber unendlich dünne Scheibe ansieht. Bezeichnet dann a_0 und a_1 den Radius der inneren bezw. der äusseren Begrenzung, σ die Entfernung eines Ringelementes vom Ringcentrum, δ die homogene Dichtigkeit, so ist jetzt zu setzen:

$$V = k^2 \delta \int_{a_0}^{a_1} \sigma\, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sigma^2 + r^2 - 2\sigma r \cos\psi}}$$

Benutzt man wieder die oben angewandte Transformation, und führt die Integration in Bezug auf σ aus, so ergiebt sich:

$$V = 4 k^2 \delta \times$$

$$\left\{ a_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a_1^2} \sin^2 u}\, du - a_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a_0^2} \sin^2 u}\, du \right\}$$

Analog dem früheren wird man zur Abkürzung setzen

$$\frac{r}{\sqrt{a_0 a_1}} = x$$

$$\varrho = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2 \cdot \frac{a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2}{3 a_0 a_1} + \ldots.$$

$$\lambda^2 = \frac{k^2 (R + S)}{a_0 + a_1}$$

Hierdurch erhält man

$$\sqrt{a_0 a_1} \frac{d x}{d t} = \sqrt{c^2 + \lambda^2 \varrho x^2}$$

und die Zeit t vom Anfange der Bewegung bis zum Zusammenstosse der inneren Ringbegrenzung mit dem Saturnkörper wird:

$$t = \sqrt{a_0 a_1} \int_0^{x_1} \frac{d x}{\sqrt{c^2 + \lambda^2 x^2 \varrho}}$$

Es könnte t nun wieder innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen werden. Für die folgende Abschätzung genügt es aber vollkommen zu setzen:

$$t = \frac{\sqrt{a_0 a_1}}{\lambda} \cdot \log \text{nat} \left\{ \frac{\lambda x_1 + \sqrt{c^2 + \lambda^2 x_1^2}}{c} \right\}$$

In der m. Entfernung 9.539 erscheinen die Grössen a_0, a_1 und der Radius des Saturn unter den scheinbaren Winkeln 19″. 75, 13″. 75, 8″. 65. Es ist hierbei nur der helle Ring in Betracht gezogen, also der Florring ganz unberücksichtigt gelassen worden, wodurch natürlich t zu gross wird. In den gewöhnlichen astronomischen Einheiten ausgedrückt, ergiebt sich so:

$$\log \lambda = 7.8684 - 10$$
$$\log x_1 = 9.4906 - 10$$

und hiermit:

$$t = [9.0137] \log \text{nat} \left\{ \frac{[7.3590]}{c} + \sqrt{1 + \frac{[4.7180]}{c^2}} \right\}$$

t erhält man also in Tagen. Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen bedeuten Brigg. Logarithmen, deren zugehörige Zahlen zu nehmen sind. Da es sich in den folgenden Zahlen nur um äusserst kleine c handelt, so wird genügend genau:

$$t = [9.3759] \log \left\{ \frac{[7.6600 - 10]}{c} \right\}$$

So findet man beispielsweise für

$$\frac{1}{c} = \quad 4 \text{ Millionen} \qquad t = 1.01 \text{ Tag}$$
$$40000 \text{ Millionen} \qquad 1.96$$
$$4 \text{ Billionen} \qquad 2.44$$

Diesen 3 Anfangsgeschwindigkeiten entsprechen in der Zeitsecunde die Geschwindigkeiten von 420, 0.042, 0.00042 mm. Es ergiebt sich, dass also selbst bei einer so überaus kleinen Anfangsgeschwindigkeit wie 0.00042 mm pro Secunde schon nach $2^1/_2$ Tagen der innere helle Ringrand mit der Oberfläche des Saturnkörpers zusammenstossen wird. In so hohem Grade instabil ist also der Anfangszustand.

Ich gehe nunmehr zur Integration der Gleichungen (1) über nach der von Maxwell angewandten Methode. Man kann aber gleich von Anfang an die Rechnungen sehr wesentlich vereinfachen und die obigen 3 Gleichungen auf zwei zurückführen, wodurch eine wesentlich kürzere Darstellung sich gewinnen lässt. Setzt man zur Abkürzung

$$A = \frac{R+S}{RS} \Sigma \varrho^2 \, d\, m$$

so folgt aus (1) sofort

$$A \frac{d\psi}{dt} + r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$$

wo c eine Integrationsconstante ist. Und da weiter $\psi = \varphi + \vartheta$ war, so hat man

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c - A\dfrac{d\varphi}{dt}}{A + r^2}$$

Hierdurch werden die zwei letzten Gleichungen (1):

$$\left.\begin{aligned}
&(A + r^2)^2 \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -2Acr\frac{dr}{dt} \\
&+ 2A^2 r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r^2 (A + r^2) A \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\
&(A + r^2)^2 \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = -rc^2 + (A + r^2)^2 \frac{d^2 r}{dt^2} \\
&\qquad - A^2 r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2Acr\frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Integration dieser Differentialgleichungen ist selbst für sehr einfache Formen von V nicht durchführbar. Es soll nun die von Maxwell eingeführte Voraussetzung gemacht werden, dass die Geschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{d\varphi}{dt}$ stets sehr kleine Grössen sind, deren Producte und zweite Potenzen fortgelassen werden können. Geschieht dies, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2Acr}{(A + r^2)^2}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{rc^2}{(A + r^2)^2} + \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \\
&\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2c}{r(A + r^2)}\frac{dr}{dt} = \frac{(A + r^2)}{Ar^2} \cdot \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi}
\end{aligned}\right\}$$

Es werde weiter, ebenfalls mit Maxwell, die Annahme gemacht, dass r nur sehr wenig von einer constanten Grösse u abweicht, dass also in

$$r = u + \varrho$$

ϱ stets eine kleine Grösse ist, deren höhere Potenzen fortgelassen werden können, und dass dasselbe von φ gilt, durch passende Wahl der Anfangsrichtung aber nur dann erreicht werden kann, wenn sich die Bewegung innerhalb eines sehr kleinen Bezirkes abspielt. $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$ ist in den folgenden Anwendungen schon von der Ordnung der ϱ und φ klein und demzufolge vereinfachen sich die obigen Differentialgleichungen und nehmen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{2Acu}{(A+u^2)^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{uc^2}{(A+u^2)^2} \\ + \frac{\varrho c^2}{(A+u^2)^3}(A-3u^2) + \frac{R+S}{R} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2c}{u(A+u^2)}\frac{d\varrho}{dt} = \frac{R+S}{R} \cdot \frac{A+u^2}{Au^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Man sieht indessen, dass diese Gleichungen, selbst wenn alle anderen Voraussetzungen zugelassen werden, gewiss nicht mehr der Wahrheit nahekommen, wenn $A u^2$ sehr klein ist. Diese Fälle müssen also von vornherein ausgeschlossen werden. Sobald also A oder u klein werden, gelten die Maxwellschen Gleichungen — denn im Wesen der Sache stimmen diese mit den obigen überein — gewiss nicht mehr. Die obigen Gleichungen sind nun stets, da man sich V in eine Potenzreihe nach den Grössen ϱ und φ entwickelt denken kann und nur die linearen Glieder mitzunehmen braucht, ohne im Allgemeinen neue Ungenauigkeiten einzuführen, lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und ihre Integration gelingt in bekannter Weise durch Exponentialfunctionen. Allgemeinere Fälle durchzuführen macht demnach keine Schwierigkeiten. Es soll hier nur der von Maxwell ganz durchgerechnete Fall vorgenommen werden, dass ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius a vorliegt, welcher in einem Punkte mit der Masse m beschwert ist.

Als die mit dem Ringe fest verbundene Richtung wählen wir dann die Gerade, welche durch m und den Ringmittelpunkt geht. Steht S genau im letzteren, so ist $r = u$, $\varphi = 0$. Der Einfachheit wegen werde noch die Masse des Ringes R gegen S vernachlässigt. Dann findet sich leicht, wenn zur Abkürzung $\mu = \frac{m}{R}$ gesetzt wird

$$A = a^2 (1 - \mu^2); \quad u^2 = a^2 \mu^2; \quad A + u^2 = a^2$$

Das Potential V ergiebt sich mit Rücksicht auf die oben ausgeführte Transformation, wenn noch σ die Entfernung zwischen S und dem Ringcentrum, also

$$\sigma^2 = r^2 + u^2 - 2\,u\,r\cos\varphi$$

ist

$$V = \frac{2(R-m)k^2}{\pi a} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{a^2}\sin^2 u}} + \frac{m k^2}{\sqrt{r^2 + (a-u)^2 + 2(a-u) r \cos\varphi}}$$

Entwickelt man nach Potenzen von $\varrho = r - u$ und φ und nimmt nur die ersten Potenzen mit, so ergiebt sich leicht:

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{2a^3}(R + 3m)$$

$$\frac{1}{k^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{3}{2}\frac{m}{a}\mu(1-\mu)\cdot\varphi$$

und hiermit werden die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\varrho}{dt^2} + \frac{2c\mu(1-\mu^2)}{a}\cdot\frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{c^2\mu}{a^3} + \frac{\varrho c^2}{a^4}(1 - 4\mu^2) + \frac{k^2 S}{R}\left[-\frac{m}{a^2} + \frac{\varrho}{a^3}\frac{R}{2}(1 + 3\mu)\right] \\ &\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2c}{a^3\mu}\cdot\frac{d\varrho}{dt} = \frac{3}{2}\cdot\frac{k^2 S}{R}\cdot\frac{m}{a^3}\cdot\frac{1}{\mu(1+\mu)}\cdot\varphi \end{aligned}\right\}$$

Die Integrations-Constante c ist vollkommen willkürlich und die weitere Rechnung führt nur dann auf das Maxwell-sche Resultat, wenn noch eine weitere Annahme gemacht wird, nämlich die, dass für $\varrho = 0$, $\varphi = 0$ eine Gleichgewichtslage überhaupt stattfindet. Diese Annahme ist aber keineswegs selbstverständlich. Diese an sich willkürliche Annahme spricht sich in der Gleichung

$$c^2 = k^2 S a \qquad (5)$$

aus. In diesem Falle nun werden die obigen Differentialgleichungen überaus einfach. Setzt man zur Abkürzung

$$p = \frac{2 c \mu (1 - \mu^2)}{a} \qquad \beta = \frac{c^2}{a^4}\left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mu - 4\mu^2\right\}$$

$$p' = \frac{2 c}{a^3 \mu} \qquad \gamma = \frac{3}{2} \cdot \frac{c^2}{a^4} \cdot \frac{1}{1 + \mu}$$

so wird:

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} + p \frac{d \varphi}{d t} = \beta \varrho$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} - p' \frac{d \varrho}{d t} = \gamma \varphi$$

Zur Integration macht man bekanntlich den Ansatz:

$$\varrho = \lambda e^{\nu t} \qquad \varphi = \mu e^{\nu t}$$

dann muss sein:

$$\lambda \nu^2 + p \mu \nu = \beta \lambda$$
$$\mu \nu^2 - p' \lambda \nu = \gamma \mu$$

Die Elimination von λ und μ ergiebt sofort:

$$\nu^4 - \nu^2 (\beta + \gamma - p p') = - \beta \gamma \qquad (6)$$

Durch Auflösung dieser in ν^2 quadratischen Gleichung und durch Ausrechnung der zu den Wurzelwerthen von ν gehörenden $\frac{\lambda}{\mu}$ kann man leicht, wie bekannt, die allgemeinen

Lösungen der vorliegenden Differentialgleichungen erhalten. Die Frage, welche hier vorliegt, ist aber, wann diese Lösungen sich durch Sinus- und Cosinusfunctionen von t ausdrücken. Dies tritt offenbar ein, wenn (6) für ν^2 reelle und negative Werthe ergiebt. Die Auflösung von (6) giebt hierfür als nothwendige und hinreichende Bedingungen:

$$\beta\gamma > 0, \beta + \gamma - p p' < 0 \text{ und } (\beta + \gamma - p p')^2 > 4\beta\gamma$$

Die erste Bedingung heisst:

$$1 + \mu > \frac{8}{3}\mu^2$$

woraus folgt:

$$16\mu < 3 + \sqrt{105}, \text{ d. h. } \mu < 0.8279$$

Die weitere Bedingung

$$\mu^2 - \frac{2}{3}\mu < \frac{2}{3}$$

ist für $\mu < 1$ von selbst erfüllt. Die dritte Bedingung schliesslich giebt:

$$\mu^4 + \frac{28}{3}\mu^3 + \frac{52}{9}\mu^2 - \frac{64}{9}\mu > \frac{32}{9}$$

was aussagt $\mu > 0.8159$.

Die angestellte Rechnung, welche mit dem Maxwell'schen Resultate vollkommen übereinstimmt, zeigt also, dass $\mu = \frac{m}{R}$ zwischen den Grenzen 0.8159 und 0.8279 liegen muss, damit die Bewegung rein periodisch sei, in welchem Falle also S immer in der Nähe vom Ringmittelpunkt bleibt, wenn dies zu einer bestimmten Zeit der Fall war und die Geschwindigkeiten zu derselben Zeit sehr klein waren. Dies gilt aber nur, wenn die Gleichung (5) streng erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, so finden sich andere Grenzwerthe für μ, und

man kann solche Werthe von c wählen, dass überhaupt keine periodischen Lösungen mehr möglich sind. Ich gehe auf diese Entwicklungen nicht näher ein, weil ich der Meinung bin, dass die Maxwell'sche Integrationsmethode, wenigstens in dieser Form, überhaupt nicht geeignet ist, über die Stabilität der untersuchten Bewegung etwas auszusagen. Mir scheint es unzulässig zu sein, in Differentialgleichungen von der vorliegenden Form die Glieder höherer Ordnung fortzulassen und aus der Thatsache, dass sich dann eine rein periodische Lösung ergiebt, schliessen zu wollen, dass dies auch bei strenger Integration der Fall sei. Die Untersuchung der Stabilität eines Zustandes hat von der Bedingung auszugehen, dass die Coordinaten und Geschwindigkeiten für eine bestimmte Zeit unendlich wenig geändert werden. Man hat also die Integrationsconstanten zu variiren. Bei Maxwell kommen diese Constanten gar nicht vor, vielmehr werden die Veränderungen der Coordinaten als unendlich klein für alle Zeiten betrachtet und mit Hülfe der Vernachlässigung der höheren Potenzen dieser Grössen nachgewiesen, wann eine periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden sich einstellt. Im Allgemeinen enthält dieses Verfahren unzweifelhaft einen Zirkelschluss und ist unzulässig und daran wird nichts geändert, wenn dasselbe auch in speciellen Fällen zu richtigen Resultaten zu führen geeignet ist. Ein auf diesem Wege gefundenes Resultat kann, wenn nicht die Zulässigkeit des Verfahrens zuerst in besonderen Fällen nachgewiesen wird, eben nur zufällig richtig zu sein.

Die vorliegenden Differentialgleichungen 2. Ordnung enthalten die unabhängige Variable t nicht explicite. Dass aber auch in diesem Falle im Allgemeinen die Maxwell'sche Schlussfolgerung nicht zulässig ist, kann mit Leichtigkeit an beliebig vielen Beispielen gezeigt werden. Nehmen wir z. B.:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - q^2 x + y^2$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{q^2}{4} y$$

und es werde vorausgesetzt, wie in den obigen Gleichungen, dass sowohl x und y als auch die ersten Differentialquotienten nach t für $t = 0$ sehr klein seien. Dann ergiebt die strenge Integration:

$$y = a \sin \left(\frac{q}{2} t + \frac{b}{2} \right)$$

$$x = \frac{a^2}{2q^2} + \alpha \sin (q t + \beta) + \frac{a^2}{8 q^2} \cos (q t + b)$$
$$- \frac{a^2}{4q} \cdot t \cdot \sin (q t + b)$$

worin a, α, b, β die 4 willkürlichen Integrationsconstanten sind und die ersten beiden sehr klein sein müssen. Vernachlässigt man aber in den Gleichungen y^2, so wird:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - q^2 x \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = - \frac{q^2}{4} y$$

also

$$x = \alpha \sin (q t + \beta) \qquad y = a \sin \left(\frac{q}{2} t + b \right)$$

Die näherungsweise ausgeführte Integration giebt also eine rein periodische Bewegung mit sehr kleinen Amplituden, die strenge Darstellung dagegen enthält ein mit t multiplicirtes Glied. Wie sich die Sachlage bei dem Maxwell'schen Problem über den Saturnring gestaltet, darüber ist vorläufig gar nichts bekannt. Keineswegs aber kann man ohne näheren Nachweis behaupten, dass dort die Fortlassung der höheren Potenzen der Variablen die Form der Integralgleichungen ungeändert lässt.

Danach wird man wohl zugeben müssen, dass das Maxwell'sche Resultat, in der vorliegenden Form wenigstens,

gänzlich unbegründet ist. Die vorliegende astronomische Frage scheint mir aber hiervon ganz unabhängig zu sein. Denn es ist sicher, dass die thatsächlichen Verhältnisse beim Saturnring völlig verschieden sind von den Annahmen, auf denen das Maxwell'sche Problem beruht. Der Saturnring ist ein sehr dünnes aber breites Gebilde und der Augenschein lehrt, dass dasselbe im Grossen und Ganzen in peripherischer Richtung von homogener Dichtigkeit ist. Wenn man sich den Ring auch vorstellen will als bestehend aus sehr vielen, sehr dünnen und sehr inhomogenen Ringen, so werden sich doch diese Ungleichförmigkeiten in der Massenvertheilung der einzelnen Ringe nahezu compensiren müssen, so dass man sich offenbar weit mehr der Wahrheit nähert, wenn man den ganzen Ring als homogen betrachtet, als wenn man etwas anderes annimmt. Hierdurch entsteht aber, wie oben auseinandergesetzt wurde, eine im hohen Grade instabile Bewegung und man wird diese mit viel mehr Recht als der Natur entsprechend ansehen können, als etwa die Consequenzen des Maxwell'schen Problemes.

Hirn's Untersuchung der Frage, ob die Saturnringe als fest anzunehmen seien, geht nach einer ganz anderen Richtung als die Maxwell'sche Arbeit. Während letzterer versuchte die Dauerhaftigkeit der Bewegung des Saturn um das Ringcentrum zu untersuchen, beschäftigt sich Hirn mit den Ansprüchen, welche man an die Festigkeit der Ringe zu machen gezwungen ist, falls diese als fest angenommen werden. Hierbei scheint Hirn von der Meinung auszugehen, dass ein nicht homogener Ring überhaupt einen stabilen Zustand zulasse d. h. dass sich Saturn stets in der Nähe des Ringcentrums aufhalten könne. Er stützt sich dabei auf Laplace, der allerdings in der Mécanique céleste seine Untersuchungen über den Saturnring mit der Bemerkung schliesst: „les divers anneaux qui entourent le globe de Saturne sont par conséquent

des solides irregulaires d'une lageur inégales etc.". Diese Schlussfolgerung ist aber durch die vorangehende Analyse keineswegs gerechtfertigt, denn Laplace hat nur die Bewegung homogener Ringe untersucht. Deshalb entbehren die auf Laplace's Meinung sich stützenden Bemerkungen Hirn's der sicheren Grundlage und müssen als wenig beweiskräftig angesehen werden. Jedoch enthält die Schrift Hirn's viele interessante Bemerkungen, weshalb ich auf eine kurze Analyse derselben eingehe.

Ein unendlich dünner Kreisring mit dem Radius r, der sich mit der Rotationsgeschwindigkeit ω um den in seinem Mittelpunkt stehenden Saturn dreht, kann, wenn keine Cohäsion zwischen den einzelnen Theilen stattfindet, nur bestehen, wenn in jedem Punkte die Centrifugalkraft gleich der Anziehungskraft ist. Ist also wieder k die Anziehungsconstante, S die Saturnmasse, so muss sein:

$$\omega^2 = \frac{k^2 S}{r^3}$$

Es werde nun ein inhomogener und zwar einseitig belasteter unendlich dünner Kreisring betrachtet. Ein Massenelement desselben sei dm. Der Schwerpunkt R des Ringes fällt dann nicht mit seinem Centrum C zusammen. Hirn nimmt nun an, was eine durchaus willkürliche und unbewiesene Voraussetzung ist, dass durch die Stellung des Saturn S auf der Verbindungslinie CR ein stabiler Zustand gegeben sei. Es müsste also, da die Masse R gegen S zu vernachlässigen ist, R um S rotiren und ebenso schnell um C. Nennt man noch ϑ den Winkel, den der durch dm gehende Kreisradius r mit der Geraden RS bildet, so wird also bei Voraussetzung eines stabilen Zustandes die Entfernung $RS = \varrho$ constant bleiben, also:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d^2\varrho}{dt^2} = 0$$

sein. Dies führt sofort auf die Bedingung

$$\frac{d^2 \varrho}{d t^2} \Sigma\, dm = \Sigma\, dm \cos \vartheta \left\{ \omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2} \right\} = 0. \qquad (7)$$

Hierin erstreckt sich Σ auf die ganze Ringmasse. Nennt man den positiven Theil der linken Seite der letzten Gleichung f, so halten sich also zwei Kräfte $+f$ und $-f$ das Gleichgewicht. Es ist f nichts anderes als die Zug- bezw. Druckkraft, welche bei dem bestehenden Zustand auftritt. In der Hauptsache (mit allerdings nicht bedeutenden Abänderungen in den Zahlen) kann man die auftretenden Fälle als durch folgende typische Annahmen hergestellt ansehen.

Die ganze Ringmasse denke man sich in zwei Massenpunkten m_0 und m_1 vereinigt. In m_0 alle dm, welche in der obigen Summe positive, in m_1 alle dm, welche negative Coefficienten haben. Man denke sich ferner m_0 und m_1 an die Enden eines Durchmessers des Ringes gebracht, in welchem Durchmesser sich auch S befindet. Die Enfernung S vom Centrum des Ringes, also der Mitte der Geraden $m_0\, m_1$, sei in der Richtung nach m_0 positiv gerechnet e. Die Gleichung (7) wird jetzt

$$m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r - e)^2} \right] = m_1 \left[\omega^2 (r + e) - \frac{k^2 S}{(r + e)^2} \right]$$

Setzt man $\lambda = \frac{m_0}{m_1}$, so findet man hieraus:

$$\omega = \frac{1}{r - e} \sqrt{\frac{k^2 S}{r - e} \cdot \frac{\lambda - \left(\frac{r - e}{r + e}\right)^2}{\lambda - \frac{r + e}{r - e}}}$$

Es ergiebt sich aus diesem Ausdrucke, dass der angenommene Zustand unmöglich ist, wenn:

$$\left(\frac{r - e}{r + e}\right)^2 < \lambda < \frac{r + e}{r - e}$$

denn dann wird ω imaginär. Sonst aber wird die Kraft f, welche die feste als schwerelos betrachtete starre Verbindung von m_0 und m_1 zu zerreissen oder zusammenzudrücken strebt, sein:

$$f = m_0 \left[\omega^2 (r - e) - \frac{k^2 S}{(r - e)^2} \right]$$

Diese Kraft kann sehr bedeutend werden. Wenn man den oben gefundenen Werth von ω einsetzt und die zweiten Potenzen der als klein vorausgesetzten Grösse $\frac{e}{r}$ vernachlässigt, findet man leicht:

$$f = \frac{6 k^2 S}{r^3} \cdot \frac{m_0 e}{\lambda - 1}$$

Für die numerische Rechnung wird man die Intensität der Schwere auf der Erdoberfläche g, den Erdradius ϱ und die Erdmasse m einführen. Dann ist $m k^2 = g \varrho^2$ und:

$$f = \frac{6}{\lambda - 1} m_0 g \frac{S}{m} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2 \frac{e}{r}$$

Will man nun diese Formel auf den Saturnring anwenden, so wird, ausser den bereits erwähnten und als ziemlich willkürlich bezeichneten Voraussetzungen, noch eine bestimmte Annahme über e gemacht werden müssen, da f bei sehr kleinem e ebenfalls sehr klein wird. Hirn stützt sich hierbei auf Beobachtungen von W. Struve, Harding u. s. f., wonach Saturn excentrisch im Ringe stehen soll. Aehnliche Wahrnehmungen sind auch in neuerer Zeit gemacht worden, entschieden ist indessen diese Frage noch keineswegs. Dass eine excentrische Stellung des Saturn thatsächlich vorgekommen ist, wird man zwar zugeben müssen, über den Betrag der Excentricität aber bestimmte Angaben zu machen, ist bei den einander widerstreitenden Einzelresultaten vorder-

hand noch nicht möglich. Wesentlich ist ferner für die Anwendung der obigen Formel, dass Saturn die Rotation des Ringes um sein Centrum mitmacht und immer auf einem Radius des letzteren und zwar an derselben Stelle zu liegen kommt. Dies durch die Beobachtungen gegenwärtig nachzuweisen dürfte nicht leicht sein, jedenfalls liegen dergleichen Resultate nicht vor.

Hirn legt seiner Rechnung folgende Zahlen zu Grunde. Drückt man die Strecken in lieues zu 4000 Metern aus, so setzt er:

$$e = 200 \qquad r = 33454$$

wo die letztere Zahl dem äussersten hellen Ringrand entspricht. Weiter wird angenommen $\frac{S}{m} = 92.394$. Dann wird für $\lambda = 10$

$$f = m_0\, g \times 0.00084$$

Schon für kleine Massen kommen bedeutende Drucke heraus. Nimmt man z. B. an, dass m_0, welches ungefähr der Masse des halben Ringes entspricht, die Masse einer Kubiklieue Wasserstoff ist, so ergiebt sich $f = 5$ Millionen Kilogramm. Unter solchen Drucken würde aber jedenfalls ein aus so dünnem Stoffe bestehender Ring auseinanderbrechen müssen. Wollte man aber die Festigkeit so gross annehmen, dass diesen Drucken Widerstand geleistet werden könnte, so müsste man noch die Bedingung der beinahe vollständigen Starrheit hinzufügen. Denn sonst würden sehr bedeutende Verbiegungen auftreten müssen, von deren Qualität man sich leicht Rechenschaft abgeben kann. Da aber die Beobachtungen dergleichen nicht verrathen, so muss man wohl, will man nicht mit ganz abnormen und unbekannten Verhältnissen rechnen, die Hypothese sehr dünner starrer Ringe aufgeben.

Es bliebe indessen noch übrig, den Saturnring als ein oder mehrere sehr dünne Bänder von endlicher Breite auf-

zufassen. Ein solches kreisförmiges Band habe am inneren bezw. am äusseren Rande die Radien r_i und r_a. Jeder als fest angenommene Theil des Bandes, welcher zwischen zwei den unendlich kleinen Winkel $\delta\theta$ mit einander bildenden Radien liegt, wird mit den übrigen zusammen auch ohne Cohäsion die vorgeschriebene Rotation ausführen, wenn

$$\int_{r_i}^{r_a} dm\left[\omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2}\right] = 0.$$

Bezeichnet e die sehr kleine Dicke des Ringes und δ die gleichförmige Dichtigkeit, so ist

$$dm = e \cdot \delta \cdot r \cdot dr \cdot \delta\theta$$

und es müsste also sein:

$$\int_{r_i}^{r_a} \left[\omega^2 r - \frac{k^2 S}{r^2}\right] e r \cdot dr = 0.$$

e ist im Allgemeinen eine Function von r, die aber völlig unbekannt ist. Hirn verfolgt ausführlicher zwei Annahmen: 1) Setzt man $e = e_0 =$ constant, so ergiebt sich:

$$\omega^2 = \frac{3 k^2 S}{r_a^3 - r_i^3} \cdot \log \frac{r_a}{r_i}$$

Es giebt einen mittleren Radius r_m, wo der Centrifugalkraft genau durch die Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird. Hierfür ist

$$\omega^2 r_m^3 = k^2 S$$

woraus sich ergiebt:

$$r_m = r_i \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{r_a}{r_i}\right)^3 - 1}{3 \log \frac{r_a}{r_i}}}$$

2) Man kann u. A. annehmen $e\,r = \text{Const.}$ e entspricht dann der Ordinate einer gleichseitigen Hyperbel, deren Abscisse r ist. Dann findet sich leicht:

$$\omega^2 = \frac{2\,k^2\,S}{r_i\,r_a\,(r_i + r_a)}$$

und

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{r_i\,r_a\,(r_i + r_a)}{2}}$$

Hirn setzt entsprechend der Begrenzung des inneren Theiles des hellen Ringes, vom Florring bis zur Cassini'schen Linie, in lieues zu 4000 Meter:

$$r_i = 23670 \qquad r_a = 30599$$

Dann ergiebt die erste Annahme $r_m = 27134$ und die zweite 26986, also wie zu erwarten nahe übereinstimmende Werthe.

Offenbar überwiegt bei jenen Ringtheilen, für welche $r > r_m$, die Centrifugalkraft die Anziehung und für $r < r_m$ findet das Entgegengesetzte statt. Die auftretenden Zugkräfte werden also dahin streben bei r_m eine Theilung des Ringes herbeizuführen. Diese Zugkraft f wirkt längs der Fläche von der Höhe e_m, in welcher der mit dem Radius r_m construirte Kreiscylinder die Ringmasse schneidet. Auf die Flächeneinheit bezogen wird demgemäss f ausgedrückt durch:

$$f = \frac{1}{r_m\,\delta\,\theta} \cdot \int_{r_i}^{r_m} \frac{d\,m}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

oder

$$f = \frac{\delta}{r_m} \cdot \int_{r_i}^{r_m} \frac{e\,r\,d\,r}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

$$= -\frac{\delta}{r_m} \cdot \int_{r_m}^{r_a} \frac{e\,r\,d\,r}{e_m}\left(\omega^2\,r - \frac{k^2\,S}{r^2}\right)$$

Führt man hierin wieder die beiden oben verfolgten Annahmen durch und setzt zuerst $e = e_m$, so wird

$$f = \frac{k^2 S \cdot \delta}{r_m} \cdot \left\{ \frac{1}{3} \left[\left(\frac{r_a}{r_m} \right)^2 - 1 \right] - \log \frac{r_a}{r_m} \right\}$$

Durch Einführung der Schwere g und mit den obigen Zahlen ergiebt sich:

$$f = 845911 \cdot \delta \cdot g$$

Die analoge Rechnung für die zweite Annahme $er =$ Const. ergiebt:

$$f = \frac{k^2 S \delta}{r_m} (r_a - r_m) \left\{ \frac{1}{2} \frac{r_a + r_m}{r_m^2} - \frac{1}{r_a} \right\}$$

und in Zahlen $f = 859258 \cdot \delta \cdot g \cdot$

Die angestellten Rechnungen zeigen jedenfalls, dass sehr bedeutende Zugkräfte die Zertheilung des ringförmigen Bandes herbeizuführen suchen, denen nur die Cohäsion der Masse sich entgegensetzt. Indessen wirkt auch die Anziehung der einzelnen Ringtheile auf einander in gleichem Sinne. Man wird aber wohl von vorn herein annehmen müssen, dass die letztere bei der nicht bedeutenden Dichtigkeit der Ringmaterie nicht viel an dem erlangten Resultate ändern wird. Ich übergehe deshalb die von Hirn in dieser Richtung ausgeführten Betrachtungen, zumal dieselben gegenwärtig vollkommener angestellt werden können, als dort geschehen. Hirn findet, dass bei Berücksichtigung der Ringanziehung der zuletzt angeführte Zahlenausdruck für f sich umwandelt in:

$$f = 859258 \cdot \delta \cdot g - 0.57 \, (\delta \cdot g)^2$$

Um eine genauere Vorstellung von der Grösse dieser Kräfte zu erlangen, sei erwähnt, dass Buchenholz ein Körper ist, der bei grösster Leichtigkeit die stärksten Drucke aushalten kann. Hierfür ist $\delta = 0.7$ und damit wird $f = 598687600$ kg pro qm. Diese Belastung ist etwa 40 Mal so gross, als Buchenholz erfahrungsgemäss ertragen kann. Indessen ist offenbar

die Kraft f bedeutend kleiner, wenn die Breite des Ringes abnimmt, und man kann sich die Frage vorlegen, wie breit die einzelnen Ringe sein müssen, um bei gegebener Festigkeit bestehen zu können. Die Rechnung ist leicht auszuführen, wenn die Ringanziehung vernachlässigt wird. Für eine Materie von der Beschaffenheit des Buchenholzes folgt dann, dass der innere helle Ring mindestens aus 5 einzelnen Ringen bestehen müsste. Ganz ähnliches gilt natürlich auch für den äusseren Ring, so dass also mit der festen Constitution der Ringe die Folgerung verknüpft ist, dass dieselben aus einer grösseren Zahl schmaler Ringe bestehen müssen. Der Augenschein und manche Beobachtungen, namentlich aus früherer Zeit, widersprechen dem durchaus nicht, und es ist bekannt, dass Laplace etwas ganz ähnliches als durch die Beobachtungen bestätigt angenommen und hierauf seine Rechnungen gegründet hat.

So interessant dieses Resultat von Hirn auch ist, so ändert es doch nichts an der Unzulänglichkeit der Annahmen. Der der Rechnung zu Grunde gelegte Zustand ist ein im höchsten Grade instabiler, wie oben auseinandergesetzt, und demzufolge ist die Untersuchung über die Unmöglichkeit fester Ringe unnöthig, weil das System nur ganz kurze Zeit bestehen kann. Es ist schon oben erwähnt worden, dass auch einseitige Belastungen nichts an der Sachlage ändern können, wenn man nicht das Aussehen der Saturnringe ganz ignoriren will und so wird wohl immer das Hauptargument gegen die Möglichkeit fester Ringe in den einfachen Rechnungen bestehen, welche am Anfange dieses Aufsatzes ausgeführt worden sind.

Frägt man nun weiter nach der eigentlichen Constitution der Ringe, nachdem der feste Aggregatzustand ausgeschlossen ist, so drängt sich zunächst die Vermuthung auf, diese Gebilde könnten flüssiger oder gasförmiger Natur sein. Um die Mitte dieses Jahrhunderts hatte diese Hypothese an den beiden amerikanischen Gelehrten W. C. Bond und Peirce

energische Verfechter gefunden, man wird sie aber trotzdem nicht ernstlich in Betracht zu ziehen haben. Lange Zeit und vereinzelt auch jetzt noch hat man die berühmten Experimente von Plateau über ringförmige Gebilde, die in rotirenden Flüssigkeiten auftreten, als einen Beweis für die Möglichkeit solcher kosmischen Gebilde angesehen. Diese Versuche veranschaulichen aber nur die Wirkung der Capillarität und haben mit Gravitationswirkungen gar nichts zu schaffen. Sie hängen also gar nicht mit den Gleichgewichtsfiguren kosmischer Massen zusammen, ganz abgesehen davon, dass sie auch äusserlich den Verhältnissen beim Saturnring nicht entsprechen. Denn hier liegt in der Mitte der Ringe von sehr geringer Masse, die bedeutende Saturnmasse, welcher Fall sich bei den genannten Figuren wohl kaum erzielen lässt.

Nachdem Laplace die Theorie der ringförmigen Gleichgewichtsfiguren zu untersuchen begonnen hatte, ist dieses Problem ausführlich und streng von verschiedenen Seiten behandelt worden. Die Hauptfrage, die aber bei einer Verwerthung der erlangten Resultate in der Astronomie von der grössten Wichtigkeit ist, ob nämlich solche Figuren stabil sind und nicht durch Hinzutritt kleiner Störungen von aussen auseinanderfliessen, hat eine genügende Beantwortung bis jetzt nicht gefunden, indessen ist kaum wahrscheinlich, dass die erforderliche Stabilität vorhanden ist. Zu diesem Resultate kommt auch Hirn auf einem interessanten Wege, auf welchem ihm hier gefolgt werden soll.

Es werde angenommen, dass zu einer gewissen Zeit der flüssige Ring wirklich bestehe, wenn Saturn genau in dessen Centrum sich befindet. Dann wird der Ring mit gleichförmiger Geschwindigkeit wie ein fester Körper um sein Centrum rotiren und die einzelnen Theilchen werden keine Verschiebung gegen einander erleiden. Wenn nun Saturn sich aus irgend einer Ursache von dem Ringmittelpunkt ein wenig entfernt, so werden die einzelnen Theilchen nicht

mehr gleichförmig rotiren können. Dort wo sie dem Saturn näher stehen, werden sie sich schneller, dort wo sie von ihm entfernter sind, werden sie sich langsamer bewegen müssen. Man wird sich, weil die Anziehung des Ringes auf seine einzelnen Theile gering ist gegenüber der Anziehung des Saturn, ein näherungsweise richtiges Bild von der Bewegung bilden, wenn man annimmt, dass die einzelnen Theile Ellipsen beschreiben, deren Brennpunkt im Saturn liegt. Ist die Ringmaterie ein zusammendrückbares Gas, so werden die einzelnen Theilchen in der Saturnnähe, da sie sich hier schneller bewegen, auseinanderrücken und in der Saturnferne wird das Entgegengesetzte eintreten. Ist der Ring aus einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit gebildet, so werden sich die einzelnen Theilchen im letzteren Punkte anhäufen un der Ring wird hier breiter oder dicker werden müssen. Dieses Spiel wiederholt sich bei jedem Umlaufe, also alle 10 bis 14 Stunden. Infolge der Reibung zwischen den einzelnen Theilchen wird beim Anhäufen oder Zusammendrängen der Theilchen Wärme erzeugt werden, was aber in der Saturnferne stattfinden muss, während, wenigstens ist dies bei gasförmiger Constitution sicher, in der Saturnnähe eine Abkühlung erfolgen wird. Infolge der Wärmeleitung, des Stosses der einzelnen Theilchen gegeneinander etc., werden nun, wie die Thermodynamik zeigt, sich die Wärmewirkungen in der Saturnferne und -Nähe und auch in den dazwischen liegenden Punkten nicht ausgleichen, vielmehr bleibt ein Rest übrig, welcher eine Temperaturerhöhung der Ringmasse hervorbringt. Dies kann aber nur auf Kosten der Bewegungsenergie geschehen und es werden sich also die Dimensionen des Ringes nach dem Saturn hin verkleinern. Die Innenseite des Ringes wird sich demzufolge ziemlich gleichmässig von allen Seiten, langsam dem Saturn nähern, um sich schliesslich mit ihm zu vereinigen.

Auf Grund seiner Untersuchungen kommt Hirn zu dem

Resultate, dass sich alle Schwierigkeiten und Unmöglichkeiten heben, wenn man annimmt, der Saturnring bestehe aus einzelnen discreten Massentheilchen oder er sei, kurz gesagt, von staubförmiger Structur. Wie sich die mechanischen Verhältnisse in einem solchen Systeme abwickeln, hat Hirn nicht weiter untersucht und die kurzen Bemerkungen, die er in dieser Richtung macht, werden voraussichtlich theilweise der Correctur bedürfen. Dagegen hat Maxwell diese Probleme in Angriff zu nehmen versucht, ohne dass es ihm aber, wie ich glaube, gelungen ist, zu einer einwurfsfreien Lösung zu gelangen.

Die Erscheinungen, welche ein staubförmiger Saturnring darbietet, habe ich in zwei grösseren Arbeiten besprochen und ich glaube dort den stricten Nachweis geliefert zu haben, dass alle Erscheinungen, die zum Theil sehr complexer Natur sind, nur durch die zu Grunde gelegte Annahme erklärt werden können. Bei dem noch nicht gehörig entwickelten Zustande der Dynamik des Saturnringes dürfte auf diesem Wege die festeste Stütze gewonnen sein, die man bis jetzt der Maxwell-Hirn'schen Annahme geben konnte.

Es ist interessant, dass die Forschung, nachdem der Reihe nach alle nur denkbaren Annahmen über die Constitution des Saturnringes discutirt und als wahrscheinlich hingestellt worden sind, wieder jener Ansicht zuneigt, welche als eine der ersten aufgestellt worden ist, um dann aber, wie es scheint, völlig der Vergessenheit zu verfallen. Es ist von verschiedenen Seiten bemerkt worden, dass Jacques Cassini (1677—1756) bereits die Maxwell-Hirn'sche Ansicht ausgesprochen hat. Die Wichtigkeit der Angelegenheit wird es wohl rechtfertigen, wenn ihr etwas nachgegangen wird. Bei Gelegenheit der Veröffentlichung seiner Beobachtungen des Saturn, namentlich des Verschwindens des Ringes im Jahre 1715 [1]) spricht sich Cassini ganz deutlich aus. Pag. 47 sagt er:

---

1) Observations nouvelles sur Saturne. Mémoires de mathematique et de physique, tirés des registres de l'académie royale des sciences de l'année 1715 pg. 41 ff.

„Cette apparence qui n'a point sa pareille dans les corps célestes, a donné lieu de conjecturer que ce pouvait être un amas de satellites qui étaient dans le plan des autres et faisaient leur révolution autour de cette planète, que leur grandeur est si petite qu'on ne peut pas les apercevoir chacun séparément, mais qu'ils sont en même temps si près l'un de l'autre qu'on ne peut point distinguer les intervalles qui sont entr'eux, ensorte qu'ils paraissent former un corps continu".

Hieran werden Bemerkungen geknüpft über Schwierigkeiten, die bei der Darstellung der Beobachtungen auftreten sollen, in dieser Form aber wohl nicht existiren. Den Schluss bildet (pg. 48) die Bemerkung:

„On peut donc supposer avec beaucoup de vraisemblance que l'anneau de Saturne est formé d'une infinité de petites Planètes fort près l'une de l'autre, qui étant comprises dans son Atmosphère, sont entraînés par le mouvement qui fait tourner Saturne autour de son centre et que dans cette Atmosphère etc."

Hiernach nimmt also Cassini an, dass die discreten Theilchen, welche den Ring bilden, in der Atmosphäre des Saturn sich befinden und mit dieser durch die Rotation des Saturn herumgeführt werden. Das ist freilich ein Zusatz, welcher die ganze Auffassung völlig verschiebt, und da Cassini diesen Zusatz für ganz wesentlich hält, steht er doch auf wesentlich anderem Boden als auf dem der Hypothese von Maxwell und Hirn. Es erscheint demnach doch nicht so räthselhaft, dass die Cassini'sche Ansicht nicht allgemeine Verbreitung gefunden hat.

Danach wird man, wie ich glaube, nicht gegen die historische Gerechtigkeit verstossen, wenn man die Erkenntniss, dass die Saturnringe eine staubförmige Constitution haben, an die Namen Maxwell und Hirn knüpft.

Ueber normale und anomale Dispersion elektrischer Wellen.

Von L. Graetz und L. Fomm.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Vom Standpunkte der Maxwell'schen Theorie ist nicht zu erwarten, dass die Dielektrizitätsconstante eines Körpers eine durchaus constante Grösse sei. Denn da ihre Wurzel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Verschiebung umgekehrt proportional sein soll (bei gleicher magnetischer Inductionsconstante) und da wir aus den optischen Messungen wissen, dass der Brechungsexponent mit der Wellenlänge variirt, so ist von vorn herein zu schliessen, dass sich die Dielektrizitätsconstante eines Körpers abhängig zeigt von der Wellenlänge der elektrischen Bewegungen, durch deren Hülfe sie gefunden wird. Ebensowenig ist aus der Maxwell'schen Theorie mit Nothwendigkeit der (gewöhnlich angeführte) Schluss zu ziehen, dass die Constante der Cauchyschen oder einer anderen Dispersionsformel (für normale Dispersion) der Wurzel aus der Dielektrizitätsconstante gleich sein muss, ein Schluss, der ja auch durch die Erfahrung nur in wenigen Fällen bestätigt wird. Vielmehr ist aus der Thatsache, dass die Dielektrizitätsconstante, in gewöhnlicher Weise bestimmt, sich meistens viel grösser ergiebt, als das Quadrat des auf unendlich lange Wellen reducirten Brechungsexponenten, consequent nur zu schliessen, dass im Gebiet der langen Wellen häufig Absorptionen und daraus folgende anomale

Dispersionen vorkommen, welche den Gang der Dispersionscurve wesentlich beeinflussen.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, haben wir uns die Frage gestellt, ob eine Abhängigkeit der Dielektrizitätsconstante von der Wellenlänge der elektrischen Wellen experimentell zu constatiren ist. Man weiss von einer Reihe von Körpern, dass ihre Dielektrizitätsconstante, statisch gemessen, sich viel grösser ergiebt, als gemessen durch Schwingungen, auch wenn diese nur die langsamen Schwingungen eines Induktionsapparates sind. Man nahm an, dass man sich dabei durch Abkürzung der Ladungszeit dem wahren d. h. kleinsten Werth der Dielektrizitätsconstante nähert. Nach der obigen Darlegung giebt es aber gar keinen „wahren" Werth der Dielektrizitätsconstante, vielmehr ist jeder durch e i n w u r f s f r e i e Methoden sicher bestimmte Werth der Dielektrizitätsconstante als der wahre Werth für die zugehörige Wellenlänge anzusehen. Dass durch die Abkürzung der Ladungszeit man sich dem sogenannten wahren d. h. kleinsten Werth der Dielektrizitätsconstante nicht immer nähert, wird bewiesen durch die Versuche von Lecher[1]), welcher sogar bei raschen Hertz'schen Schwingungen ein Anwachsen der Dielektrizitätsconstante bei einigen Körpern constatirte, gegenüber den durch langsame Schwingungen bestimmten. Man wird vielmehr nach der Ausdrucksweise der Optik sagen müssen, dass, wenn sich die Dielektrizitätsconstante um so kleiner ergiebt, je grösser die angewendete Wellenlänge ist, dass man es dann mit einem Körper mit normaler Dispersion zu thun hat, dass dagegen, wenn umgekehrt die Dielektrizitätsconstante mit wachsender Wellenlänge selbst wächst, in dem hinter diesem Gebiet liegenden Theil der Wellenlängen (nach kürzeren Wellenlängen zu) anomale Dispersionen stattgefunden haben, und

1) Lecher Wied. Ann. 42 p. 142. 1891.

dass endlich, wenn man mit den Wellenlängen in ein Gebiet der anomalen Dispersion selbst kommt, die Dielektrizitätsconstanten mit abnehmender Wellenlänge zunehmen, dann bis zu einem Minimum abnehmen und dann wieder zunehmen müssen.

Bei Körpern, wie Schwefel, Paraffin, Schellack, für welche die gewöhnliche Maxwell'sche Beziehung gilt, ist natürlich eine Abhängigkeit der Dielektrizitätsconstante von der Wellenlänge, wie sie herstellbar ist, nicht zu erwarten. Wohl aber konnte ein solcher Einfluss bei Körpern mit grosser Dielektrizitätsconstante erwartet werden, da die meisten bisher untersuchten Substanzen zu der zweiten der oben erwähnten Klassen zu gehören scheinen. Wir sind aber beim Beryll mit dem von uns benützten Intervall der Wellenlängen gerade in ein Gebiet hineingekommen, welches für die Dielektrizitätsconstante genau denselben Gang zeigt, wie er bei anomaler Dispersion für den Brechungsexponenten in solchen Fällen bekannt ist.

Zu den Messungen benutzten wir die Erscheinung, welche wir früher [1]) ausführlich dargelegt haben, dass dielektrische Ellipsoide in einem von elektrischen Schwingungen durchzogenen homogenen Feld Drehungsbewegungen ausführen, welche dem Quadrat der angewendeten elektrischen Kraft proportional sind. Bei dieser Methode liess sich die Wellenlänge der angewendeten Schwingungen leicht dadurch variiren, dass wir eine Reihe von Leydener Flaschen von verschiedener Capacität anwendeten. Die Entladungsfunken derselben zwischen den Kugeln eines Mikrometers gaben uns Schwingungen, deren Wellenlängen sich nach der Theorie wie die Wurzeln der Capacitäten verhalten, wenn, wie es der Fall war, der ganze übrige Stromkreis möglichst unverändert blieb. Ausserdem konnten wir sehr langsame Schwingungen mit derselben Anordnung dadurch hervorbringen, dass wir die Kugeln des Mikrometers so weit auseinanderzogen, dass keine Funken

1) Graetz und Fomm Sitzungsber. d. bayr. Akad. 23 p. 275. 1893.

übergingen. Dann folgten sich die Schwingungen nur in der Periode, welche der Unterbrecher des Induktionsapparates hatte, einige hundert in der Sekunde.

Die Anordnung war derartig, dass eine der Leydener Flaschen mit den beiden sekundären Polen eines Induktionsapparates verbunden und durch dessen Ströme geladen wurde. Die Entladung geschah durch das Funkenmikrometer, von dessen Kugeln aus zwei Drähte zu zwei parallel geschalteten Kohlrausch'schen Condensatoren führten. Zwischen den Platten derselben hingen an gefirnissten Glasstäbchen die zu untersuchenden Scheiben oder Stäbchen, die durch einen Tropfen Schellack an den Stäbchen befestigt waren. Die Stäbchen selbst hingen an einem Spiegel, dieser an einem feinen Metallfaden, der an einer Ebonitfassung innerhalb einer Glasröhre aufgehängt war. Wenn der Spiegel sorgfältig den Platten des Condensators parallel gestellt wird — was auf optischem Wege jedesmal controllirt wurde —, wird die ganze Aufhängung selbst von den Ladungen nicht beeinflusst. Die Stäbchen und Scheiben wurden sorgfältig so befestigt, dass sie genau unter 45° gegen den Spiegel und damit gegen die Condensatorplatten standen. In dem einen der Condensatoren, den wir als Standard bezeichnen, hing zunächst eine dünne Kreisscheibe aus Schwefel, deren Ausschläge uns das Mass für die vorhandene elektrische Kraft gaben. Später wurde für manche Körper ein Kupferstäbchen zum Vergleich genommen. Der Abstand der Condensatorplatten wurde bei beiden Instrumenten gewöhnlich gleich gross gemacht (25 mm, bei grossen Dielektrizitätsconstanten 35 mm).

Theorie der Versuche.

Ein dielektrisches Ellipsoid wird in einem homogenen elektrischen Felde gleichmässig polarisirt. Hat das Ellipsoid die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und wirken in der Richtung der $x\,y\,z$-Axe die inducirenden Kräfte $X\,Y\,Z$, so sind die dielektrischen Momente des Ellipsoids pro Volumeneinheit[1])

$$\alpha = \frac{\varkappa X}{1 + \varkappa A_0} \qquad \beta = \frac{\varkappa Y}{1 + \varkappa B_0} \qquad \gamma = \frac{\varkappa Z}{1 + \varkappa C_0}$$

wo $A_0\,B_0\,C_0$ von dem Verhältniss der Axen abhängige Constanten sind und $\varkappa$ die „Dielektrisirungsconstante" ist, entsprechend der Poisson'schen Magnetisirungsconstanten. Die Dielektrizitätsconstante D ist

$$D = 1 + 4\pi\varkappa.$$

In unserem Fall haben wir ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe die x-Axe sei. Die x- und y-Axe mögen in einer horizontalen Ebene liegen und es möge die elektrische Kraft unseres Feldes den Winkel φ mit der x-Axe bilden (φ ist bei uns nahezu $= 45^0$). Ist P die ganze elektrische Kraft, d. h. die Potentialdifferenz W der Platten dividirt durch ihren Abstand und verläuft P, wie in unserem Falle horizontal, so hat das dielektrische Moment unseres Ellipsoids die Grösse (wenn V das Volumen des Ellipsoids ist)

$$m = \varkappa P V \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(1 + \varkappa A_0)^2} + \frac{\sin^2\varphi}{(1 + \varkappa B_0)^2}}.$$

und die dielektrische Axe bildet mit der x-Axe, der Rotationsaxe, einen Winkel ψ, so dass

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{1 + \varkappa A_0}{1 + \varkappa B_0}\operatorname{tang}\varphi \quad \text{ist.} \qquad \ldots . 1)$$

Das Drehungsmoment, welches den Winkel φ zu vergrössern strebt, ist

1) Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität S. 166.

$$D = -\frac{\varkappa^2 P^2 \sin 2\varphi (B_0 - A_0) V}{(1 + \varkappa A_0)(1 + \varkappa B_0)}$$

Bei unserer Aufhängung wird bei den Stäbchen der Winkel φ verkleinert, bei den Scheiben vergrössert.

Diesem Drehungsmoment wird, wenn der Winkel φ sich um α verkleinert hat, durch die Torsion des Drahtes das Gleichgewicht gehalten. Ist also M der Torsionscoefficient des Aufhängedrahtes und wird die Grösse $\frac{\alpha}{\cos 2\alpha}$ gleich p gesetzt und zugleich, wie bei unseren Versuchen $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ angenommen, so wird

$$2) \ldots\ldots \quad M p = \frac{\varkappa^2 P^2 (B_0 - A_0) V}{(1 + \varkappa A_0)(1 + \varkappa B_0)}$$

Werden die entsprechenden Grössen für die Standardscheibe mit γ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}$ bezeichnet und wird

$$\frac{\gamma^2 (\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0) \mathfrak{B}}{(1 + \gamma \mathfrak{A}_0)(1 + \gamma \mathfrak{B}_0)} = s$$

gesetzt, vorausgesetzt, dass γ bekannt ist, so wird

$$3) \ldots \quad \frac{\varkappa^2}{(1 + \varkappa A_0)(1 + \varkappa B_0)} = \frac{p}{\mathfrak{p}} \frac{M}{\mathfrak{M}} \frac{s}{V (B_0 - A_0)}$$

woraus $\varkappa$ zu bestimmen ist, wenn $\frac{p}{\mathfrak{p}}$, $\frac{M}{\mathfrak{M}}$, V gemessen, s, A_0, B_0 berechnet sind.

Die Grösse A_0 und B_0 ergeben sich [1])

1. für eine Scheibe, wenn a die halbe Rotationsaxe, b die andere Halbaxe ist und $\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} = \varepsilon$ gesetzt wird:

1) Kirchhoff Mechanik S. 131.

$$A_0 = 4\pi \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^3} \left\{ \varepsilon - arc\tan g\, \varepsilon \right\}$$

$$B_0 = \frac{2\pi}{\varepsilon^3} \left\{ (1+\varepsilon^2)\, arc\tan g\, \varepsilon - \varepsilon \right\}$$

2. für ein Stäbchen bei derselben Bezeichnung der Halbaxen, wenn $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \eta$ gesetzt wird

$$A_0 = -4\pi \frac{1-\eta^2}{\eta^3} \left\{ \left(\log \text{nat} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \right) + \eta \right\}$$

$$B_0 = \frac{2\pi}{\eta^3} \left\{ (1-\eta^2) \left(\log \text{nat} \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \right) + \eta \right\}$$

Die Messungen.

Zu den Messungen wurden 4 Leydener Flaschen benutzt, die wir, von der kleinsten angefangen, als IV, III, II und I bezeichnen. Die Capacitäten dieser Flaschen wurden direkt verglichen und ergaben, bezogen auf $C_{IV} = 100$, die Werthe $C_{IV} = 100$, $C_{III} = 151$, $C_{II} = 185$, $C_I = 396$. Da aber in unseren Beobachtungen zu den Flaschen noch die beiden Condensatoren parallel geschaltet waren, so sind die Verhältnisse kleiner. Die in Betracht kommenden Capacitäten lassen sich angenähert aus den Ausschlägen unseres Standardinstruments bei so grosser Entfernung der beiden Mikrometerkugeln, dass keine Funken mehr überspringen ($\tau = \infty$), vergleichen. Es waren z. B. diese Ausschläge α und die daraus berechneten Capacitäten C

Flasche	IV	III	II	I
α	644	431	380	199
C	100	149,6	170	324

Letztere Werthe von C sind für unsere Versuche massgebend.

Die entsprechenden Wellenlängen λ, die den Wurzeln aus den Capacitäten proportional sind, sind

$$\lambda_{IV} = 100 \quad \lambda_{III} = 122{,}3 \quad \lambda_{II} = 130{,}4 \quad \lambda_{I} = 180{,}0.$$

Die Wellenlängen umfassen also keine ganze Oktave. Ausserdem aber konnten wir, wie erwähnt, sehr grosse Wellenlängen anwenden, indem wir ohne Funken, bloss mit den Ruhmkorffschwingungen arbeiteten. Diese Wellenlänge wollen wir als λ_R bezeichnen.

Bei jeder Flasche wurden gewöhnlich 4 Messungen in der Art gemacht, dass die Funkenstrecke auf 3 verschiedene, jeweils passende Abstände gebracht wurde, bei denen continuirlich Funken übergingen und die wir von der grössten zur kleinsten mit τ_a, τ_b, τ_c bezeichnen, und eine vierte Messung ohne Funken, mit τ_∞ bezeichnet. Wir nehmen an, dass bei derselben Flasche die Schwingungsdauer sich nicht wesentlich ändert, wenn man der Funkenstrecke die Längen τ_a, τ_b, τ_c giebt, die höchstens um einige Millimeter differirten. Feddersen zeigte bereits, dass diese Veränderung ohne wesentlichen Einfluss ist.

Beobachtungen an Schwefel.

Um die Dielektrizitätsconstante des Schwefels für verschiedene λ zu messen und zugleich für unser Standardinstrument das γ zu bestimmen, welches in die weiteren Messungen eingeht, wendeten wir eine Scheibe und ein Stäbchen aus Schwefel an. Aus dem Verhältniss ihrer Drehungen lässt sich γ berechnen. Bezeichnen wir nämlich für die Scheibe alle Grössen mit deutschen, für das Stäbchen mit lateinischen Buchstaben, so ergiebt sich aus der obigen Formel 2)

$$\frac{(1+\gamma\mathfrak{A}_0)(1+\gamma\mathfrak{B}_0)}{(1+\gamma A_0)(1+\gamma B_0)} = \frac{p}{\mathfrak{p}}\,\frac{M}{\mathfrak{M}}\,\frac{\mathfrak{V}}{V}\,\frac{\mathfrak{B}_0-\mathfrak{A}_0}{B_0-A_0} = f.$$

Es ist dabei vorausgesetzt, dass die beiden Schwefelstücke dasselbe γ haben, eine Voraussetzung, die wohl unbedenklich ist, da Scheibe und Stäbchen gleichzeitig hergestellt waren.

Die Resultate der Messungen sind folgende, wobei jeder Werth von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ aus mindestens 3 durch Schwingungsbeobachtungen erhaltenen Einzelwerthen das Mittel ist.

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Schwefelstäbchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_I	λ_R
$\tau = a$	0,5695	0,5568	0,5866	0,5509	0,5634 aus I
$\tau = b$	0,5683	0,5643	0,5602	0,5578	0,5687 „ II
$\tau = c$	0,5705	0,5691	0,5491	0,5686	0,5588 „ III
					0,5692 „ IV
Mittel	0,5694	0,5634	0,5653	0,5589	0,5649

Diese Zahlen weichen vom Mittel um nicht mehr als 1 % ab, so dass eine Abhängigkeit von der Wellenlänge nicht zu erkennen ist, sie zeigen zugleich, dass die Methode bis auf 1 bis 2 % übereinstimmende Zahlen ergiebt. Diese Fehlergrenze beruht hauptsächlich darauf, dass der Unterbrecher des Ruhmkorff nicht regelmässig funktionirt, ein Uebelstand, der durch die gleichzeitige Beobachtung an zwei Instrumenten wohl in seiner Wirkung reducirt, aber nicht ganz unschädlich gemacht werden kann.

Die zur Berechnung von γ nothwendigen Constanten sind

$$\mathfrak{A}_0 = 11{,}8432 \quad \mathfrak{B}_0 = 0{,}3616 \quad \mathfrak{M} = 4{,}4174 \quad \frac{\mathfrak{V}}{V} = \frac{621}{491}$$

$$A_0 = 0{,}6105 \quad B_0 = 5{,}9780 \quad M = 4{,}3400.$$

Aus dem Mittelwerth aller $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ ergiebt sich

$$\gamma = 0{,}24915$$
$$D = 1 + 4\,\pi\,\gamma = 4{,}131.$$

Dieser Werth für D liegt nahe an dem von Boltzmann gefundenen, welcher für die drei Hauptaxen die Werthe fand $D = 4{,}773,\ 3{,}970,\ 3{,}811$, im Mittel also 4,184. Diese beiden Schwefelstücke wurden gleich nach der Herstellung (Guss) untersucht. Für andere, lange benützte Schwefelstücke fanden wir $\gamma = 0{,}24915$, woraus $D = 3{,}798$ sich ergiebt. Es ist bekannt, dass gegossener Schwefel beim Stehen spontan in eine andere Modifikation übergeht.

Beobachtungen an Paraffin.

Eine Paraffinscheibe von 20,9 mm Durchmesser und 1,2 mm Dicke wurde mit einer Schwefelscheibe verglichen, für welche $s = 54{,}855$ (s. p. 194) war. Es ergaben sich folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Paraffinscheibe}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	0,3239	0,3406	0,3115	0,3463	0,3492 aus I
$\tau = b$	0,3388	0,3507	0,3572	0,3375	0,3441 „ II
$\tau = c$	0,3532	0,3341	0,3531	0,3420	0,3327 „ III
					0,3434 „ IV
Mittel	0,3386	0,3418	0,3406	0,3419	0,3423

Auch hier lässt sich, wie zu erwarten, ein Gang der Dielektrizitätsconstante nicht erkennen. Aus dem Mittelwerth der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und den Constanten der Paraffinscheibe $A_0 = 11{,}5105$, $B_0 = 0{,}52788$, $V = 411{,}7$ ergiebt sich

$$\varkappa = 0{,}1162$$
$$D = 1 + 4\,\pi\,\varkappa = 2{,}20.$$

Boltzmann fand für Paraffin 2,32.

Beobachtungen an Wasser.

Um Körper mit grösserer Dielektrizitätsconstante auf ihre etwaige Dispersion zu untersuchen, gingen wir bald zum Wasser über, dessen Dielektrizitätsconstante die grösste bisher gemessene ist. Wir brachten das Wasser in eine kleine dünnwandige Ebonitröhre (20,1 mm Länge, 3,0 mm Durchmesser), welche an den beiden Enden durch Ebonitpfröpfchen verschlossen war. Die Messungen wurden erst an der leeren, dann an der mit Wasser gefüllten Röhre vorgenommen und die ersteren Ausschläge, auf gleiche Standardausschläge reducirt, von den letztern abgezogen. Diese Correktion betrug 2—3 %. Mit den Ruhmkorffschwingungen allein haben wir keine Messungen angestellt, weil bei unsern Potentialen dann die Ausschläge zu gross wurden, so dass merkbare Einwirkungen der Ladungen auf den Spiegel der Aufhängung stattfanden, die nur unsicher hätten eliminirt werden können. Wir beschränken uns also auf die Angabe der Resultate mit raschen Condensatorschwingungen. Die benützte Schwefelscheibe hatte ein $s = 43{,}610$.

Die Beobachtungen ergaben folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Wasserröhrchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_I	λ_{II}	λ_{IV}
$\tau = a$	4,1812	4,1823	4,1324
$\tau = b$	4,1577	4,1326	3,9869
$\tau = c$	4,1117	4,0481	4,0802
Mittel	4,1502	4,1210	4,0665

Es scheint hier ein Gang der Dielektrizitätsconstante in der Weise vorzuliegen, dass mit wachsender Wellenlänge auch die Dielektrizitätsconstante grösser wird. Da jedoch die Differenzen der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ 2 % nur wenig übersteigen, so ist das

Resultat nicht sicher. Aus dem Mittelwerth der $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und $A_0 = 0{,}45998$, $B_0 = 6{,}05330$, $V = 140{,}00$ ergiebt sich

$$\varkappa = 5{,}8324$$
$$D = 73{,}54$$

ein Werth, der mit den bisher bekannten gut übereinstimmt. Es ist jedoch dieses Resultat bei so grossen Werthen von D nur durch aussergewöhnliche Sorgfalt zu erreichen und zwar desshalb, weil eben der Werth von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ so gross ist, dass kleine Aenderungen in ihm und kleine Ungenauigkeiten in der Bestimmung der Dimensionen des Röhrchens schon grosse Aenderungen von D hervorbringen.

Um diesen Uebelstand, der auch bei anderen Substanzen sich zeigte, zu vermeiden, haben wir versucht, ob wir nicht derartige Körper mit grossem D mit Metallen vergleichen können.

Beobachtungen an Kupfer.

Wendet man die Mosotti-Poisson'sche Theorie auf Metalle an, so ist, weil für diese bei statischen Zuständen das Potential constant sein muss, die Dielektrisirungsconstante $\varkappa = \infty$ zu setzen. Es war die Frage, ob bei unsren, immerhin raschen Schwingungen die Ladungen den Metallen gegen über noch als statische oder besser quasistatische anzusehen wären. War das der Fall, dann musste ein Kupferstäbchen den Werth $D = \infty$ ergeben. Dabei ist zu bedenken, dass die oben entwickelte Formel 3, durch welche man D aus $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ bestimmt, eine Curve von folgendem Verlauf giebt. Trägt man die $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ als Abscissen auf, so steigt die Curve von D erst langsam, dann rascher an und geht endlich steil bis $+\infty$, um dann nach $-\infty$ zu springen und mit weiter wachsendem $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ allmählich kleinere negative Werthe von D zu liefern.

Wenn also die Beobachtungen einen sehr grossen positiven oder negativen Werth von D ergeben, so ist dies ein Beweis für $\varkappa = \infty$. Die Beobachtungen ergaben für ein Kupferstäbchen von 23 mm Länge und 2,94 mm Durchmesser (an den Enden abgerundet) folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Kupferstäbchen}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$\tau = a$	7,971	8,008	8,004
$\tau = b$	8,153	7,823	8,053
$\tau = c$	7,983	8,085	8,017
Mittel	8,0357	7,9720	8,0280

Mit dem kleinsten Werth 7,9720 ergiebt sich $D = + 7445$, mit dem grössten 8,0357, der nur um 0,75 % grösser ist, $D = - 9120$, so dass damit der Werth von $\varkappa = \infty$ für unsre Schwingungen als gültig bewiesen ist.

Wenn das Kupferstäbchen als Standard genommen wird, so ist der Werth der Grösse s (p. 194).

$$s = \frac{(\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{B}_0} = 397{,}7.$$

Beobachtungen an Bromblei.

Ein Stäbchen aus Bromblei von 21,6 mm Länge und 3,9 mm Dicke ergab mit Kupfer verglichen folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Brombleistäbchen}}{\text{Kupferstäbchen.}}$

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{III}	λ_{IV}
$\tau = a$	0,8767	0,7828	0,8355	0,8223
$\tau = b$	0,8573	0,8486	0,7929	0,7884
$\tau = c$	0,8437	0,8141	0,7956	0,7760
Mittel	0,8592	0,8152	0,8080	0,7956

Hier zeigen die Zahlen $\frac{p}{\mathfrak{p}}$, von denen die Dielektrizitätsconstante abhängt, einen ausgesprochenen Gang mit der Wellenlänge und zwar so, dass die Dielektrizitätsconstante mit wachsender Wellenlänge selbst wächst. Die Berechnung ergiebt für die Dielektrizitätsconstante

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}
$D=$	41,792	42,938	43,692	48,643

Dieser Gang zeigt an, dass bei kürzeren Wellen als λ_{IV} Absorptionen und anomale Dispersionen stattgefunden haben und dass die Dispersionscurve in unserem Intervall noch in aufsteigendem Gang ist.

Beobachtungen an Jodblei.

Denselben Gang ergaben die Beobachtungen an einem Jodbleistäbchen von 21,7 mm Länge und 3,60 mm Dicke. Es ergaben sich folgende

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Jodbleistäbchen}}{\text{Kupferstäbchen}}$.

	λ_{I}	λ_{II}	λ_{IV}
$\tau = a$	0,8178	0,8030	0,8243
$\tau = b$	0,9303	0,9191	0,8544
$\tau = c$	0,9355	0,8977	0,8158
Mittel	0,8946	0,8733	0,8315

Die Differenz der äussersten Werthe ist 7 %. Die daraus berechneten Werthe der Dielektrizitätsconstanten, die grössten bisher bekannten, sind

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}
D	113,2	147,7	172,8

Wenn nun auch der Gang der Dielektrizitätsconstante bei diesen beiden Körpern die frühere Ansicht zu bestätigen scheint, dass mit Abkürzung der Ladungszeit die Dielektrizitätsconstanten kleiner werden, weil die Leitung sich dann nicht voll entwickeln kann, so scheinen uns gegen diese Erklärung die Gründe zu sprechen, dass erstens bei unserem Wasser (Wasserleitungswasser, nicht destillirtes Wasser), welches ein besserer Leiter als Jodblei und Bromblei bei diesen Temperaturen ist, ein so erhebliches Anwachsen von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ mit waschsender Wellenlänge sich nicht zeigt, sondern nur ein noch in die Beobachtungsfehler fallendes und zweitens, dass unsere nun anzuführenden Beobachtungen an Beryll ein ganz anderes, anomales Verhalten zeigten.

Beobachtungen an Beryll.

Wir hatten eine senkrecht zur Axe geschnittene Beryllscheibe, welche wir der Freundlichkeit des Herrn Prof. Groth verdanken. Ihr Durchmesser ist 15,5 mm, ihre Dicke 0,44 mm. Daraus ergeben sich ihre Constanten

$$A_0 = 12{,}0254 \qquad B_0 = 0{,}27038 \qquad V = 83{,}025$$

Folgendes ist das Resultat einer ersten Messungsreihe:

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Beryllscheibe}}{\text{Schwefelscheibe.}}$

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{R}
$\tau = a$	1,0246	0,7836	1,1270	0,6935 aus I
$\tau = b$	1,1027	0,7149	0,9531	0,7185 „ II
$\tau = c$	0,9410	0,7767	1,0698	0,6735 „ IV
Mittel	1,0228	0,7584	1,0499	0,6952

Die Zahlen zeigen deutlich ein Minimum von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ und daher auch ein Minimum der Dielektrizitätsconstante für die

Wellenlänge λ_{II}. Die Dielektrizitätsconstanten ergeben sich aus diesen Zahlen:

	λ_{IV}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{B}
$D=$	8,503	6,580	9,207	5,943

Der Verlauf dieser Zahlen, die hier von der kürzesten zur längsten Wellenlänge fortschreitend geordnet sind, ist genau derselbe, wie der für den optischen Brechungsindex bei anomaler Dispersion. Es sind z. B. für Fuchsin die Zahlen von Wernicke für die

Linie	H	G	C	A
$n =$	1,54	1,31	1,90	1,73.

Um die Werthe von D sicherer zu bestimmen, haben wir eine zweite Versuchsreihe mit einer andern Schwefelscheibe als Standard angestellt, indem wir noch die Flasche III, die eine Wellenlänge zwischen II und IV ergiebt, hinzunahmen.

Folgendes sind die

Werthe von $\frac{p}{\mathfrak{p}}$ für $\frac{\text{Beryllscheibe.}}{\text{Schwefelscheibe II.}}$

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_{I}	λ_{B}
$\tau = a$	0,6274	0,5042	0,5407	0,6233	0,5217 aus I
$\tau = b$	0,6146	0,5189	0,5426	0,6008	0,4885 „ II
$\tau = c$	0,5738	0,4775	0,5360	0,6572	0,5140 „ III
					0,4876 „ IV
Mittel	0,6053	0,5002	0,5398	0,6271	0,5029

Es ist also hier der Gang der Zahlen genau derselbe, nur zeigt sich das Minimum noch bei kürzeren Wellen als früher, nämlich schon bei der Wellenlänge λ_{III}.

Die hieraus berechneten Werthe von D sind, zusammengestellt mit den aus den vorigen Beobachtungen, folgende:

	λ_{IV}	λ_{III}	λ_{II}	λ_I	λ_R
Beob. I	8,50		6,58	9,21	5,94
Beob. II	7,80	6,60	7,08	8,04	6,68
Mittel	8,15	6,60	6,83	8,62	6,31

Die aus der Formel $n^2 = D$ berechneten Brechungsexponenten sind folgende:

$$n = 2{,}846 \quad 2{,}588 \quad 2{,}613 \quad 2{,}936 \quad 2{,}512.$$

Curie[1]) fand für Beryll in der Richtung der optischen Axe $D_c = 6{,}24$, senkrecht zur optischen Axe $D_a = 7{,}58$.

Die Dispersionscurve verläuft übrigens bei Beryll lange nicht so scharf, wie sie es bei Fuchsin thut.

Wir beabsichtigen diese Erscheinungen bei Beryllstäbchen anderer Provenienz und verschiedener Orientirung der Axe weiter zu untersuchen und die Wellenlängen, bei denen die anomale Dispersion stattfindet, absolut zu bestimmen. Aus der Thatsache der anomalen Dispersion lässt sich auch erkennen, warum die Einzelbeobachtungen beim Beryll nicht denselben Grad der Uebereinstimmung zeigen, wie bei anderen Substanzen. Wir haben es ja sicher nicht mit ganz reinen Wellen zu thun, sondern jedenfalls mit etwas gemischten, zum mindesten schon dadurch, dass die Ruhmkorffschwingungen sich den Funkenschwingungen überlagern.

Wenn man die oben unter 1 angegebene Formel betrachtet, so erkennt man, wie sich in unserem Falle das Analogon zu der prismatischen Trennung der Farben ergiebt. Denn der Winkel, den die dielektrische Axe des polarisirten Körpers mit der Rotationsaxe bildet, ist, wenn $\varphi = 45^0$ ist,

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{1 + \varkappa A_0}{1 + \varkappa B_0}$$

1) Curie Ann. chim. et phys. (6) 17. p. 385. 1889.

Hat also $\varkappa$ für verschiedene Längen der Wellen verschiedene Werthe, so ist die Richtung der dielektrischen Axe im Körper jedesmal verschieden und ein System von verschiedenen gleichzeitig ankommenden Wellen giebt eine Reihe von fächerartig auseinandergehenden dielektrischen Axen.

Da die Absorption der elektrischen Strahlen, die die Dispersion bedingt, von der Leitung abhängt, so folgt aus unseren Versuchen auch, dass die Leitungsfähigkeit solcher Körper bei verschiedenen Wellenlängen verschieden sein muss und allgemein, dass Dielektrizitätsconstante und Leitungsfähigkeit nicht vollständig von einander unabhängige Grössen sind, sondern dass sie in ähnlicher Weise durch die Constitution des Körpers zusammenhängen, wie in der Optik absorbirender Körper die Brechung und die Absorption.

München, Physik. Institut d. Univers., Mai 1894.

Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Der Abschnitt der Kirchhoff'schen Vorlesungen über Gastheorie überragt so wie die übrigen Theile dieses Werkes sowohl in der Vorzüglichkeit der Auswahl des Stoffes als auch in der Darstellung weit die gewöhnlichen Lehrbücher. So wird dort zum ersten Male auf die Richtigkeit der Thatsache hingewiesen, dass die 3 experimentell so oft gefundenen Werthe 1·67, 1·4 und 1·33 für das Verhältniss der Wärmecapacitäten eines Gases bei constantem Drucke und Volumen, aus der Annahme der Analogie der Gasmoleküle mit festen Körperchen folgen und ich will bei dieser Gelegenheit nur beiläufig bemerken, dass der Haupteinwand gegen diese Analogie, der auf der complicirten Natur des Spectrums selbst des *Hg*-Dampfes begründet ist, durch die Versuche von Pringsheim[1]) sehr an Bedeutung verliert, welche beweisen, dass diese Spectra nicht durch die regelmässige innere Wärmebewegung der Gasmoleküle zwischen je 2 Zusammenstössen, sondern durch fremdartige chemische Erregungen (elektrische Schwingungen im umgebenden Aether?) hervorgebracht werden.

---

1) Wied. Ann. 49, p. 347, 1893.

Umsomehr müssen, wie mir scheint, die Ungenauigkeiten der Darstellung in dem eingangs erwähnten Buche rückhaltslos aufgedeckt werden, damit sich nicht, von Kirchhoffs Autorität gedeckt, Irrthümer in die Gastheorie einschleichen. Denn selbst diejenigen, die wie der Herausgeber des in Rede stehenden Theiles der Kirchhoff'schen Vorlesungen die Gastheorie des auf sie aufgewandten Scharfsinnes unwerth achten, können und sollen nicht wünschen, dass, wer überhaupt über Gastheorie schreibt, es mit geringerem Scharfsinn thue.

Auf Seite 147 des 4. Bandes der Vorlesungen über mathematische Physik findet Kirchhoff für die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten eines von einem Zusammenstosse kommenden Molekülpaares in den durch das Integrale angegebenen Gebieten liegen, den Werth:

$$N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q) f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - Q) \cdot \\ \cdot \int d x_1 \, d y_1 \, d z_1 \, d \xi_1 \, d \eta_1 \, d \zeta_1 \, d x_2 \, d y_2 \, d z_2 \, d \xi_2 \, d \eta_2 \, d \zeta_2 \qquad 1)$$

Da hier Q einen bestimmten Werth hat, nach welchem später differentiirt wird, so sind die Grenzen der Gebiete so eng zu ziehen, dass sie nur Molekülpaare umfassen, die vorher in ganz bestimmter Weise zusammengestossen sind. Das gleichzeitige Zusammentreffen zweier Moleküle in diesen beiden Gebieten kann daher nie durch die zufällige progressive Bewegung, bei welcher beide Moleküle von einander unabhängig sind, veranlasst werden, sondern nur durch einen vorhergehenden Zusammenstoss. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Moleküle gleichzeitig in diesen Gebieten liegen, darf daher nicht, wie die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier von einander unabhängiger Ereignisse berechnet und gleich

$$N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) \cdot \\ \cdot \int d x_1 \, d y_1 \, d z_1 \, d \xi_1 \, d \eta_1 \, d \zeta_1 \, d x_2 \, d y_2 \, d z_2 \, d \xi_2 \, d \eta_2 \, d \zeta_2$$

gesetzt werden, wodurch die Beweiskraft der folgenden

Deductionen hinfällig wird. Diese Wahrscheinlichkeit kann nur aus der Wahrscheinlichkeit der Zustände der beiden Moleküle vor dem Zusammenstosse und dem Verlaufe des letzteren berechnet werden, wodurch sich der Ausdruck 1) ergiebt. Erst wenn man die Gültigkeit der Gleichung

$$f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta^2 - Q) =$$
$$= f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)$$

bereits voraussetzt, folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit ebensogross ist, als ob die beiden Moleküle unabhängig von einander in die betreffenden Bezirke gelangt wären, woraus dann Maxwell in bekannter Weise schliesst, dass sein Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz durch die Zusammenstösse nicht verändert wird. Dass nicht auch andere Geschwindigkeitsvertheilungsgesetze möglich sind, die durch die Zusammenstösse ebenfalls nicht gestört werden, kann auf diesem Wege überhaupt nicht bewiesen werden.

Bezüglich der Anwendung der auch von Kirchhoff benützten Functionaldeterminante in der Gastheorie sowie deren Beziehung zu Liouville und Jacobis Rechnungen vergl. Wien. Sitzungsber. Bd. 58, Oct. 1868, Bd. 63, März 1871, April 1871 etc. bezüglich der Abgrenzung der Integrationsgebiete vor und nach dem Zusammenstosse, Wien. Sitzungsber. Bd. 66, Oct. 1872, Abschn. 4. Die letzte dieser Abhandlungen citirt auch Hr. Planck bei anderer Gelegenheit.

Um nicht missverstanden zu werden, will ich mich noch enger dem Texte des Kirchhoff'schen Buches anschliessen. Daselbst werden auf Seite 145 zwei Gebiete der Variabeln $\int dx_1\, dy_1\, dz_1\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$ und $\int dx_2\, dy_2\, dz_2\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$ betrachtet. Nehmen wir nun an, es soll sich gleichzeitig ein Molekül in dem einen und ein 2. in dem 2. Gebiete befinden (d. h. die Werthe der Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten des betreffenden Moleküls sollen innerhalb der durch das Integrale angegebenen Grenzen liegen). Dann

sind, je nach der Lage der betreffenden Gebiete 3 Fälle möglich. 1. Die beiden Moleküle eilen eben einem Zusammenstosse zu (d. h. sie stossen, nachdem sie gleichzeitig die Gebiete passirt haben, miteinander zusammen und keines stösst in der Zwischenzeit mit einem 3. zusammen). 2. Sie kommen eben von einem Zusammenstosse (d. h. sie stiessen, vor sie in die Gebiete eintraten, miteinander zusammen, wieder ohne dass eines derselben in der Zwischenzeit mit einem 3. zusammenstiess). Der 3. Fall umfasst alle anderen Möglichkeiten.

Im Kirchhoff'schen Buche wird nun auch im 2. Falle die Wahrscheinlichkeit, dass beide Moleküle gleichzeitig in beiden Gebieten liegen, gleich dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten gesetzt, dass je eines der Moleküle im betreffenden Gebiete liegt, was nur erlaubt ist, wenn man die Richtigkeit der zu erweisenden Gleichung $f(u_1 + Q) f(u_2 - Q) = f(u_1) f(u_2)$ schon voraussetzt. Denn da im 2. Falle die Gebiete so liegen, dass soeben eine Wechselwirkung der Moleküle stattgefunden haben muss, so kann die Anwesenheit des einen Moleküles in seinem Gebiete nicht als ein von der Anwesenheit des andern Moleküls in seinem Gebiete unabhängiges Ereigniss aufgefasst werden.

Zur Integration der Diffusionsgleichung bei variabeln Diffusionscoefficienten.

Von Ludwig Boltzmann.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Herr O. Wiener gab[1]) eine interessante Methode an, den Vorgang der Diffusion zweier Flüssigkeiten in allen Schichten gleichzeitig zu beobachten. Dabei zeigte sich bedeutende Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten. Herr Wiener zeigt, wie man diesem Umstande bei Berechnung der Versuche durch ein Näherungsverfahren Rechnung tragen kann. Ich habe nun schon vor langer Zeit ein Integrale der Diffusionsgleichung für variabeln Diffusionscoefficienten gefunden, welches Hausmaninger[2]) allerdings mit geringem Erfolge zur Berechnung der Versuche Waitz's verwendete. Da dasselbe vielleicht zur Berechnung der Wiener'schen Versuche nützlich sein könnte, so erlaube ich mir hier nochmals darauf zurückzukommen.

Zählen wir, wie Hr. Wiener die $+x$ von der ursprünglichen Grenze der übereinandergeschichteten Flüssigkeiten aus vertikal nach abwärts, bezeichnen mit n_1, n_2, n die Brechungsindices in der obern resp. untern reinen und an irgend einer Stelle der gemischten Flüssigkeit, mit t die

1) Wied. Ann. 49 p. 105, 1893.

2) Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 86, p. 1073, 1882.

seit Beginn der Diffusion verflossene Zeit und nehmen an, dass n die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial n}{\partial x}\right) \qquad 1)$$

erfüllt, wo k eine gegebene Funktion von n ist, sowie, dass die Diffusion weder Boden noch Niveau der obern Flüssigkeit in merklicher Weise erreicht hat, so folgt allgemein

$$n = n_2 - \frac{(n_2 - n_1)\int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2k}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{k} e^{-\int_0^{\lambda} \frac{\lambda\, d\lambda}{2k}}} \qquad 2)$$

Man sieht, dass n und daher auch k nur Funktion von $x:\sqrt{t}$ ist. Unter den Integralzeichen ist immer der Werth des k für $x:\sqrt{t} = \lambda$ zu verstehen. Ich will mich hier nicht weiter darauf einlassen, wie diese Formel abgeleitet werden kann; dass sie alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt, sieht man ohne weiteres. Die Gleichung 2) würde auch richtig sein, wenn k direkt als Funktion von $x:\sqrt{t}$ gegeben wäre; man könnte dann n unmittelbar daraus berechnen. Da aber hier k nicht direkt als Funktion von $x:\sqrt{t}$ gegeben ist, sondern eine zu findende Funktion von n ist, so kann diese Formel zur Berechnung der Versuche nicht verwendet werden. Man muss vielmehr k aus derselben berechnen. Man findet zunächst, wenn man wieder $\lambda = x:\sqrt{t}$ setzt

$$-\frac{1}{2}\lambda \frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(k \frac{dn}{d\lambda}\right) \qquad 3)$$

und hieraus bei constantem t

$$k = \frac{1}{2t\frac{dn}{dx}} \int_x^{\infty} \frac{dn}{dx} \cdot x \cdot dx \cdot \qquad 4)$$

Hr. Wiener findet nun durch das Experiment direkt Curven, deren (von einer schrägen Geraden an gezählte) Ordinaten z den Werthen von $\frac{dn}{dx}$ multiplicirt mit der Constanten $a\delta$ gleich sind, während die Abscissen $y = y_0 + x/\eta$ sind. (Siehe dessen Fig. 13 pag. 123.) Dabei ist η eine experimentell gegebene Constante, y_0 aber der Werth des y für die Stelle, wo die schräge Gerade die ursprüngliche Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten schneidet. Daraus folgt:

$$k = \frac{\eta^2}{2tz} \int_y^\infty z\,(y - y_0)\,dy \qquad 5)$$

Wir berechnen nun zu irgend einem x das dazu gehörige y, ziehen die diesem y entsprechende Ordinate z der Diffusionscurve, bezeichnen mit f den Flächenraum, der links von der Ordinate z, oben von der schrägen Geraden, unten von der Diffusionscurve begrenzt ist, und mit y_s die Abscisse des Schwerpunkts dieses Flächenraumes. Dann ist $f = \int_y^\infty z\,dy$, $y_s \cdot f = \int_y^\infty z\,y\,dy$, daher ist

$$k = \frac{y^2 f\,(y_s - y_0)}{2tz} \qquad 6)$$

der Werth des Diffusionscoefficienten für das betreffende x und t. Kann der Anfang der Diffusion nicht genau festgestellt werden, so ist er natürlich als 2. Unbekannte einzuführen, die Gleichung 6) für 2 verschiedene Zeiten aufzustellen, und daraus k und der Zeitanfang zu bestimmen. Die Vermuthung Herrn Wieners, dass der Diffusionscoefficient besser aus Versuchen mit geringen Concentrationsunterschieden berechnet werden kann, dürfte vollkommen richtig sein. Dagegen kann die obige Formel dienen, um zu controliren, ob für beträchtliche Concentrationsdifferenzen die Gleichung 1) gilt, in welchem

Falle für beliebige Zeiten für gleiche Werthe von n also von $n_2 - f\eta$ auch für k derselbe Werth folgen müsste.

Sollte die Gleichung 1) nicht gültig sein, so könnte eine analoge von der Concentration u gelten, so dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

wäre. Wäre dann $u = f(n)$ und setzt man $f'(n) = h$, $h\varkappa = k$, so hätte man

$$h\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial n}{\partial x}\right) \qquad 1\,\text{a})$$

oder

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k}{h}\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{h}\frac{\partial k}{\partial n}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 \qquad 1\,\text{b})$$

An Stelle der Gleichungen 2), 3), 4) und 5) würde folgen

$$n = n_2 - \frac{(n_2 - n_1)\int\limits_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{d\lambda}{k}\, e^{-\int\limits_0^{\lambda}\frac{\lambda h\, d\lambda}{2k}}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{k}\, e^{-\int\limits_0^{\lambda}\frac{h\lambda\, d\lambda}{2k}}} \qquad 2\,\text{a})$$

$$-\frac{h\lambda}{2}\frac{dn}{d\lambda} = k\frac{d^2 n}{d\lambda^2} + \frac{dk}{dn}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)^2 \qquad 3\,\text{a})$$

$$k = -\frac{1}{2t\frac{dn}{dx}}\int\limits_x^{\infty}\frac{dn}{dx}h\,x\,dx = \frac{\eta^2}{2t\varepsilon}\int\limits_y^{\infty}h\,\varepsilon\,(y - y_0)\,dy \qquad 4\,\text{a})$$

Wäre h als Function von $n = n_2 - \eta f$ bekannt, so müssten also die Ordinaten der Diffusionscurve eine Correction erfahren und es müsste erst von dieser corrigirten Curve der Schwerpunkt gesucht werden.

Man könnte auch bloss voraussetzen, dass n die Gleichung 1 a) erfüllt und ohne Rücksicht auf ihre Bedeutung h und k als 2 unbekannte Functionen von n betrachten.

Dann müsste man so verfahren. Für eine bestimmte Diffusionscurve ist t constant. Daher folgt aus Gleichung 3a)

$$\frac{h x}{2 t} \frac{d n}{d x} + k \frac{d^2 n}{d x^2} + \frac{d k}{d n} \left(\frac{d n}{d x}\right)^2 = 0 \qquad 7)$$

also

$$\frac{z^2}{a \delta} \cdot \frac{1}{h} \frac{d k}{d n} + \frac{1}{\eta} \frac{d z}{d y} \frac{k}{h} + \frac{\eta}{2 t} (y - y_0) z = 0 \qquad 8)$$

In dieser Gleichung sind die beiden Grössen $\frac{1}{h} \frac{d k}{\partial n}$ und $\frac{k}{h}$ also die beiden Coefficienten der Gleichung 1b) als die beiden Unbekannten (unbekannte Functionen von n) zu betrachten. Die übrigen Grössen können wie Hr. Wiener zeigt, leicht für jede Diffusionscurve berechnet werden. Man muss also in 2 zu verschiedenen Werthen von t gehörigen Diffusionscurven solche Ordinaten (y) suchen, für welche n (also die Flächen f bis zu diesen Ordinaten) gleiche Werthe haben. Diese beiden Stellen der beiden Diffusionscurven liefern 2 Gleichungen für die zu jenem n gehörigen Werthe von $\frac{1}{h} \frac{d k}{d n}$ und $\frac{k}{h}$. Wäre auch der Zeitanfang unbekannt, so müsste noch eine 3. Gleichung aus einer 3. Diffusionscurve beigezogen werden. Man kann also so für beliebig viele n die Werthe der beiden Coefficienten der Gleichung 1b) bestimmen. Natürlich ist dieses Verfahren auch auf den eingangs betrachteten Fall, dass die Gleichung 1) gilt, anwendbar und dürfte auch da dem früher beschriebenen vorzuziehen sein.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse natürlich wieder für den Punkt, wo z sein Maximum hat, also $d z / d y = 0$ ist. Für diesen Punkt ist

$$\frac{1}{h} \frac{d k}{d n} = \frac{\eta (y_0 - y) a \delta}{2 z t} \qquad 9)$$

Bezeichnen wir den Maximalwerth des z zu 2 verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 mit z_1 und z_2 die dazu gehörigen y mit y_1 und y_2, so ist also, wenn man annimmt, dass sich $\frac{1}{h}\frac{dk}{dn}$ in der Zeit $t_2 - t_1$ nicht erheblich verändert hat

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{\eta a \delta}{2(t_2 - t_1)}\left[\frac{y_0 - y_2}{z_2} - \frac{y_0 - y_1}{z_1}\right] \qquad 10)$$

Man könnte nun aus Versuchen mit geringer Concentrationsdifferenz k als Function von n und daraus $dk:dn$ berechnen. Würden diese Werthe mit den für grosse Concentrationsunterschiede nach der letzten Formel (darin $h = 1$ gesetzt) berechneten stimmen, so wäre dies ein Beweis der Gültigkeit der Gleichung 1).

Obwohl die vorliegenden Versuche Hrn. Wieners zu einer ausführlichen theoretischen Discussion, wie er selbst bemerkt, noch zu ungenau sind, so will ich doch die Formel9) auf das Diagramm Wieners Fig. 15 p. 135 anwenden, um überhaupt zu zeigen, wie die numerische Berechnung geschehen kann. Daselbst ist

$$\eta = \frac{e_1 - a}{e_1} = \frac{575 \cdot 9}{676 \cdot 5} = 0 \cdot 851, \; a = 100 \cdot 6 \, \text{cm}, \; \delta = 1 \cdot 027 \, \text{cm}$$

$$t = \frac{4 \cdot 18}{24} \text{ Tage}, \; y_0 - y = \text{etwa } 4 \text{ mm}, \; z = 20 \text{ mm}, \text{ daher}$$

$$\frac{1}{h}\frac{dk}{dn} = \frac{53 \text{ cm}^2}{\text{Tag}}$$

Würde die Gleichung 1) gelten, so wäre $h = 1$; obiger Ausdruck wäre also gleich dk/dn. Anderseits findet Herr Wiener für k zwischen Wasser und 3%iger Salzsäure den Werth $k_1 = 2 \cdot 8$, zwischen Wasser und 26%iger Salzsäure aber $k_2 = 4 \cdot 2$, daher $k_2 - k_1 = 1 \cdot 4 \text{ cm}^2 : \text{Tag}$. Der Unterschied der Brechungsindices zwischen Wasser und der

letzten Salzsäure ist $\eta f : a \delta$, wobei f die Fläche zwischen der schiefen Geraden und einer der Curven der Fig. 15 ist. Schätzt man f zu 6 cm^2 (die Figur ist $1/2$ linear verkleinert), so wird $\eta f : a \delta = 0 \cdot 05$. k_1 und k_2 sind die Diffusionscoefficienten beim mittlern Salzsäuregehalt. Es entspricht also k_1 fast reinem Wasser, k_2 aber 13% Salzsäure. Daher entspricht der Aenderung $k_2 - k_1$ des Diffusionscoefficienten etwa die Aenderung $\varDelta n = 0 \cdot 025$ des Brechungsindex; es ist also

$$\frac{k_2 - k_1}{\varDelta n} = 56$$

Dies stimmt gut mit dem oben für $dk : dn$ gefundenen Werth überein, was aber auch ein Zufall sein kann. Die Ableitung weiterer für die Berechnung nützlicher Formeln wird besser geschehen, wenn neue Beobachtungen vorliegen.



Ueber die Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik.

Von A. Wassmuth in Graz.

(Eingelaufen 5. Mai.)

Ein Punkt m eines Systems von Partikeln möge sich in der Zeit τ, wenn er frei wäre, von a nach b bewegen, während seine wirkliche Bewegung durch die Strecke $a\,c$ dargestellt sei; dann sagt bekanntlich das von Gauss aufgestellte Princip des kleinsten Zwanges aus, dass $\Sigma m \cdot b\,c^2$ ein Minimum ist oder dass, wenn $a\,d$ irgend eine virtuelle d. h. mit den Bedingungen des Systems verträgliche Bewegung vorstellt, stets: $\Sigma m \cdot b\,c^2 < \Sigma m \cdot b\,d^2$ sein muss. Sind $x\,y\,z$ die Coordinaten des Punktes m, auf den die Kräfte $m\,X$, $m\,Y$, $m\,Z$ wirken sollen, so geht irgend eine Coordinate x in der sehr kleinen Zeit τ für die wirkliche Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2}\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\tau^2$$

und für die freie Bewegung über in:

$$x + \frac{d\,x}{d\,t}\tau + \frac{1}{2}X\,\tau^2$$

so dass das Quadrat der Ablenkung $b\,c^2$ oder das Quadrat der Coordinatendifferenzen gleich $\frac{\tau^4}{4}\left[\left(\frac{d^2\,x}{d\,t^2} - X\right)^2 + \ldots\right]$ wird.

Man hat daher einen Ausdruck Z — er soll der Zwang des Systems heissen — von der Form

$$Z = \Sigma m \left[\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z \right)^2 \right]$$

wobei sich die Summe auf alle Partikeln erstreckt, zu einem Minimum in Bezug auf die diversen Beschleunigungen: $\frac{d^2 x}{d t^2}$, $\frac{d^2 y}{d t^2}$, .. die kurz $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ ... geschrieben werden sollen, zu machen. Differenzirt man dabei die Bedingungsgleichungen des Systems: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ ... zweimal nach der Zeit, so muss man sich, wie aus der obigen Ableitung hervorgeht[1]), gegenwärtig halten, dass die Coordinaten x und ihre ersten Differentialquotienten als „gegeben" anzusehen sind; die Gleichung: $\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = 0$ drückt nur aus, dass die $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ddot{x} + \ldots$ unveränderlichen Werthen gleich sein müssen. Für gegebene Werthe der x und $\frac{d x}{d t}$ sollen also die $\ddot{x}$ so bestimmt werden, dass Z zu einem Minimum werde. Man erhält so die bekannten Gleichungen:

$$m (\ddot{x} - X) + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \ldots = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Statt der Coordinaten $x\, y\, z$ ... sollen nun n von einander unabhängige Variabeln $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$ eingeführt werden, so dass die virtuelle Arbeit $= P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \ldots + P_n \delta p_n$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa \lambda} a_{\varkappa \lambda}\, \dot{p}_\varkappa\, \dot{p}_\lambda$ wird, wobei die P_μ und $a_{\varkappa \lambda} = a_{\lambda \varkappa}$ nur von den Coordinaten abhängen und die griechischen Buchstaben, wie im folgenden immer, von 1 bis n gehen.

---

1) Lipschitz, Borch. Jour. 82. Band 316 (Rausenberger Mechanik I 166); Gibbs, Beiblätter IV 319.

Dann wird der Zwang Z, wie Lipschitz (a. a. O. p. 330) zeigte, ausgedrückt durch:

$$Z = \sum_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{\Delta} \left[a_{1\mu} \ddot{p}_1 + a_{2\mu} \ddot{p}_2 + .. + \begin{bmatrix} 1\,1 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 1\,2 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + .. - P_\mu \right]$$

$$\left[a_{1\nu} \ddot{p}_1 + a_{2\nu} \ddot{p}_2 + .. + \begin{bmatrix} 1\,1 \\ \nu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 1\,2 \\ \nu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + .. - P_\nu \right]$$

wobei Δ die Determinante aus den $a_{\varkappa\lambda}$ und $A_{\mu\nu}$ die adjungirte

$$\left(A_{\mu\nu} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\mu\nu}} \right)$$

vorstellt und

$$\begin{bmatrix} \varkappa\,\lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{\varkappa\mu}}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial p_\varkappa} - \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial p_\mu} \right]$$

gesetzt ist.

Der Ausdruck für Z wird übersichtlicher und für (gewisse) physikalische Probleme geeigneter, wenn die lebendige Kraft T eingeführt wird. Setzt man nämlich:

$$T_\mu = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial p_\mu}$$

so ist[1]) auch

$$T_\mu = a_{1\mu} \ddot{p}_1 + a_{2\mu} \ddot{p}_2 + \ldots + \begin{bmatrix} 1\,1 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_1 + \begin{bmatrix} 1\,2 \\ \mu \end{bmatrix} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$$

und es wird:

$$Z = \sum_{\mu\nu} \frac{A_{\mu\nu}}{\Delta} [T_\mu - P_\mu] [T_\nu - P_\nu] \quad \text{d. i.} \qquad \text{(I)}$$

$$Z = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} A_{11} (T_1 - P_1)^2 + A_{22} (T_2 - P_2)^2 + \ldots \\ \quad + 2 A_{12} (T_1 - P_1)(T_2 - P_2) + \ldots \\ \qquad + 2 A_{23} (T_2 - P_2)(T_3 - P_3) + \ldots \end{array} \right\}$$

1) C. f. e. g. Rayleigh, der Schall, p. 111; Stäckel, Borch. Jour. 107, p. 322.

Da dieser Ausdruck für den Zwang Z, wie es scheint, neu ist, so ist es nicht überflüssig, nachzuweisen, dass man in Ausführung der Minimumsbedingung für Z zu den Lagrange-schen Gleichungen kommt. Dabei hat man zu Folge der obigen Bemerkung bei der Differentiation des Z nach $\ddot{p}_1$ die Grössen p_1 und $\dot{p}_1$ als gegeben oder fix anzusehen und von der Beziehung:

$$\frac{\partial T_\mu}{\partial \ddot{p}_\varkappa} = a_{\mu\varkappa} = a_{\varkappa\mu}$$

Gebrauch zu machen. Man erhält so:

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\mu} A_{\mu\nu}}{\Delta} (T_\nu - P_\nu) + \sum_{\mu\nu} \frac{a_{1\nu} A_{\mu\nu}}{\Delta} (T_\mu - P_\mu)$$

oder, da diese Summen einander gleich sind,

$$\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = \frac{2}{\Delta} \sum_{\mu\nu} a_{1\mu} A_{\mu\nu} (T_\nu - P_\nu)$$

oder:

$$\frac{1}{\Delta}\sum_\nu (T_\nu - P_\nu) \sum_\mu a_{1\mu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta}\sum_\nu (T_\nu - P_\nu)[a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} . .]$$

Da nun nach einer Eigenschaft der Determinanten: $a_{11} A_{1\nu} + a_{12} A_{2\nu} + . . = \Delta$ oder Null wird, je nachdem $\nu = 1$ oder $\nu > 1$ ist, so folgt also aus: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ auch $T_1 - P_1 = 0$ d. i. die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} = P_1$$

Für den Zwang Z lassen sich ganz ähnlich, wie man für die Lagrange'sche Grundgleichung Nebenformen[1]) aufstellte, noch andere Ausdrücke finden.

Wichtig für die Anwendung ist die Bemerkung, dass sich der Zwang Z so darstellen lässt, dass darin eine Be-

1) Weinstein, Wied. Ann. 15. Budde, Mechanik I 397.

schleunigung z. B. $\ddot{p}_1$ von den übrigen losgelöst erscheint; es ist: $Z \cdot \varDelta = \frac{1}{2}(L_1 \ddot{p}_1^2 + 2 M_1 \ddot{p}_1 + N_1)$ wo die $L_1 M_1 N_1$ die $\ddot{p}_1$ nicht enthalten und L_1 und M_1 aus $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_1} = 0$ leicht gefunden werden können.

„Sind bei einem physikalischen Probleme die virtuelle Arbeit $\sum\limits_{\mu} P_\mu \delta p_\mu$ und die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{\varkappa\lambda} a_{\varkappa\lambda} \dot{p}_\varkappa \dot{p}_\lambda$ gegeben, so lässt sich mittelst der Gleichung I der Zwang des Systems bestimmen; die Minimumseigenschaft von Z drückt ein — in vielen Fällen sicher neues — Gesetz für das System aus, ganz abgesehen davon, dass andere, vielleicht schon bekannte Gesetze durch wirkliches Differenziren des Z daraus folgen.“

So hat z. B. Herr Boltzmann in wundervoll einfacher Weise an der Hand der Lagrange'schen Gleichungen, somit sich stützend auf mechanische Vorgänge, in seinen Vorlesungen I die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrizität abgeleitet. Es erhellt, dass man auch vom Principe des kleinsten Zwanges in der Form der obigen Gleichung I als Obersatz ausgehen kann und, da die virtuelle Arbeit und die lebendige Kraft angegeben werden, durch Aufsuchen der Minimumsbedingung zu den Lagrange'schen Gleichungen und — nun ganz an der Hand Boltzmann's fortschreitend — zu den Maxwell'schen Gleichungen kommen muss. Wenn es auch auf diese Art schwer möglich sein wird, die klassischen Methoden Boltzmann's, besonders die im 2. Theile seiner Vorlesungen, noch mehr zu vereinfachen, so drückt die Bedingung: $Z =$ Minimum immerhin eine neuerkannte Wahrheit aus.

Als ein Beispiel möge der Fall von 2 cyklischen Coordinaten $\dot{p}_1 = l_1'$ und $\dot{p}_2 = l_2''$ — von den langsam veränderlichen Parametern k werde einstweilen abgesehen — be-

trachtet werden. Hier ist: $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2$ $= \frac{A}{2} l_1'^2 + \frac{B}{2} l_2'^2 + C l_1' l_2'$, wenn Boltzmann's Bezeichnung eingeführt wird. Es folgt: $a_{11} = A$, $a_{22} = B$, $a_{12} = C$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix} = A B - C^2$, $A_{11} = B$, $A_{12} = -C$, $A_{22} = A$, $T_1 = \frac{d}{dt}(A l_1' + C l_2')$, $T_2 = \frac{d}{dt}(B l_2' + C l_1')$. Ausserdem möge wegen der Reibung oder Zähigkeit die von Rayleigh aufgestellte Zerstreuungsfunktion (a. a. O. 108 und 109 pg.) durch $F = \frac{1}{2} \sum (\varkappa_1 \dot{x}_1^2 + \ldots) = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2$ bezeichnet werden; dann tritt bekanntlich zu den Kräften $P_\mu = L_\mu$ noch hinzu: $-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu}$. Auch erhellt aus inneren Gründen, dass $b_{12} = 0$ ist.

Hiemit wird denn schliesslich der Zwang Z ausgedrückt durch:

$$Z \times (A B - C^2) = B \left[\frac{d}{dt}(A l_1' + C l_2') - L_1 - b_{11} l_1'\right]^2$$

$$-2C\left[\frac{d}{dt}(A l_1' + C l_2') - L_1 - b_{11} l_1'\right]\left[\frac{d}{dt}(B l_2' + C l_1') - L_2 - b_{22} l_2'\right]$$

$$+ A \left[\frac{d}{dt}(B l_2' + C l_1') - L_2 - b_{22} l_2'\right]$$

und es soll Z ein Minimum sein, derart, dass $\frac{\partial Z}{\partial l_1'} = 0$ und $\frac{\partial Z}{\partial l_2'} = 0$ ist. Hierin stellen (Boltzmann I pg. 34 und 35) l_1' und l_2' die Stromstärken in 2 Leitern, b_{11} und b_{22} deren Widerstände, L_1 und L_2 die elektromotorischen Kräfte in ihnen, A und B die Coefficienten der Selbstinduction und C den der gegenseitigen Induction vor. Sind noch Conden-

satoren (l. c. I 35) eingeschaltet, so treten noch Glieder von der Form: $d_1 l_1$ und $d_2 l_2$ in die Klammern.

Die Bedingung: $Z =$ Minimum spricht also ein elektrodynamisches Grundgesetz aus und liefert die Theorie der Selbstinduction und wechselseitigen Induction für nicht zu schnelle Stromschwankungen. Will man auch die ponderomotorischen Kräfte erhalten, so muss ein langsam veränderlicher Parameter k neben l_1 und l_2 als 3. Variabele eingeführt, der allgemeine Ausdruck für Z aufgestellt und die Gleichung $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{k}} = 0$, wobei k und $\dot{k}$ als constant anzusehen sind, gebildet werden; erst nachher hat man $\dot{k} = 0$ und $\ddot{k} = 0$ zu nehmen und erhält, wie Boltzmann, die Beziehung;

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l_1'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l_2'^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l_1' l_2' \frac{\partial C}{\partial k}$$

Auch die Akustik bietet ein weites Feld zur Anwendung des obigen Principes. Es treten da häufig in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft nur rein quadratische Glieder mit gleichen Coefficienten auf, wesshalb sich dann die Gleichung für den Zwang einfacher gestaltet.

Führt man die Abkürzung: $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ ein, so ist der Zwang Z gegeben durch:

$$\begin{aligned} Z \cdot D = \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu} (T_\mu - P_\mu)(T_\nu - P_\nu) = \sum_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = \\ = A_{11} Q_1^2 + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \dots \quad & + 2 A_{1n} Q_1 Q_n \\ + A_{22} Q_2^2 + \quad & + 2 A_{2n} Q_2 Q_n \\ & + A_{nn} Q_n^2 \end{aligned}$$

Die Bedingung: $\frac{\partial Z}{\partial \ddot{p}_\varrho} = 0$ lässt sich durch: $\frac{\partial Z}{\partial Q_\varrho} = 0$ ersetzen. Man hat nämlich:

$$\frac{d Z}{d \ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial Z}{\partial Q_1}\frac{\partial Q_1}{\partial \ddot{p}_\varrho} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial Q_n}\frac{\partial Q_n}{\partial \ddot{p}_\varrho}$$

oder wegen $\frac{\partial Q_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = \frac{\partial T_\nu}{\partial \ddot{p}_\varrho} = a_{\nu\varrho}$

$$\frac{dZ}{d\ddot{p}_\varrho} = a_{1\varrho}\frac{\partial Z}{\partial Q_1} + a_{2\varrho}\frac{\partial Z}{\partial Q_2} + \ldots + a_{n\varrho}\frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0; \ (\varrho = 1 \ldots n);$$

aus diesen n-Gleichungen folgt, da die Determinante: $D = |a_{\mu\nu}|$ nicht verschwindet, allgemein:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = 0.$$

Differencirt man demnach den obigen Ausdruck wirklich, so ergeben sich die n-Gleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Z}{\partial Q_\nu} = A_{1\nu} Q_1 + A_{2\nu} Q_2 + \ldots + A_{\nu n} Q_n = 0; \ (\nu = 1 \ldots n)$$

die, da die Determinante $|A_{\mu\nu}| = D^{n-1}$ nie Null werden kann, wiederum die Lagrange'schen Gleichungen: $Q_1 = 0 \ldots Q_n = 0$ nach sich ziehen.

Haben die Kräfte P ein Potential U, so dass $P_\mu = -\frac{\partial U}{\partial p_\mu}$ wird, und enthalten die Bedingungen die Zeit t explicit nicht, so hat man für die lebendige Kraft T einerseits:

$$2T = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2}\dot{p}_2 + \ldots$$

oder

$$2\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1}\right) + \ddot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots$$

während andererseits, da T auch Funktion von $p_1\ \dot{p}_1 \ldots$ ist.

$$\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial p_1} + \ddot{p}_1 \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} + \ldots \quad \text{wird;}$$

hieraus folgt durch Subtraction wegen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\mu}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\mu} = T_\mu$$

$$\frac{dT}{dt} = \dot{p}_1 T_1 + \dot{p}_2 T_2 + \ldots$$

wozu man

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \ldots \quad = -\dot{p}_1 P_1 - \dot{p}_2 P_2 \ldots$$

addirt und so schliesslich wegen $T_\mu - P_\mu = Q_\mu$ zur Gleichung:

$$\frac{d(T + U)}{dt} = \dot{p}_1 Q_1 + \dot{p}_2 Q_2 + \ldots + \dot{p}_n Q_n = R$$

gelangt. Man sieht sofort, dass für $Q_1 = 0 \ldots Q_n = 0$ auch $R = 0$ d. i. $T + U =$ Constante sein muss oder dass sich aus den oben gefundenen Lagrange'schen Gleichungen auch das Princip der Erhaltung der Energie ergiebt. Beides lässt sich gleichzeitig gewinnen, wenn man in dem Ausdrucke für Z mit Hilfe der Beziehung: $R = \dot{p}_1 Q_1 + \ldots$ eine der Grössen Q z. B. Q_1 eliminirt und die Minimumsbedingungen: $\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = 0 \ldots \frac{\partial Z}{\partial Q_n} = 0$ nachher aufstellt. Zweckmässig ist es dabei, für den Zwang Z die Determinantenform anzuwenden; es ist z. B für $n = 3$:

$$-Z \cdot D = \begin{vmatrix} 0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ Q_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\dot{p}_1^2} \begin{vmatrix} 0 & R & Q_2 & Q_3 \\ R & b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ Q_2 & b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ Q_3 & b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

wobei

$$b_{11} = (a_{11}\dot{p}_1 + a_{21}\dot{p}_2 + a_{31}\dot{p}_3)\dot{p}_1 + \ldots$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1}\dot{p}_1 + \ldots = 2T$$

$$b_{21} = b_{12} = a_{21}\dot{p}_1 + a_{22}\dot{p}_2 + a_{23}\dot{p}_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2}$$

$$b_{31} = b_{13} = a_{31}\dot{p}_1 + a_{32}\dot{p}_2 + a_{33}\dot{p}_3 = \frac{\partial T}{\partial p_3} \quad \text{ist.}$$

Die Ausführung der Minimumsbedingungen ergiebt:

$$A_{11} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{12} - \dot{p}_2 A_{11}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{13} - \dot{p}_3 A_{11}] = 0$$

$$A_{12} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{22} - \dot{p}_2 A_{12}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_3 A_{12}] = 0$$

$$A_{13} R + Q_2 [\dot{p}_1 A_{23} - \dot{p}_2 A_{13}] + Q_3 [\dot{p}_1 A_{33} - \dot{p}_3 A_{13}] = 0$$

oder, da die Determinante dieses Systems $\dot{p}_1^2 \,|A_{\mu\nu}| = \dot{p}_1^2 \cdot D^2$ nie verschwindet, $R = 0$ und $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ d. i. das Princip von der Energie und die Lagrange'schen Gleichungen.

Eliminirt man in der allgemeinen Gleichung $A_{1\nu} Q_1 + A_{2\nu} Q_2 + \ldots + A_{\nu n} Q_n = 0$, $\nu = 1 \ldots n$ etwa Q_1, mit der Relation: $R = \dot{p}_1 Q_1 + \ldots$ so folgt natürlich ebenso: $R = 0$, $Q_2 = 0 \ldots Q_n = 0$.

Nachtrag,

betreffend lineare Stromverzweigungen.

Sind $p_1 \ldots p_n$ wiederum cyklische Coordinaten, $T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + a_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die lebendige Kraft und ist $F = \frac{1}{2} b_{11} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_{22} \dot{p}_2^2 + \ldots + b_{12} \dot{p}_1 \dot{p}_2 + \ldots$ die von Lord Rayleigh eingeführte Zerstreuungsfunktion, so kommt zu jeder Kraft P_μ noch die Kraft: $-\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\mu} = -(b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots)$ dazu und es ergiebt das Princip des kleinsten Zwanges, dass

$$Z \cdot D = \Sigma A_{\mu\nu} Q_\mu Q_\nu = A_{11} Q_1^2 + A_{22} Q_2^2 + \ldots + 2 A_{12} Q_1 Q_2 + \ldots \quad (1)$$

ein Minimum für jedes Q sein müsse; dabei ist also:

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left[a_{1\mu} \dot{p}_1 + a_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\right] - P_\mu + \left[b_{1\mu} \dot{p}_1 + b_{2\mu} \dot{p}_2 + \ldots\right] \quad (2)$$

$$D = |a_{\varkappa\lambda}| \qquad A_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial D}{\partial a_{\varkappa\lambda}}$$

Geht man zur Elektrodynamik über und setzt: $\dot{p}_1 = J_1$, $\dot{p}_2 = J_2 \ldots$ sowie

$$Q_\mu = \frac{d}{dt}\left[a_{1\mu} J_1 + a_{2\mu} J_2 + ..\right] - P_\mu + \left[b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + ..\right] \quad (3)$$

so giebt die Minimumsbedingung (1) eine Eigenschaft einer linearen Stromverzweigung an. Dabei sind a_{11}, a_{22}, $a_{33} \ldots$ die Coefficienten der Selbstinduction des ersten, zweiten Umlaufes, a_{12}, a_{13}, $a_{23} \ldots$ die Coefficienten der gegenseitigen Induction, P_μ die constante elektromotorische Kraft; ferner ist b_{11} der Widerstand des ganzen ersten Umlaufes, b_{22} der des ganzen zweiten Umlaufes u. s. w. und b_{12} der Widerstand jenes Stückes der Leitung, das dem 1. und 2. Umlaufe gemeinsam ist; b_{12} ist positiv, wenn J_1 und J_2 dieselbe, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben. Die Ausführung der Minimumsbedingung $\frac{\partial Z}{\partial Q_1} = 0$ liefert: $Q_1 = 0$

$$\text{d. i. } P_1 = b_{11} J_1 + b_{12} J_2 + \ldots + b_{1n} J_n + \frac{d}{dt}[a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \ldots] \quad (4) \quad \text{u. s. w.}$$

Das sind — etwas verallgemeinert — jene Gleichungen, die Herr H. von Helmholtz 1851 (Abhandl. I 435) für die Induction in linearen Stromverzweigungen, die man sich in die möglichst geringe Zahl einfacher Umgänge zerlegt denken muss, aufgestellt hat.

Für die Arbeit der verzögernden Kräfte erhält man vom Zeichen abgesehen: $\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} d p_1 + .. = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_1} \dot{p}_1 + ..\right] dt = 2 F dt$ $= [b_{11} J_1^2 + b_{22} J_2^2 + .. + 2\, b_{12} J_1 J_2 + ..]\, dt$ d. i. die Joule-sche Wärme und sind alle Summanden in der Klammer positiv.

Nun werde angenommen, dass $a_{12} = a_{13} = a_{23} = .. = 0$; $a_{11} = a_{22} = a_{33} = .. = a$ sei, welcher Fall experimentell unschwer zu verwirklichen wäre. Dann wird:

$Q_\mu = a \frac{d}{d\,t}[J_1 + J_2 + \ldots] - P_\mu + b_{1\mu} J_1 + b_{2\mu} J_2 + \ldots$ und es muss: $Z \cdot a = Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots$ ein Minimum sein, wie klein auch a genommen wird. Für $\lim a = 0$ werden die Stromstärken unabhängig von der Zeit, also constant und es folgt aus der Bedingung: $Z^1 = Q_1^2 + Q_2^2 + \ldots =$ Minimum; $Q_\mu = b_{1\mu} J_1 + \ldots - P_\mu = 0$.

Die Gleichung: $\frac{\partial Z^1}{\partial Q_\mu} = 0$ kann, weil die Determinante aus den b nicht verschwindet, durch: $\frac{\partial Z^1}{\partial J_\mu} = 0$ ersetzt werden. Es ist demnach für constante Ströme: $Z^1 = \sum_\mu [(b_{1\mu} J_1 + \ldots) - P_\mu]^2$ für jedes J zu einem Minimum zu machen.

Anmerkung. Eine oft genannte Minimumseigenschaft für constante Ströme ergiebt sich aus der wohlbekannten Gleichung:

$$\frac{d\,(T + U)}{d\,t} = -2\,F \text{ oder: } -\left[\frac{d\,U}{d\,t} + F + \frac{d\,T}{d\,t}\right] = F \quad (1)$$

worin: $U = P_1\,p_1 + \ldots$ das Potential der constanten Kräfte vorstellt und wie oben: $T = \frac{1}{2} a_{11}\,\dot{p}_1^2 + \ldots = \frac{1}{2} a_{11}\,J_1^2 + \ldots$
$F = \frac{1}{2} b_{11}\,\dot{p}_1^2 + \ldots = \frac{1}{2} b_{11}\,J_1^2 \ldots$ ist.

Erlangen die Stromstärken: $J_1, J_2 \ldots$ die anfangs Null waren, für $t = \infty$ ihre vollen Stärken $J'_1, J'_2 \ldots$ so ist (wegen $\frac{d\,T}{d\,t} = \frac{\partial\,T}{\partial\,J_1}\frac{d\,J_1}{d\,t} + \ldots$) auch $\frac{d\,T}{d\,t} = 0$ und das in I rechts stehende F, das aus lauter positiven Gliedern besteht, erlangt seinen grössten Werth. Demnach wird die negative linke Seite in I d. i. $F + \frac{d\,U}{d\,t} = \frac{1}{2} b_{11}\,J_1^2 + \ldots - (P_1 J_1 + P_2 J_2 + \ldots)$ ein Minimum für jedes J darstellen.

Ueber die Erzlagerstätte von Goldkronach bei Berneck im Fichtelgebirge.

Von F. v. Sandberger.

(*Eingelaufen 5. Mai.*)

Die seit Jahrhunderten bekannte Lagerstätte ist grösstentheils schon längere Zeit ausser Betrieb und es war mir daher nicht mehr möglich, als ich sie im Jahre 1884 besuchte, mehr als eine Anzahl Erzstufen auf den Halden zu finden, unter welchen derber Antimonglanz und Bruchstücke des völlig mit Kiesen imprägnirten Nebengesteins vorherrschten. Gegenwärtig wird nur die Grube Schickung Gottes wieder betrieben, auf wie lange, ist nicht vorauszusehen. Seitdem hat C. W. v. Gümbel Goldkronach in der Geognostischen Beschreibung des Fichtelgebirges S. 385 ff. eine gründliche von einer Gangkarte begleitete Darstellung gewidmet, die auf den Gängen auftretenden Mineralien aber nicht specieller geschildert. Da diese indessen in vieler Beziehung bemerkenswerth und in Folge früherer Einsendungen des K. Bergamts Bayreuth in der unter meiner Leitung stehenden Sammlung der Universität Würzburg fast vollständig vertreten sind, war ich in der Lage, sie genauer untersuchen zu können. In der Sammlung des Herrn Apotheker Dr. Schmidt zu Wunsiedel befinden sich auch Mineralien von Goldkronach, namentlich schöne Krystalle von Antimonglanz und ein Stück mit

dem sehr seltenen Kupferkies. Ich statte Herrn Dr. Schmidt für die Mittheilung seiner Suite den besten Dank ab.

Das Grubenfeld[1]) umfasst eine bedeutende Fläche vom Weissmain-Thale längs dem Thale des Zoppatenbaches über das Dorf Brandholz hinaus, an welchem die bedeutendste Grube, die Fürstenzeche, gelegen ist, während andere auf beiden Seiten des Baches in der Nähe der Dörfer Zoppaten und Escherlich liegen. Dasselbe ist mit zahlreichen, z. Th. noch in diesem Jahrhundert von dem preussischen und später bayerischen Staate, dann von Gewerken betriebenen Bauten bedeckt. Es hätte keinen Zweck, die Entwickelung und den Untergang dieser Gruben im Einzelnen zu verfolgen, nur soviel muss hervorgehoben werden, dass die Gänge am Ausgehenden am reichsten an Gold und Silber gewesen sein müssen. Diese Thatsache erklärt sich hier, wie überall, durch lange fortgesetzte Verwitterung, welche die edlen Metalle als solche abschied, während die übrigen gelöst und weggeführt wurden, wie auch v. Gümbel[2]) mit Recht annimmt. Um auf sicherem Boden zu bleiben, beschränke ich mich auf die von ihm hauptsächlich nach Hahn's Berichten gegebene Darstellung der Hauptgänge, muss aber zunächst Bemerkungen über die Gesteine vorausschicken, in welchen dieselben aufsetzen.

Das herrschende Nebengestein ist ein Sericitschiefer von cambrischem Alter, welcher manchen des Taunus sehr ähnlich sieht, so dass man wohl Handstücke verwechseln könnte, auch einige sächsische und böhmische Phyllite sind nahe verwandt.

Die grünlichen Schiefer enthalten neben vorwiegendem Sericit auch noch Quarzkörner und Chloritschüppchen; im Schlämmrückstande befindet sich mikroskopisches Magneteisen

1) Siehe das Kärtchen bei v. Gümbel a. a. O. S. 386a.

2) a. a. O. S. 301.

und Eisenkies. Die blassgelb gefärbten Schiefer enthalten weder Chlorit noch Magneteisen und nur sehr wenig mikroskopischen Eisenkies, aber stets Quarzkörnchen, sie sind fast als reiner Sericit anzusehen. Dem entspricht auch das Resultat der Analysen von Ad. Schwager.[1]) Es enthielten nämlich

	1. Ausgesuchter Sericit von Goldkronach nach Schwager	2. Reiner Sericit von Naurod nach List	3. Nicht ganz reiner Sericit von Naurod nach Schwager
Kieselsäure	45,88	49,00	49,53
Titansäure	—	1,59	—
Thonerde	33,96	23,65	28,97
Eisenoxyd	4,57	8,07	7,26
Kalk	0,22	0,63	0,14
Bittererde	0,83	0,93	2,46
Kali	9,32	9,11	7,43
Natron	0,52	1,75	0,12
Wasser und Glühverlust	4,89	3,44	4,97
	100,26	98,17[2])	100,88[3])

Um etwa in geringer Menge vorhandene Metalle im Goldkronacher Gestein zu entdecken, wurden wiederholt 10—12 g des Gesteinspulvers mit kohlensaurem Natronkali aufgeschlossen. Nach Abscheidung der Kieselsäure ergab Schwefelwasserstoffgas in der salzsauren Lösung einen Niederschlag, welcher vorwiegend Antimon, weniger Arsen und recht wenig Blei und Kupfer enthielt; Kobalt wurde nach Abscheidung des Eisens ebenfalls in sehr geringer Menge

1) v. Gümbel, Sitzungsber. d. k. b. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Cl. 1880, S. 228 ff.

2) Ausserdem Fluorsilicium 1,69, Phosphorsäure 0,31.

3) In 12 g desselben ausserdem Arsen, sehr wenig Blei und Zink. (Sandberger.)

nachgewiesen. Diese Elemente habe ich meistens schon 1882 als in dem Gestein von Goldkronach enthalten angeführt.[1]) Um sich zu überzeugen, ob nicht eins oder das andere derselben aus dem in minimaler Menge eingesprengten Eisenkiese herrühre, wurde dieser für sich untersucht und frei davon gefunden. Antimon u. s. w. gehören also der Sericitsubstanz an, wie an so vielen anderen Orten den Glimmern, z. B. jenen der Gneisse des Spessarts, dem des Granits von Magurka in Ungarn u. s. w. Dass Antimon (und Arsen) in den Silicaten als antimonige (bezw. arsenige) Säure als Vertreter von Thonerde auftreten, ist unzweifelhaft, der Spinell von Tiriolo in Calabrien hat ja längst den Beweis geliefert.

Organische Substanz ist beim Glühen deutlich wahrnehmbar und findet sich in Spuren auch noch in stark zersetzten Schiefern. Wo sie in grösserer Menge und schwarz färbend auftritt, sind die Schiefer der Erzführung ungünstig gewesen.[2])

Schliesslich wurden auch die in Wasser löslichen Bestandtheile untersucht. Zieht man den Goldkronacher Schiefer 2 Tage mit destillirtem Wasser in der Wärme aus, so giebt die Lösung sehr deutliche Reactionen auf Schwefelsäure und schwächere auf Chlor, welche an Kali gebunden sind; Natron tritt nur in geringster Menge daneben auf.

Die in der Nähe der Gänge vorkommenden stark gebleichten Schiefer sind wie so viele andere ausgelaugte Sericitgesteine ganz zu Schüppchen aufgelöst. Ebenso verhalten sich die zahlreichen Bruchstücke derselben, welche in der Gangmasse eingeschlossen sind.

Ein zweites Nebengestein kommt nur an dem Gange der Grube Silberne Rose bei Zoppatèn vor und soll dessen

---

1) Untersuchungen über Erzgänge I S. 31, II S. 236.

2) v. Gümbel, Geogn. Beschreib. d. Fichtelgebirgs S. 385.

Haugendes bilden, während als Liegendes Sericitschiefer angegeben wird. Es ist ein feinkörniger Diabasmandelstein (Blatterstein) von graugrüner Farbe, welche in der Nähe des Ganges lichter wird, und führt ausser zahlreichen von Chlorit umschlossenen Kalkspathmandeln auch Gruppen von Eisenkieskrystallen. Weisser Kalkspath bedeckt in dünnen Ueberzügen auch seine zahlreichen Klüftchen. Ein grösseres verhältnissmässig frisches Stück dieses bereits v. Gümbel[1]) angeführten Gesteins lässt in der matten Grundmasse stellenweise noch Plagioklaskrystalle erkennen, der Augit scheint aber schon ganz in Chloritsubstanz umgewandelt zu sein. Magnetkies und Magneteisen sind in mikroskopischen Körnchen in dem Schlämmreste deutlich nachweisbar, auch Apatit fehlt nicht.

Kalte Salzsäure löst Kalkspath und Magnetkies auf, erhitzte zersetzt auch den Chlorit und die meist schon stark angegriffenen Reste des Feldspaths.

Die Lagerung des Gesteins ist nicht genau bekannt, doch darf mit grosser Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass dasselbe einen kleinen Stock oder Gang in dem Sericitgesteine bildet.

Die bei Zoppaten anstehenden schwarzen silurischen Gesteine mit Graptolithen treten, soviel bekannt, zwar sehr nahe an den Gang heran, kommen aber mit ihm nicht in unmittelbare Berührung.

Wie v. Gümbel folge auch ich in Bezug auf die Auffassung der Gänge den Mittheilungen des langjährigen Leiters des Grubenbetriebs, Bergrath Hahn in Bayreuth. Die Lage derselben ist auf dem von ersterem beigegebenen Revierkärtchen gut zu übersehen.

Hahn nimmt bei Brandholz drei Hauptgänge an, nämlich den Kiesgang mit h. 2,4 Streichen und 60° südöstlichem

---

1) a. a. O. S. 393.

Einfallen, den Spiessglanzgang h. 12,7 streichend und den Quarzgang, welcher zu Anfang der sechziger Jahre aufgeschlossen, aber wegen der Armuth seiner Erze nicht weiter bebaut wurde. Auch die letzteren Gänge fallen südöstlich. Die Gänge der Grube Silberne Rose bei Zoppaten, deren Streichen 4 h 5 mit 50° Fallen zu sein scheint, und Schickung Gottes bei Escherlich, h. 1,8 streichend, sind offenbar selbstständig, obwohl ihre Ausfüllung dieselbe ist, wie jene des Spiessglanzganges. Was die Mächtigkeit betrifft, so wird für den Kiesgang $1^1/_2$ m als Maximum angegeben, für den Spiessglanzgang 1 m, gewöhnlich scheint sie aber geringer zu sein, ich habe an Handstücken meist nur 10 cm beobachten können. Es giebt zwar noch manche Erzgänge, an welchen das sogenannte höfliche d. h. an eingesprengten Erzen reiche Nebengestein[1]) entwickelt ist, aber mit Ausnahme von solchen der Gegend von Freiberg,[2]) Schapbach und Wittichen, sowie mancher Zinnerzgänge habe ich es doch anderswo nicht leicht so schön gesehen. Neben dem Kiesgange und bis zu beträchtlicher Entfernung von ihm führt der stark gebleichte und hier und da von weissen Quarztrümern durchsetzte Schiefer zahllose bis erbsengrosse Eisenkieskrystalle. Die Formen $\frac{\infty O 2}{2}$, $\infty O \infty$. $\frac{\infty O 2}{2}$ und seltener auch $\infty O \infty$. O sind meist sehr hübsch entwickelt. Der Arsenikkies in den Formen ∞P. $^1/_4 \breve{P} \infty$ ist weniger häufig, fehlt aber doch selten ganz. Der durchschnittliche Goldgehalt der Kiese wird nur auf $^1/_4$ bis $^1/_3$ Loth im Centner angegeben und der Betrieb konnte daher nicht lohnend sein.

Die Gangausfüllung, welche sehr gewöhnlich Brocken von zersetztem Nebengestein umschliesst, zeigt nur selten

---

1) Untersuchungen über Erzgänge I S. 149.

2) Vortrefflich beschrieben aber nicht erklärt von Vogelgesang (Cotta's Gangstudien II S. 80) und Frenzel (Min. Lexikon für Sachsen S. 28).

eine symmetrische Struktur, doch beobachtete ich an Stücken von der Fürstenzeche (Spiessglanzgang) vom hangenden zum liegenden Salband:

1. Weissen Quarz. 2. Eisenreichen Braunspath, meist schon zu ockerigem Eisenoxydhydrat verwittert, mit Nestern von strahligem Antimonglanz. 3. Quarz wie 1. 4. Braunspath wie 2, aber in etwas breiterer Lage. 5. Quarz. Die Salbänder bestehen also nur aus Quarz, der sich an beiden Seiten zuerst abgelagert hat.

Meist ist die Gangmasse sehr einfach zusammengesetzt und herrscht entweder Quarz mit eingesprengten Kiesen oder Antimonglanz in verschiedenen Varietäten vor. Die folgenden Beispiele werden die Paragenesis hinreichend erläutern.

I. Reihenfolge auf dem Spiessglanzgange bei Brandholz.

a) 1. Sericitschiefer mit zahlreich eingewachsenen Eisenkies- und wenigen Arsenikkieskrystallen. 2. Weisser erzleerer Quarz. 3. Antimonglanz auf Klüftchen von 1.

b) 1. Sericitschiefer mit Eisenkieskrystallen. 2. Weisser Quarz. 3. Wasserheller Quarz $\infty R + R$ in Drusen. 4. Meneghinit in grösseren Krystallen. 5. Eisenspath in kleinen linsenförmigen Rhomboëdern.

c) 1. Fettquarz von weisser, ins Bläuliche spielender Farbe mit eingewachsenem Eisenkies und Arsenikkies, sowie einem Körnchen von gediegen Gold. 2. Meneghinit in netzförmigen Aggregaten auf Klüften.

d) Weisser derber Quarz mit eingewachsenem Arsenikkies und wenig derbem Kupferkies.

e) 1. Sericitschiefer. 2. Weisser Quarz mit derbem Plagionit. 3. In Drusen krystallisirter Plagionit und weisses Steinmark.

f) 1. Derber Plagionit. 2. Eisenspath in Rhomboëdern. 3. Meneghinit in netzförmigen Aggregaten.

g) 1. Weisser derber Quarz. 2. In Höhlungen Krystalle desselben. 3. Magnetkies 0 P. ∞ P in kleinen Krystallgruppen. 4. Bleihaltiges Federerz, haarförmig.

h) 1. Weisser Quarz mit eingesprengtem Antimonglanz. 2. Eisenspath in linsenförmigen Rhomboëdern. 3. Strahliger Antimonglanz in Krystalle der Form ∞ P. $^1/_3$ P. ∞ $\bar{P}$ 2 auslaufend. 4. Antimonocker auf Klüften.

i) 1. Blass fleischrother Braunspath in grosskörnigen Massen und Rhomboëdern. 2. Strahliger Antimonglanz wie oben.

k) 1. Quarz. 2. Derber Antimonglanz, an der Oberfläche erdig und voll von Höhlungen, z. Th. mit gediegenem Antimon. 3. Antimonglanz in den oben angegebenen Formen krystallisirt. 4. Kalkspath in kleinen verzerrten Krystallen R^3. ∞ R.

l) 1. Weisser Quarz. 2. Strahliger Antimonglanz gemengt mit wenig gelbbrauner Zinkblende.

m) 1. Antimonglanz in der gewöhnlichen Form krystallisirt. 2. Antimonblüthe in Büscheln farbloser Nadeln. (Schmidt'sche Sammlung).

II. Silberne Rose bei Zoppaten.

1. Diabasmandelstein s. oben. 2. Lichter Braunspath, dünne Lage. 3. Grossstrahliger Antimonglanz. Quarz fehlt auffallender Weise hier völlig.

Es wird nun nöthig sein, die einzelnen Mineralien der Gänge etwas genauer zu betrachten.

1. Gediegen Gold habe ich nur einmal eingewachsen in bläulichem Quarze mit Kiesen gesehen, aber es kam ausserdem auch in grösseren Körnern und Blättchen vor und ist in früherer Zeit jedenfalls auch an dem verwitterten Ausgehenden und im Alluvialschutt reichlich getroffen worden.[1])

---

1) v. Gümbel, Geognost. Beschreibung des Fichtelgebirges S. 301.

Das Gold ist silberhaltig und darum licht gefärbt, das Verhältniss von Silber zu Gold ist in den wenigst reichen Proben 4:1, aber in anderen wohl höher.

2. Eisenkies ist in grosser Menge in bis erbsengrossen Krystallen $\frac{\infty O 2}{2}$, $\frac{\infty O 2}{2}$. $\infty O \infty$, selten auch mit O combinirt in dem höflichen Nebengestein, aber stellenweise auch im weissen Quarze der Gänge eingewachsen und stets schwach silber- und goldhaltig. Der Gehalt an Gold ist sowohl durch die hüttenmännische Probe als auch auf nassem Wege durch Behandlung des scharf gerösteten Erzes mit alkoholischer Jodlösung nach der Methode von Skey (Dingler's Journal CXC. S. 58) nachgewiesen worden. Ausser den erwähnten Elementen enthält das Mineral zuweilen noch sehr wenig Kobalt und Arsen, aber keine Spur von Antimon.

3. Arsenikkies. Verhält sich wie der Eisenkies, ist aber nicht ganz so häufig. Schöne Krystalle zeigen die Form $\infty P . {}^{1}/_{4} \breve{P} \infty$, sind aber stets ziemlich klein. Da mich der Arsenikkies wegen seines Antimongehaltes lebhaft interessirte, so wurde er näher untersucht. Das specifische Gewicht ergab sich zu 6,09 bei 4° C. Die quantitative Analyse hatte Herr Hofrath Hilger freundlichst übernommen, der Gehalt an Silber wurde in der K. K. Probiranstalt zu Přibram auf trockenem Wege bestimmt, wobei sich auch ein sehr kleiner Goldgehalt ergab. Das schon einmal gelegentlich[1]) mitgetheilte Resultat der Analyse war folgendes:

Schwefel . .	20,84		
Arsen . .	41,36		43,65 As
Antimon . .	3,73	entspr. 2,29 As	
Eisen . .	34,07		
Kobalt . .	Spur		
Silber . .	0,002		
	100,002.		

1) Jahrb. f. Mineralogie 1890 I S. 99.

Ein Arsenikkies von dieser Zusammensetzung war bisher nicht bekannt, denn Breithaupt's Geyerit, welcher auch 1,37 Antimon enthält, gehört nach Behnkes Analyse nicht hierher, sondern zu den vielen Mittelgliedern zwischen Arsenikkies und Arseneisen.

4. Antimonglanz. Ist nächst den Kiesen das häufigste und in Masse vorkommende Mineral der Gänge, welches früher hauptsächlich wegen seines Silber- und Goldgehaltes geschätzt wurde, der aber nicht hoch ist, da in einer reinen Probe zu Přibram nur 0,0016 Silber nebst Spuren von Gold gefunden wurde. Gegenwärtig würden die hohen Antimonpreise ein erfreulicheres Resultat für die geförderten Erze liefern können, ob aber die noch von früherem Abbau her gebliebenen Reste eine Wiederaufnahme der Gruben räthlich erscheinen lassen, vermag ich nicht zu beurtheilen.

Der Antimonglanz kommt in vielerlei Abänderungen vor. Sehr häufig sind grossstrahlige Massen, deren Strahlen bis zu 92 mm Länge bei 8 mm Breite erreichen. Wechselnde Lagen von grossblätterigen mit feinkörnigen Aggregaten, welche sich der „Bleischweif" genannten Varietät des Bleiglanzes durchaus analog verhalten, sind schon seltener und solche von rein feinkörniger Struktur ebenfalls, aber auch an eingesprengten Körnern mit sehr schwach entwickelter Spaltbarkeit fehlt es nicht. Recht selten sind wohlausgebildete, aber nur 4 mm lange und 2 mm breite Krystalle der Form $\infty P.\ {}^1/_3 P. \infty \bar{P} 2$ mit stark gestreiften Säulenflächen. Ich habe dieselben in zahlreichen Gruppen nur auf derbem an der Oberfläche mulmigem und mit zahlreichen Höhlungen versehenem, z. Th. mit gediegenem Antimon ausgefüllten Antimonglanz beobachtet. Es scheint demnach, als ob die Oberfläche von alkalischen Gewässern angenagt, aber das gelöste Schwefelantimon an Ort und Stelle wieder abgesetzt worden sei. Die eben genannte hübsche Combination kommt an vielen Orten vor, besonders schön auch bei Kapnik

in Ungarn und Rattenberg in Tyrol, wo der verhältnissmässig junge Antimonglanz eines der Auslaugungsprodukte von Fahlerzen bildet.

Von Oxydationsprodukten kommen spärlich Antimonocker und Antimonblüthe vor, s. diese.

5. Nach Originalstücken, welche Herr Bergrath Hahn zur Sammlung des k. Oberbergamtes eingesendet hat, kommt in drusigen Höhlungen ausgeschieden auch gediegen Antimon vor.

6. Plagionit. Ist zu Goldkronach nicht häufig und findet sich in meist vereinzelten Krystallen oder derb. Die Flächen 0 P und — P treten nicht selten in oscillatorischer Combination mit Pyramiden auf und sind daher parallel den Combinationskanten stark gefurcht, wie zu Wolfsberg[1]), gut zu erkennen ist + P, ∞ P̄ ∞ und — 4 P. Leider sind die Krystalle aufgewachsen und mit einander verwachsen, so dass genaue Bestimmungen der Flächen z. Z. unausführbar erscheinen. Mit dem Wolfsberger Vorkommen, von welchem die Würzburger Sammlung ein gutes Stück enthält, könnte unseres geradezu verwechselt werden. Ausserdem ist der Plagionit eingesprengt und derb beobachtet worden. Die derbe Varietät ist wiederholt irrig für Fahlerz und Bournonit gehalten worden, welche zu Goldkronach nicht vorkommen. Der derbe Plagionit enthält wie der krystallisirte kein Kupfer. Er findet sich auch zu Wolfsberg und bei Arnsberg in Westphalen,[2]) hier mit kleinen Drusen, in welchen Kryställchen 0 P. — P nicht selten sind.

7. Meneghinit. Langgestreckte, bis 5 mm lange und 1 1/2 mm breite, stets schilfähnlich gestreifte Säulen von bleigrauer Farbe, welche sich den „Sagenit“ genannten Rutilaggregaten ähnlich häufig unter 40° kreuzen, bedecken derben Plagionit oder finden sich mit Eisenspath verwachsen

1) Lüdecke, Jahrb. f. Min. 1883 II S. 115.

2) Sandberger, Jahrb. f. Min. 1883 II S. 94.

in Drusen des Gangquarzes. Ueber ihr Krystallsystem lässt sich darum keine Gewissheit erlangen, weil die Enden nicht gut ausgebildet sind, sondern wie ausgefranst erscheinen und auch die Lage der etwaigen Spaltungsflächen nicht mit Bestimmtheit constatirt werden kann. Die Härte des spröden Minerals ergab sich zu 3, das spec. Gewicht zu 6,4. Vor dem Löthrohre schmilzt das Mineral leicht unter Bedeckung der Kohle mit Beschlägen von Antimon- und Bleioxyd, von heisser Salzsäure wird es unter Entwickelung von Schwefelwasserstoff leicht gelöst. Als Bestandtheile wurden qualitativ Blei, Antimon und Schwefel nachgewiesen. Eine zuverlässige quantitative Analyse konnte bisher wegen Mangel an Material nicht ausgeführt werden.

Der von Groth[1]) angeführte Antimonglanz von Goldkronach in sagenitähnlichen Aggregaten gehört zweifellos hierher.

8. Federerz. Haarförmige bleigraue Kryställchen, welche Plagionit umhüllen oder auf Meneghinit oder Magnetkies aufgewachsen sind, reagiren auf Antimon, Blei und Schwefel, sind also ächtes Federerz, welches auch äusserlich mit jenem von Wolfsberg auf das Genaueste übereinstimmt und daher wohl auch als haarförmiger Jamesonit zu betrachten ist. Es findet sich immer nur in sehr geringer Menge und eine quantitative Analyse war daher nicht möglich. Ein eigenthümliches Vorkommen ist jenes von der Schmutzlerzeche, wo Federerz in Tausenden von haarfeinen Kryställchen grossblätterigen Braunspath erfüllt und schwarz färbt.

9. Bleiglanz ist mir in mittel- und feinkörnigen Aggregaten, auch mit Antimonglanz gemengt bekannt geworden. An einem Stückchen fand sich auch ein deutlicher Würfel. Häufig war das Mineral nicht.

10. Zinkblende von braungelber Färbung kommt selten im Gemenge mit strahligem Antimonglanz vor. Bleiglanz,

---

1) Mineralien-Sammlung der Universität Strassburg S. 22.

welchen Breithaupt[1]) auch mit beiden zusammen beobachtet hat, ist mir in dieser Form nicht zu Gesicht gekommen.

11. Magnetkies in Gruppen kleiner rauhflächiger Tafeln (0 P. ∞ P) in Drusen des Quarzes aufsitzend ist sehr selten, war aber schon Breithaupt[2]) bekannt, seine Bedeckung durch Federerz habe ich schon erwähnt. In der Würzburger Sammlung ist nur ein Stückchen davon vorhanden.

12. Kupferkies habe ich nur an einem Stücke, welches der Schmidt'schen Sammlung angehört, in kleinen derben Massen mit Arsenikkies in weissem Quarze eingesprengt beobachtet.

13. Zundererz. Findet sich in dunkelrothen weichen Ueberzügen besonders auf Plagionit, ist aber recht selten. Es ist zwar jenem von Clausthal sehr ähnlich und enthält auch Blei wie dieses. Breithaupt (a. a. O.) erwähnt es auch von Goldkronach. Alles bisher Angeführte gilt auch für das von Hausmann[3]) constatirte Vorkommen des Zundererzes bei Wolfsberg. Seine hochrothe Färbung kann aber nicht von eingemengtem Rothgültigerze herrühren, da solches zu Goldkronach nicht vorkommt. Es besteht vielmehr offenbar wesentlich aus Rothspiessglanzerz im Gemenge mit einem Bleisalze und erdigem Plagionit.

14. Gelber erdiger Antimonocker erscheint hier und da auf Klüften von derbem Antimonglanz.

15. Antimonblüthe in strahligen Büscheln farbloser Krystalle auf Antimonglanz sitzend ist sehr schön in der Schmidt'schen Sammlung vertreten.

16. Steinmark. Weisse opake Massen, an welchen man unter dem Mikroskope zuweilen Krystallflächen wie bei dem sog. krystallisirten Kaolin zu bemerken glaubt, ist in geringer Menge über Quarz, häufig aber über Plagionit und Meneghinit zu beobachten. Das Löthrohr ergiebt reine Thonerdereaktion.

1) Paragenesis der Mineralien S. 192.
2) Ebenda S. 192.
3) Handbuch d. Mineralogie I S. 195.

17. Schwerspath wird von v. Gümbel[1]) als Seltenheit von der Grube Schickung Gottes angeführt, ich habe ihn nicht gesehen.

18. Braunspath. Ist auf den Gängen ziemlich verbreitet, aber in Folge seines hohen Eisenoxydulgehaltes meist schon mehr oder weniger stark zersetzt. Das frischeste Stück mit erbsengrossen rauhflächigen, aber nicht gekrümmten Rhomboëdern, deren Winkel über 106° betragen, gehört der Schmidt'schen Sammlung an. Das Mineral ist im Grossen blass fleischroth gefärbt, die kleineren Spaltungsstückchen sind aber weiss wie auch das Pulver. Das spec. Gewicht beträgt 3,05. Die quantitative Analyse des Herrn Hofrath Hilger in München ergab als Zusammensetzung:

Kohlensaures Eisenoxydul . .	18,470
kohlensaures Manganoxydul . .	3,063
kohlensaurer Kalk . . .	56,066
kohlensaure Bittererde . .	21,997
	99,596.

19. Eisenspath. Kleine linsenförmige Rhomboëder kommen nicht häufig in Drusen des Gangquarzes mit Meneghinit oder Antimonglanz verwachsen vor. Der Spath ist chemisch rein, d. h. er enthält keinen Kalk und Bittererde.

20. Kalkspath. Gehört zu den allerjüngsten Bildungen und sitzt in kleinen verzerrten Krystallen der Form $R^3 . \infty R$ über krystallisirtem Antimonglanz. Der Kalkspath gehört zweifellos der Breithaupt'schen Varietät diamesus syngeneticus an und ist recht selten.

Aus dem Vorhergehenden geht mit aller Bestimmtheit hervor, dass die Elemente von sämmtlichen auf den Erzgängen vorkommenden Mineralien in dem Sericitschiefer und nur in diesem auftreten, an welchen ja auch die Erzgänge gebunden sind. Die Proterobasdurchbrüche mögen wohl

1) a. a. O. S. 301.

bei der Aufreissung der Gangspalten mitgewirkt haben, Erze haben sie denselben aber nicht zugebracht, da ihnen die Elemente derselben fehlen. Ebenso verhält es sich auch nach Liebe's[1]) vortrefflicher Schilderung in der Gegend von Schleiz u. a. O. der reussischen Fürstenthümer.

Es fragt sich nun, wie man sich die Ausfüllung der Gänge zu denken hat. Die drei häufigsten Erze sind unzweifelhaft Eisenkies, welcher vorzugsweise in dem höflichen Nebengestein und ebenso wie dort mit Arsenikkies in den lichten derben Quarzen auftritt, dann Antimonerz, vor Allem Antimonglanz. Die Sericitschiefer enthalten, wie oben nachgewiesen, stets schwefelsaures Kali und organische Substanz, welche dasselbe zu Schwefelkalium reduciren konnte und zweifellos reducirt hat. Wo dies der Fall war, musste die organische Substanz grösstentheils verschwinden und wo sie noch in grösserer Menge vorhanden ist, hat daher dieser Reductionsprocess, dessen Produkte die Erze aus dem Schiefer auslaugen und den Gangspalten zuführen konnten, nicht oder nur in geringem Grade stattgefunden. Das Fehlen der Erze an diesen dunklen Gesteinen erklärt sich damit von selbst.

Sobald sich in dem Schiefer, welcher 4½ proc. Eisenoxyd enthält, dieses gleichfalls unter Mitwirkung organischer Substanz zu kohlensaurem Oxydul umgewandelt hatte, wurde es von Schwefelkalium ausgefällt und fixirt. Da auch Schwefelgold in Schwefelkalium löslich ist, so ist dieses gleichfalls ausgelaugt und mit dem Schwefeleisen niedergeschlagen worden, ebenso auch das Silber.[2]) Die Auslaugung des Eisens im Nebengesteine dauerte nur so lange fort, bis das Gestein breiartig erweicht war und daher den Flüssig-

1) Uebersicht über den Schichtenaufbau Ost-Thüringens in Abhandlungen zur geolog. Karte von Preussen und den Thüring. Staaten, Bd. V 4. S. 515.

2) Dieses kann sehr wohl ursprünglich als Chlorsilber-Chlorkalium ausgezogen und durch Schwefelkalium zersetzt worden sein.

keiten keine ungehinderte Bewegung nach der Gangspalte mehr gestattete; dann war aber der Quarz, welcher diese allmählich ausfüllte, natürlich sehr arm an Erzen, wie der sogenannte Quarzgang deutlich beweist. Es giebt ja auch sonst im Erzgebirge, Schwarzwald, Alpengebirge und rheinischen Schiefergebirge Gänge genug, an welchen die gleiche Erscheinung zu beobachten ist.

Aehnlich dem Eisenkiese verhält sich der weniger häufige Arsenikkies, welcher im Gegensatze zu dem von Antimon ganz freien Eisenkies ausnahmsweise bereits 3,7 proc. Antimon enthält. Aber sowohl der bleihaltige Meneghinit als der Antimonglanz selbst sind jünger als die eisenhaltigen Kiese und treten erst nach jenen auf. Besonders deutlich sieht man das auf Klüftchen des „höflichen" Nebengesteins und auf solchen derjenigen Gänge, welche in weissem Quarz eingesprengte Kiese enthalten. (Paragenetische Beispiele a und b.) Die weit grössere Affinität von Eisen zu Arsen als zu Antimon tritt hier ebensowohl hervor als an anderen Orten, z. B. zu Thomasschlag in Böhmen; auch auf den Bräunsdorfer Gängen, welche in Folge von grossem Ueberschusse von Antimon im Nebengesteine sogar Verbindungen desselben mit Eisen (Berthierit) enthalten, ist der schwach silberhaltige Arsenikkies (Weisserz) älter als die Antimonerze.[1]) Das erklärt sich durch den Umstand, dass Schwefelkalium-Schwefelarsen leichter löslich als die entsprechende Antimonverbindung ist, aber auch von Eisensalzen leichter zersetzt wird, als diese.

Dem massenhaften Auftreten des Antimonglanzes ging zu Goldkronach das verhältnissmässig seltene von zwei bleihaltigen Antimonerzen, dem Plagionit und Meneghinit, voraus, welche vermuthlich nur lokale Bildungen an solchen Stellen sind, wo Blei in grösserer Menge vorhanden war. Das bleihaltige Federerz ist nur eine ganz lokale Erscheinung, gehört aber auch zu den älteren Gliedern der Gangausfüllung,

1) H. Müller in v. Cotta's Gangstudien I S. 181.

da es als Einschluss im Braunspath vorkommt. Bleiglanz tritt erst später nur ganz untergeordnet im Gemenge mit Antimonglanz auf.

Antimonige Säure, welche, wie oben nachgewiesen, in Vertretung von Thonerde im Sericitschiefer enthalten ist, löst sich in Schwefelkalium schon bei gewöhnlicher Temperatur[1]) und zersetzt sich später zu schwefelsaurem Kali und Antimonglanz. Mit dem Auftreten des letzteren findet die Ausfüllung der Gangspalten ihren Abschluss, die ausserdem noch weiter vorkommenden Substanzen sind mit Ausnahme des sogleich zu besprechenden Braunspaths als Zersetzungsprodukte des Antimonglanzes anzusehen, wie der Antimonocker und die Antimonblüthe; das Zundererz gehört nicht zu ihnen, sondern ist an das Auftreten des Plagionits gebunden und bleihaltig.

Der Braunspath zeigt in seiner Zusammensetzung dasselbe Verhältniss von Eisen zu Bittererde und Kalk, in welchem diese Elemente ursprünglich im Sericit enthalten waren (s. oben). Er verwittert zu Eisenoxydhydrat und hierbei wird natürlich kohlensaurer Kalk in Freiheit gesetzt, man begegnet ihm aber nur so selten auf dem Gange, dass man annehmen muss, er sei grösstentheils von kohlensäurehaltigen Wassern weggeführt worden. Genau dieselbe Verwachsung von Antimonglanz und Braunspath wie zu Goldkronach habe ich früher auf den Gruben Ursula bei Welschsteinach unweit Offenburg und St. Trudpert im Münsterthale bei Freiburg i. B. beobachtet.

Ausser Braunspath kommt, jedoch in ganz geringer Menge, ächter Eisenspath in kleinen linsenförmigen Rhomboëdern mit Plagionit und Meneghinit vor. Noch seltener ist der Magnetkies. Beide Mineralien werden nur der Vollständigkeit wegen hier erwähnt.

---

1) Gmelin, Handb. d. Chemie 2. Aufl. III S. 782.

Die Goldkronacher Erzlagerstätten liefern wieder einen schönen Beleg für die Ausfüllung der Gangspalten durch Auslaugungsprodukte des Nebengesteins und gehören zu jenen, deren Antimonglanz als primitiver Körper auftritt und nicht, wie das sonst so oft vorkommt, als Zersetzungsprodukt älterer Erze, namentlich Fahlerze angesehen werden kann. Ihnen überaus ähnlich verhalten sich zunächst die Gänge der Gegend von Schleiz, jene von Wolfsberg am Harze, sowie zahlreiche andere, welche in Glimmer- und Sericitschiefer der Alpen, in Böhmen, bei Welschsteinach im Kinzigthale, St. Trudpert im Münsterthale[1]) und Sulzburg im Schwarzwald vorkommen. Ausserdem finden sich goldhaltige Antimonglanze auch in Gängen des Dacits, aber auch in älteren Gesteinen Ungarns und Siebenbürgens[2]) und in den Gneissen der Alpen (Gastein, Rauris u. s. w.) und Böhmens (Michelsberg u. a. O.), sowie im Granit z. B. bei Magurka, Bocza und Lubella in Ungarn, Schönberg, Mileschau und Bitis in Böhmen, um nur bekanntere europäische Vorkommen zu citiren.

Die Goldkronacher Gänge vertauben in geringer Tiefe gänzlich, so der Hauptgang bei 71 m unter der tiefsten Stollensohle, der Schickung Gottes-Gang sogar schon bei 45 m unter Tag.

Es ist nicht meine Aufgabe, auch die Grubenbauten und deren Erträge zu schildern, da alles Nöthige in v. Gümbels Darstellung geboten ist. Leider muss man nach aufmerksamer Würdigung derselben auch seinem Endurtheile beistimmen, dass dieses Grubenfeld wohl niemals wieder eine Blüthezeit erleben wird.

---

1) Der Antimonglanz wurde s. Z. von Walchner und später auch von G. Leonhard irrig als Zinkenit angesehen, der im Schwarzwald nur bei Hausach vorkommt.

2) Zu Hideg-Szamos ist Sericitschiefer das unmittelbare Nebengestein, wie zu Goldkronach.

Ueber die Hirne verschiedener Hunderacen.

Von N. Rüdinger.

(*Eingelaufen 2. Juli.*)

Die folgenden vorläufigen Mittheilungen betreffen die Ergebnisse einer mehrjährigen Untersuchung an den Hirnen verschiedener Hunderacen, insbesondere die Feststellung des „absoluten und relativen Gehirngewichts" bei denselben.

Bei der Bestimmung des Körpergewichtes der Hunde hat sich ergeben, dass dasselbe bei einer und derselben Race und bei gleichem Alter der Thiere eine grosse Schwankung haben kann, welche wesentlich abhängig ist von der grösseren oder geringeren Fettablagerung und dem Grade der Muskelausbildung bei den verschiedenen Thieren.

Man erhält daher bei den Gewichtsbestimmungen des Körpers und des Hirns an mehreren Hunden zuweilen Zahlen, welche bei der Berechnung des relativen Hirngewichtes keinen korrekten Ausdruck geben. Zwei gleichschwere Hirne zweier Hunde, welche gleichgross und gleichaltrig sind, aber in Folge einer bedeutenden Fettablagerung bei dem einen und hochgradiger Magerkeit bei dem andern Thier ganz ungleiche Körpergewichte zeigen, ergeben bei der Berechung des relativen Gewichtes auffallende Unterschiede. Diese Differenzen mögen ausgleichbar werden, wenn eine grössere Untersuchungsreihe, als dies zur Zeit der Fall ist, vorliegt, und dann nur

Normalthiere mit Fettgehalt und Muskelentwicklung mittleren Grades miteinander verglichen werden.

So habe ich die Gewichtsangaben von zwei Thieren in einer zuerst angelegten Tabelle wieder gestrichen, weil dieselben von allen übrigen Gewichtsbestimmungen verschieden grosser Hunde eine so hochgradige Abweichung zeigten, dass ich einen Irrthum bei der Notirung des Körpergewichtes vermuthete. Allein weitere Beobachtungen liessen erkennen, dass das allzugeringe Körpergewicht in den beiden Fällen die Folge einer Infectionskrankheit, an denen die Hunde zu Grunde gingen, war. Bei allen weiteren derartigen Untersuchungen der Thiere ist stets eine hochgradige krankhafte Veränderung des Körpers mit in Betracht zu ziehen, wenn dieselben verwerthbare Resultate ergeben sollen.

Um eine Uebersicht über diese Gewichtsergebnisse zu gewinnen, soll hier zunächst die Tabelle zur Mittheilung gelangen, in der von 24 Hunden das Alter, das absolute Körper- und Gehirngewicht und das berechnete relative Gehirngewicht enthalten sind. (Siehe nebenstehende Tabelle.)

Was das Alter der Hunde anlangt, so darf nicht übersehen werden, dass Angaben über dasselbe vorkommen, die an Genauigkeit zu wünschen übrig lassen; denn die Thiere werden nicht immer von jenen Besitzern gekauft, die sie aufgezogen haben, wesshalb ihre Wurfzeit unbekannt ist. Verwerthet man für die Bestimmung des Alters bei einem Hunde die Beschaffenheit des Gebisses, so kann man auch nur erfahren, ob ein Thier mit einem Milchgebiss, einem im Wechsel begriffenen oder mit einem bleibenden Gebiss versehen ist. Aus der Beschaffenheit des Gebisses lässt sich daher nur Jugend und höheres Alter eines Thieres, aber nicht das Alter nach Monaten oder Jahren angeben. Die Altersbestimmung der Hunde hat, soweit ich bis jetzt ersehen kann, eine wesentliche Bedeutung desshalb, weil mit Hilfe derselben die

Tabelle.

	Race und Geschlecht	Alter	Absolutes Körpergewicht	Absolutes Gehirngewicht	Relatives Gehirngewicht	Auf 1000 g treffen an Gehirn
1	Leonberger	4 Jahre 6 Mon.	59000 g	135 g	1 : 437,08	2,28 g
2	Bernhardiner ♀	3 Jahre	57000 g	108 g	1 : 527,77	1,89 g
3	Bernhardiner ♂	8—9 Jahre	53000 g	123 g	1 : 430.89	2,32 g
4	Ulmer Dogge	2 Jahre 3 Mon.	48000 g	114 g	1 : 421,05	2,37 g
5	Bernhardiner ♂	4 Jahre 7 Mon.	46000 g	123 g	1 : 373,98	2,67 g
6	Leonberger	1 Jahr 4 Mon.	41000 g	105 g	1 : 390,47	2,56 g
7	Jagdhund ♀	2 Jahre	32000 g	109 g	1 : 293,57	3,41 g
8	Hofhund	2 Jahre	29000 g	62 g	1 : 467,74	2,13 g
9	Bernhardiner ♀	5 Monate	28000 g	116 g	1 : 241,37	4,14 g
10	Jagdhund ♀	3 Jahre	12000 g	82 g	1 : 146,34	6,83 g
11	Affenpinscher	1 Jahr 6 Mon.	8500 g	73 g	1 : 116,43	8,58 g
12	Pinscher ♀	9 Monate	7500 g	64 g	1 : 117,18	8,53 g
13	Spitz ♀	6 Monate	6100 g	75 g	1 : 81,33	12,29 g
14	Windhund ♀	2 Jahre	6000 g	81 g	1 : 74,07	13,50 g
15	Mops (zweifelhafte Race)	4 Monate	4878 g	72 g	1 : 67,75	14,76 g
16	Mops (zweifelhafte Race)	4 Monate	4775 g	74 g	1 : 64,52	15,49 g
17	Pinscher	1 Jahr 6 Mon.	4496 g	71 g	1 : 63,32	15,71 g
18	Hund von engl. Race	—	4378 g	68 g	1 : 64,38	15,53 g
19	Spitz	6 Monate	3750 g	59 g	1 : 63,55	15,73 g
20	Spitz	6 Monate	3400 g	71 g	1 : 47,88	20,88 g
21	Spitz	—	3128 g	70 g	1 : 44,68	22,37 g
22	Hund ♀	4 Monate	1137 g	84 g	1 : 13,53	73,87 g
23	Windhund	Erhalten aus wissenschaftlichen Instituten ohne Angabe des Alters und Körpergewichtes.		95 g	—	—
24	Fox-terrier			82 g	—	—

maximale Wachsthumsgrenze des Hirns, d. h. die Grenze der Gewichtszunahme festgestellt werden soll. Vergleicht man z. B. die Hirngewichte der beiden Bernhardiner (Nr. 2 und 9) miteinander, so ergiebt sich, dass das fünf Monat alte Thier (Nr. 9) ein Hirngewicht von 116 g besitzt, während der dreijährige Hund (Nr. 2) der gleichen Race, welcher 29000 g schwerer ist als der erstere, nur ein Hirngewicht von 108 g hatte.

Aus den bisherigen Gewichtsbestimmungen der Körper und der Hirne bei den Hunden darf gefolgert werden, dass deren Hirne schon früh ihre äusserlich formelle Ausbildung, ihr maximales Wachsthum erlangen, die Körper aber noch weiter an Grösse und Gewicht zunehmen, ohne wesentliche Antheilnahme der Hirne.

Die Zahlenreihe über das absolute Gehirngewicht ergiebt, dass dasselbe nicht durch das Alter des Thieres, sondern durch das Körpergewicht bis zu einem gewissen Grade beeinflusst wird. Sind auch im Allgemeinen zwischen Hirn und Körpergewicht der Hunde mehrfache Schwankungen vorhanden, so lässt sich aus den Zahlen doch ersehen, dass die schwersten Hunde auch die schwersten Hirne und die leichten Hunde die kleinsten Hirne besitzen. Die Thiere wurden nach der Grösse ihres Körpergewichtes in die Tabelle eingetragen, während die Gehirngewichte in der Reihenfolge der Körpergewichte geordnet, einige Schwankungen zeigen. Verweise ich auf Nr. 9—14, so folgen hier Gehirngewichte von 109 g bei 32000 g Körpergewicht, 62 g Gewicht des Hirns bei 29000 g Körpergewicht und hier sind die Zahlen der Ausdruck von ganz ungleichen Verhältnissen zwischen Körper- und Hirngewicht. Bei diesen auffallenden Unterschieden darf man wohl daran denken, dass das Alter, die Race und insbesondere der körperliche Zustand der Thiere einen nicht geringen Einfluss ausüben. Unverständlich bleibt es immerhin, wenn ein zweijähriger Hund bei einem Gewicht

von 32000 g nur 109 g Gehirn, ein gleichalteriges Thier bei einem Körpergewicht von 29000 g nur 62 g und sogar ein fünf Monat alter Bernhardiner, der 28000 g schwer war, 116 g Gehirn hatte.

Der Raceunterschied, an den man auch denken könnte, erscheint nicht ausreichend, diese Verschiedenheit zu erklären, ebensowenig wie der Unterschied verständlich ist bei Nr. 21 und 22, bei denen der 1137 g schwere Hund um 14 g mehr Gehirnsubstanz besass, als das 3128 g schwere Thier.

Hier spielen noch Faktoren herein, welche bei den weiteren Studien eine ganz besondere Beachtung verdienen. Einerseits scheint das Alter der Thiere, andererseits aber die Krankheit, welche den Tod desselben verursachte, mit in Betracht zu kommen. Schon seit Jahren suche ich die Hirne von jenen Hunden zu sammeln, welche für physiologische Zwecke in den Instituten angekauft werden; dieselben verdienen ebenso den Vorzug vor kranken Thieren, wie wir die Bestimmungen des Körper- und Gehirngewichtes an den Verunglückten, den Selbstmördern und Enthaupteten jenen an chronischen Krankheiten verstorbenen Menschen vorziehen.

Schon aus der Zahlenvergleichung des absoluten Körper- und Gehirngewichtes lässt sich entnehmen, dass die relativen Gewichte auffallend differiren werden. Wie schon erwähnt sprechen mehrere Thatsachen dafür, dass das Wachsthum des Hirns bei den Hunden schon vor Ende ihres ersten Lebensjahres seine Grenze erreicht, während der Körper noch bedeutend an Grösse und Gewicht zunimmt. Das relative Gehirngewicht zeigt demnach beim jungen und alten Thier einen in die Augen fallenden Unterschied:

Die Zahlenreihe über das relative Hirngewicht zeigt sich um so günstiger, je jünger das Thier ist. Bei dem drei Jahre alten Bernhardiner (Nr. 2) welcher ein Körpergewicht von 57000 g besitzt, ergiebt sich ein relatives Gehirngewicht wie 1:527,77; dagegen wurde bei dem fünf Monat alten

Bernhardiner (Nr. 9), der 28000 g wog, ein relatives Hirngewicht wie 1:241,37 berechnet, und bei dem vier Monat alten Thier (Nr. 15), das nur 4878 g wog, ein relatives Hirngewicht wie 1:67,75 festgestellt. Bei allen leichten Hunden ergiebt sich ein relativ sehr günstiges Hirngewicht, weil das Körperwachsthum, nachdem das Hirn seine maximale Grösse erlangt hat, gar nicht mehr oder nur in geringem Grade fortschreitet.

In ganz ähnlicher Weise zeigt sich das relative Hirngewicht, wenn dasselbe auf 1000 g Körpergewicht berechnet wird. Bei den schweren Thieren kommen auf 1000 g Körper zwischen 2—6 g Hirn und bei den kleinen leichten Hunden auf 1000 g Körper 8—22 g und mehr Hirn.

Bei den weiteren Studien werden noch in Betracht gezogen, das Volum des ganzen Schädels zu Volum der Schädelhöhle und das Verhältniss des Hirnschädels zum Gesichtsskelett.

Die äusserlich am Hundeschädel gewonnenen Messungsergebnisse können, wenn es sich um relative Beziehungen zwischen den äusseren Dimensionen des Schädels und des Hirns handelt, keine direkte Verwerthung finden, wie etwa bei dem Menschenschädel, weil bei den Hunden die ungleiche Dicke der Schädelknochen, die Muskelleisten und die pneumatischen Räume am Hirnschädel die Messung hochgradig beeinflussen. Aber noch mehr wird der Kopf des Hundes beeinflusst durch den ungemein verschiedenen Grad der Ausbildung des Gesichtsskelettes. Die Fresswerkzeuge sind bei der einen Race sehr stark, bei der andern nur schwach ausgebildet, so dass der Gesichts- und der sog. Sattelwinkel höchst variabel erscheinen, ohne dass der Grad der Hirnentwicklung einen nennenswerthen Einfluss auf dieselben ausübt.

Alle die berührten Fragen bedürfen für ihre Beantwortung noch eingehendere Studien und nach Gewinnung

des Hirn- und Schädelmateriales von den Hunden verschiedener Racen soll mit Berücksichtigung der spärlich vorhandenen Literatur das vorliegende Thema eine eingehendere Besprechung erfahren.

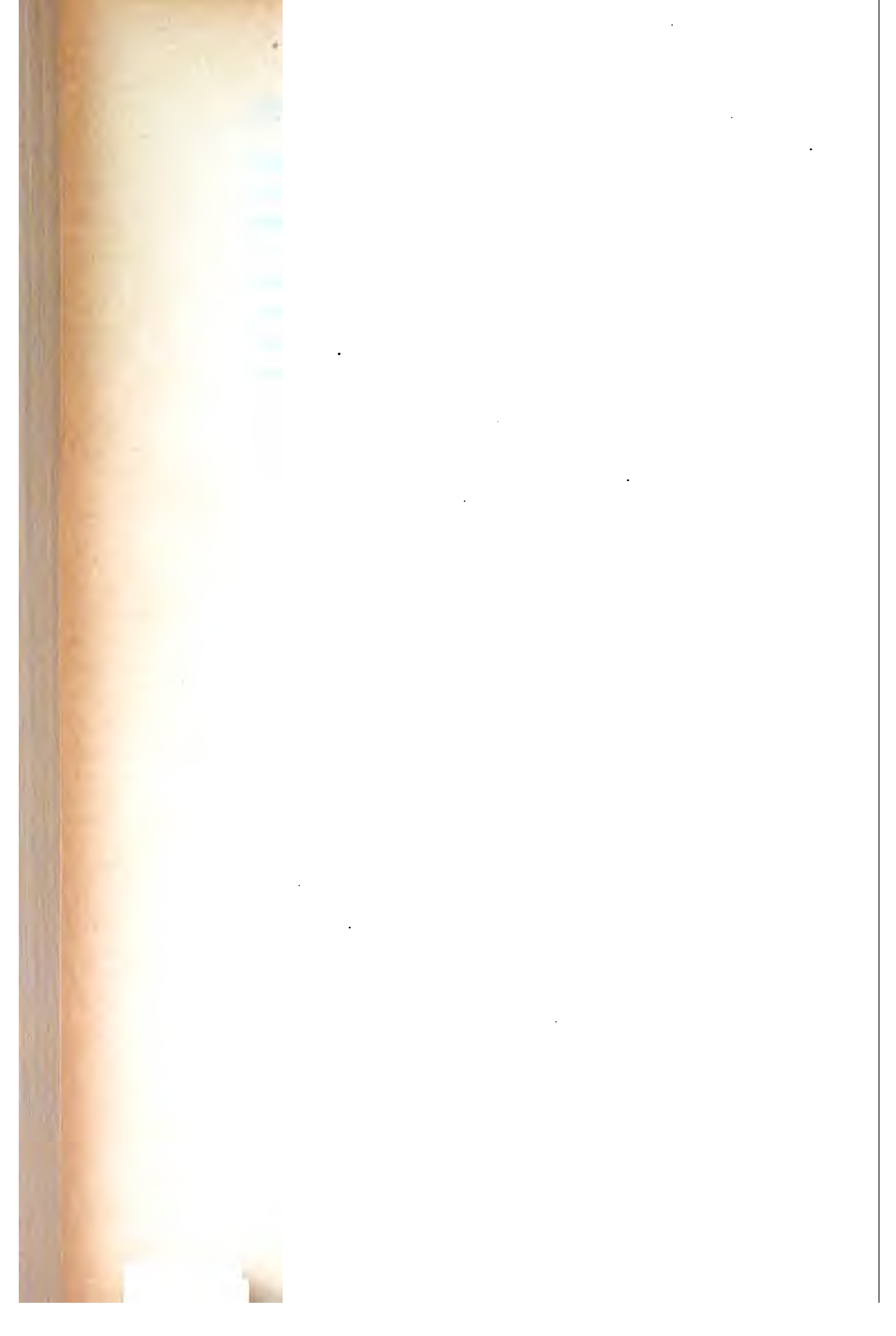
Vorläufig sollen einige Sätze über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen hier zur Mittheilung gelangen.

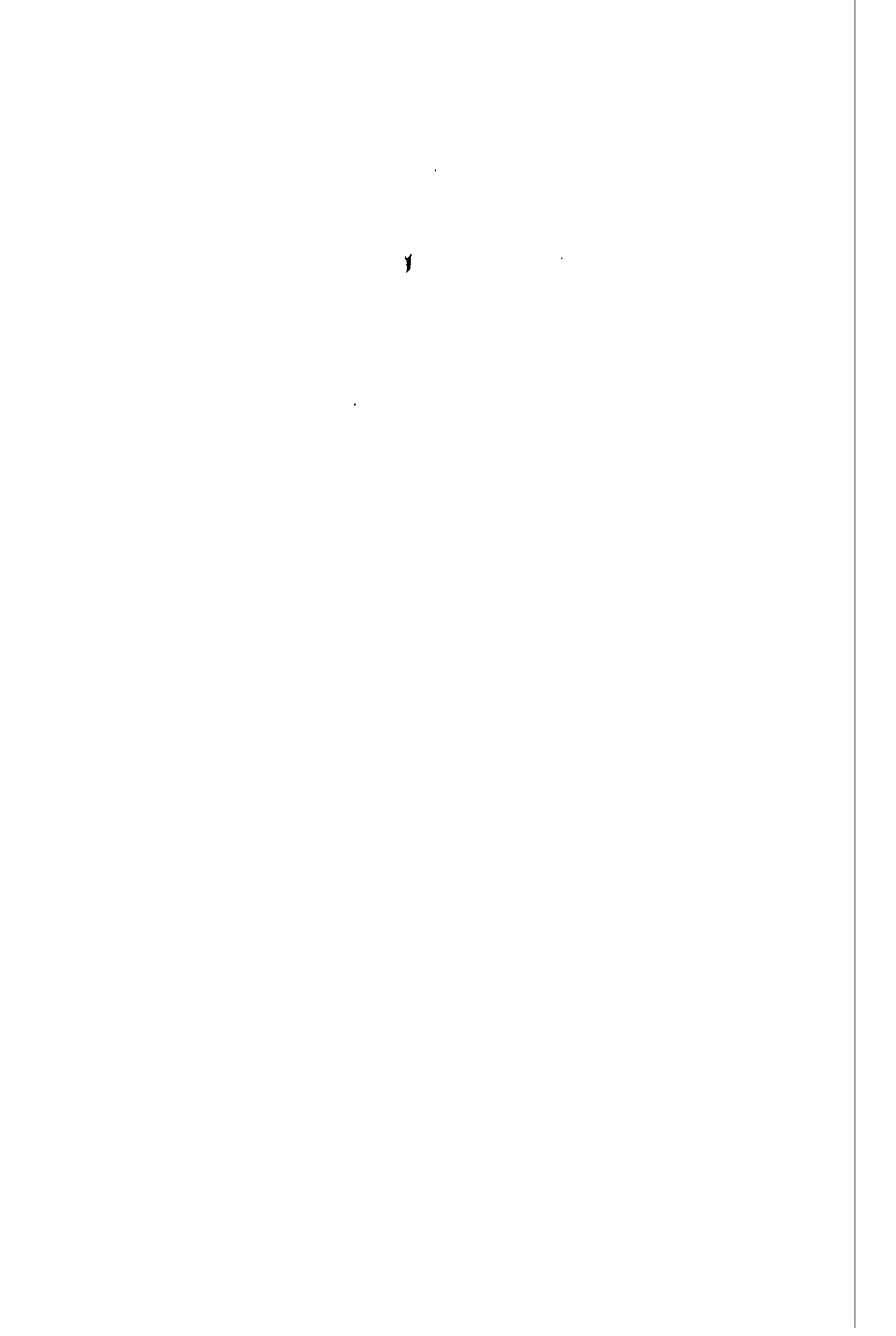
1. Wenn auch in den Zahlen über das Körper- und Hirngewicht noch viele Schwankungen, welche durch eine grössere Untersuchungsreihe sich ausgleichen mögen, vorhanden sind, so ist doch schon festgestellt, dass das Hirn bei den Hunden schon im ersten Lebensjahre seine Wachsthumsgrenze erreicht.

2. Der schwerste Hund hat auch das schwerste Hirn. Die Hirngewichte nehmen bei den Hunden mit dem Körpergewicht derselben zu, jedoch in einem ungleichen Verhältniss.

3. Das relative Hirngewicht ist bei kleinen leichten Thieren ein viel günstigeres als bei den grossen.

4. Der kleine leichte Hund besitzt auf 1000 g Körpergewicht bedeutend mehr Hirn als der grosse.





Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. Juni 1894.

1. Herr H. Seeliger legt eine Abhandlung: „über den vierfachen Stern ζ Cancri“ vor.

2. Herr L. Boltzmann überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Ignaz Schütz, Hilfsarbeiter beim Unterrichte für theoretische Physik im math.-physikal. Institut: „über eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz'schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell'schen Theorie entspricht“.

Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri.

Von H. Seeliger.

(*Eingelaufen 2. Juni.*)

Die Resultate numerischer Rechnungen von der Art, wie ich sie in meinen beiden Arbeiten über ζ Cancri[1]) veröffentlicht habe, tragen immer mehr oder weniger den Character von Interpolationsformeln. Ihre Constanten lassen sich nicht mit so grosser Genauigkeit bestimmen, dass auf

1) Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. Denkschriften der Wiener Akademie 1881. Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abhandlungen der k. bayer. Akademie 1888. Im Folgenden soll die erste Abhandlung mit I, die zweite mit II bezeichnet werden.

Jahre hinaus ein völlig befriedigender Anschluss an die Beobachtungen verbürgt werden kann. Ich habe diese Sachlage, namentlich in II, ausdrücklich hervorgehoben. Es ist deshalb einerseits nicht zu verwundern, wenn die aus der Theorie folgenden Oerter mit der Zeit von den Beobachtungen um geringe Beträge abweichen, andererseits hat es kein Interesse in kürzeren Zeitintervallen immer von neuem die Beobachtungen an die Theorie genau anzuschliessen, wenn nur die characteristischen Ergebnisse der letzteren sich in den ersteren wiederfinden.

Bei der Ausarbeitung von I standen mir Beobachtungen bis zum Jahre 1880 zur Verfügung, während in II Messungen bis zum Jahre 1888, allerdings zum Theil in nicht hinlänglicher Zahl, benutzt werden konnten. Die Berechtigung der zweiten Untersuchung lag deshalb nicht sowohl in dem vermehrten Beobachtungsmaterial, als vielmehr in dem Umstande, dass ich dort die Theorie nach verschiedenen Richtungen eingehender und vollständiger entwickeln konnte und in dieser Beziehung einen gewissen Abschluss erreichen zu können glaubte. Eine Aufforderung meine Rechnungen über ζ Cancri gegenwärtig wieder aufzunehmen, kann ich deshalb in dem Hinzukommen neuer Beobachtungen nicht erblicken. Dagegen sind in den letzten Jahren von Herrn Burnham, einem verdienten Doppelsternbeobachter, Angriffe gegen meine Theorie der Bewegung des entfernteren Sternes *C* erfolgt, welche in den Augen derjenigen, die meine Arbeiten nicht genauer kennen, die Sachlage zu verdunkeln geeignet sind. Die von Herrn Burnham mit grosser Zuversicht vorgebrachten Argumente sind freilich nur geeignet zu beweisen, dass ihr Urheber weder genügende Sachkenntniss besitzt, noch sich die Mühe gegeben hat meine Arbeiten genauer anzusehen. Ich könnte deshalb die verdiente Würdigung der Burnham'schen Behauptungen ruhig der Zukunft und Anderen überlassen. Auf der andern Seite kann ich nicht

zugeben, dass durch ganz unbegründete Behauptungen die Resultate meiner Arbeiten über ζ Cancri in Frage gestellt werden und deshalb habe ich im Folgenden einige Rechnungen ausgeführt, die auch für den Fernerstehenden die Sachlage in, wie ich hoffe, völlige Klarheit zu stellen geeignet sein dürften.

Ich werde mich im Folgenden einzig und allein mit der Bewegung des entfernteren Begleiters C um den Schwerpunkt der beiden inneren Sterne A und B beschäftigen. Ausführliche Untersuchungen in I und II haben zu dem Resultate geführt, dass die Beobachtungen keine merkliche Verschiedenheit zwischen dem Schwerpunkte von A und B und der Mitte beider Sterne, $\frac{A+B}{2}$, ergeben. Weiter zeigten sich in den Beobachtungen von C und zwar in ganz übereinstimmender Weise sowohl im Positionswinkel als auch in Distanz Undulationen, welche die Positionswinkel um ungefähr $\pm 2^\circ$ und die Distanzen um $\pm 0\overset{''}{.}2$ um einen mittleren Werth herumschwanken liessen. Die constante Periode dieser Schwankung betrug nahezu 18 Jahre und es war möglich, dieselbe in mehr als 3 vollständigen Wiederholungen zu bestätigen. Die ganze Erscheinung ist nach jeder Richtung vollständig durch die Annahme zu erklären, der Stern C besitze einen vorerst als dunkel zu betrachtenden nahen Begleiter. Die in II verarbeiteten Jahresmittel von 1880 ab konnten indessen nicht hinlänglich begründet werden, was nunmehr durch die inzwischen erfolgte Publication mehrerer werthvollen Beobachtungsreihen möglich ist. Vom Jahre 1888 ab wäre aber auch gegenwärtig die Aufstellung von einigermaassen zuverlässigen Jahresmitteln nicht möglich, hätten nicht die Herren Schiaparelli, H. Struve und Lovett die grosse Freundlichkeit gehabt, mir aus ihren Tagebüchern die gewünschten Auszüge mitzutheilen. Namentlich die sehr zahlreichen und ausgezeichneten Messungen

Herrn Schiaparelli's bilden eine wesentliche Stütze der folgenden Bemerkungen. Auf diese Weise war es möglich 15 neue und sichere Jahresmittel von 1880—1894 aufzustellen. Nach den obigen Bemerkungen kann es sich nicht darum handeln, diese neuen Messungsresultate in die früheren Rechnungen einzufügen. Dagegen glaube ich ähnlichen unbegründeten Angriffen, wie die von Seite des Herrn Burnham, am besten zu begegnen, wenn ich die neueren Messungen, die doch fast gar keinen personalen Zusammenhang haben mit den in den vierziger oder fünfziger Jahren ausgeführten, für sich allein behandle. Nachdem sich herausgestellt haben wird, dass sich meine früheren Formeln den neuen Beobachtungen noch soweit anschliessen, als man überhaupt erwarten konnte, werde ich zeigen, dass auch die neuen Messungen, für sich allein betrachtet, wiederum der Annahme eines dunklen Begleiters von *C* völlig und zwar auch quantitativ den früheren Formeln entsprechend, genügen und dass ohne eine solche Annahme Fehler übrig bleiben, die durch Anhäufung von persönlichen Fehlern zu erklären wohl Niemand in ernsthafter Weise versuchen wird.

Ich gehe nun zur Mittheilung der gesammelten Jahresmittel der Beobachtungen von *C*, bezogen auf die Mitte von *A* und *B*, über. Zur Abkürzung werden die Beobachter Hall (sen.), Jedrzejewicz, Schiaparelli und Hermann Struve mit den Buchstaben H, J, Sp, H. Σ, bezeichnet.

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel
80.16	Franz	2	130°60	5"545	
80.21	H.	4	132.45	5.465	1880.21 (11.10) 132°25 5"372
80.22	J.	4	132.50	5.193	
80.31	Seabroke	1	133.72	—	

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel
81.24	J.	4	131°.29	5".467	
81.25	Doberck	2	131.75	5.400	
81.26	Seabr.	1	131.37	—	1881.28 (17.16) 131°.42 5".431
81.28	O. Σ.	2	130.80	5.210	
81.30	Sp.	4	131.57	5.445	
81.30	H.	4	131.54	5.508	
82.20	H.	4	132.03	5.587	
82.25	Seabr.	2	129.83	—	1882.24 (14.13) 131°.13 5".517
82.26	Sp.	4	131.06	5.468	
82.27	J.	4	130.94	5.497	
83.13	Engelm.	4	129.43	5.653	
83.29	Sp.	4	130.16	5.598	
83.31	H.	4	130.21	5.567	1883.26 (15.14) 129°.73 5".599
83.32	Seabr.	1	128.33	—	
83.35	Küstner	2	129.20	5.557	
84.21	Perrotin	2	128.95	5.561	
84.25	Sp.	4	129.21	5.589	
84.26	O. Σ.	4	129.22	5.418	1884.28 (17.14) 128°.63 5".546
84.28	H.	4	126.59	5.625	
84.38	Seabr.	1	131.00	—	
84.39	Smith	2	128.90	—	
85.28	Seabr.	1	126.20	5.760	
85.29	Engelm.	4	128.18	5.654	1885.29 (9) 128°.09 5".643
85.29	Sp.	4	128.48	5.603	
86.04	Tarrent	2	125.71	5.480	
86.24	Seabr.	1	126.40	(5.06)	
86.25	Smith	1	127.30	(4.61)	
86.28	H.	4	126.26	5.600	1886.26 (20.14) 126°.99 5".591
86.29	J.	4	126.98	—	
86.30	Engelm.	4	128.58	5.569	
86.30	H. Σ.	4	126.84	5.660	

1800 +	Beobachter	Gewicht	p	ϱ	Mittel			
87.24	Sp.	4	125°18	5″598				
87.24	H.	4	126.96	5.595				
87.30	H. Σ.	4	126.17	5.600	1887.27	(14.12)	125°96	5″59[illegible]
87.35	Seabr.	1	125.40	(4.51)				
87.36	Smith	1	124.80	(4.64)				
88.25	H.	4	124.13	5.520				
88.27	Sp.	4	124.31	5.684				
88.28	Smith	2	125.20	(4.65)				
88.33	O. Σ.	2	123.84	5.667	1888.29	(17.15)	124°27	5″625
88.33	H. Σ.	4	124.01	5.610				
88.36	Maw	1	124.70	5.790				
89.12	Seabr.	1	125.30	(4.85)				
89.18	Highton	1	124.60	5.310				
89.19	Leavenworth	2	123.80	5.530				
89.22	Sp.	4	123.01	5.536	1889.22	(18.17)	123°79	5″534
89.23	H. Σ.	4	123.51	5.590				
89.23	H.	4	123.91	5.680				
89.29	Maw	2	124.50	5.240				
90.23	Sp.	4	123.43	5.514				
90.24	Comstock	1	124.80	5.470	1890.28	(13)	123°51	5″507
90.28	H.	4	123.51	5.432				
90.33	H. Σ.	4	123.26	5.580				
91.21	Sp.	4	122.43	5.527				
91.22	H.	4	122.87	5.479				
91.26	Maw	2	122.50	5.300	1891.26	(13)	122°76	5″490
91.27	H. Σ.	2	122.31	5.570				
91.65	Byers & Collins	1	125.10	5.610				
92.26	Sp.	4	122.40	5.443	1892.26	(4)	122°40	5″443
93.16	Jones	1	(115.70)	5.320				
93.21	Lewis	2	123.70	5.185	1893.24	(6.7)	122°51	5″26[illegible]
93.25	Sp.	4	121.96	5.331				
94.16	H. Σ.	4	122.39	5.430				
94.16	Lovett	2	123.10	5.540	1894.19	(10)	122°46	5″405
94.24	Sp.	4	122.22	5.318				

Zu dieser Zusammenstellung ist Folgendes zu bemerken:

1. Die Gewichtsbestimmung geschah wieder nach dem in II. aufgestellten Schema. Das genügt jedenfalls für die vorliegenden Zwecke, wenngleich hierdurch die neuen mit so ausgezeichneten Hülfsmitteln ausgerüsteten Beobachter sicherlich zu kleine Gewichte bekommen haben. Bei einer definitiven Bearbeitung wird man u. A. den aus sehr zahlreichen und augenscheinlich sehr genauen Abendmitteln zusammengesetzten Jahresmitteln Schiaparelli's ein grösseres Gewicht zu geben haben. Die Jahresmittel Schiaparelli's sind der Reihe nach aus 13, 12, 14, 8, 10, 10, 14, 14 Abenden gebildet.

2. Die Reduction der auf A oder B bezogenen Messungen von C auf $\frac{A+B}{2}$ ist mit Hülfe von Annahmen über die gegenseitige Stellung von A und B erfolgt, die nicht ganz sicher sind und nicht ohne grössere Rechnungen sicher hergestellt werden konnten. Diese Ungenauigkeit, die übrigens kaum merklich sein wird, kann nur bei den Beobachtungen von H. Σ. die letzte Stelle der obigen Zahlen beeinflusst haben.

3. Was die constanten persönlichen Fehler betrifft, so wurden durch Vergleichung mit der II. S. 71 gegebenen Ephemeride folgende Correctionen angebracht:

Sp.	— 0°85	+ 0″074
H.	+ 0.51	— 0.025
H. Σ.	— 0.41	+ 0.097

Die letzte Beobachtung von H. Σ. scheint indessen sich dieser Correction zu widersetzen. Dieselbe ist durch eine dreijährige Pause von den früheren getrennt und besteht aus je 6 Vergleichungen von C mit A und mit B, welche vollständig übereinstimmende Mittelwerthe geben. Danach scheint es besser zu sein, diese letzte Messung von H. Σ. uncorrigirt zu lassen. Im Uebrigen tritt auf den ersten Blick ziemlich deutlich die Thatsache hervor, dass hierdurch das letzte Jahresmittel in Distanz unsicher ist, und man wird das auch in der Folge bestätigt finden.

4. Die Messungen von O. Σ. aus dem Jahre 1881 und die mit dem 30zölligen Refractor angestellten sind direct ohne Correction dem Anhange von II. entnommen worden. Die Gründe für dieses Verfahren lasse ich unerörtert, weil ein merklicher Einfluss hierdurch im Folgenden nicht hervorgerufen werden kann. Alle anderen Beobachtungen sind, wie früher, uncorrigirt geblieben.

Was die in II. und im Anschluss hieran in der vorliegenden Notiz angewandten constanten persönlichen Fehler betrifft, so geben sie nichts anderes an, als die Mittel der Abweichungen gegen die Ephemeride, welche wiederum aus provisorisch corrigirten Beobachtungen abgeleitet ist. Die Beobachtungen erscheinen hierdurch auf ein mehr oder weniger willkürliches System der Positionswinkel und Distanzen bezogen. Mit einiger Wahrscheinlichkeit wird man aber die gefundenen Correctionen als wirkliche constante persönliche Fehler betrachten dürfen, wenn das Mittel aller angebrachten Correctionen nicht merklich von Null abweicht, im anderen Falle ist das angenommene System noch nicht das normale. Die in II. und gegenwärtig benutzten Correctionen sind nun, wenn dort, wo für denselben Beobachter verschiedene Correctionen gefunden worden sind, einfache Mittelwerthe angesetzt werden (mit Ausnahme von Sp., bei welchem wegen der grossen Verschiedenheit der Instrumente dies kaum zulässig sein dürfte):

W. Σ.	+1°.82	—0".070
O. Σ.	—0.47	—0.125
D.	+0.84	—0.033
S.	+0.02	—0.003
Δ.	—0.26	—0.031
Mädler	+0.30	—
Du.	—1.56	—0.050
Sp. I	+1.04	+0.004
Engelmann	+1.38	+0.217
J.	+0.71	—0.103

Kaiser	$+1^{\circ}.79$	$-0''.280$
Sp. II	-0.85	$+0.074$
H.	$+0.51$	-0.025
H. Σ.	-0.41	$+0.097$
Mittel	$+0^{\circ}.35$	$-0''.024$

Nimmt man nur die am sichersten bestimmten Correctionen, nämlich: W. Σ., Δ., Sp. I, Sp. II, H., H. Σ., so ergiebt sich als Mittelwerth $+0^{\circ}.31$, $+0''.008$. Danach dürfte das System etwas zu grosse Positionswinkel angeben, während die Distanzen jedenfalls nahezu der Wahrheit entsprechen. Da aber eine constante Correction im Positionswinkel auf die Theorie keinen Einfluss übt, wird man das gewählte System als nahezu normal ansehen dürfen. Ausserdem ist diese positive Correction durch die etwas ungewöhnlich grosse Correction von W. Σ. zum grössten Theile entstanden. Jedenfalls liegt vorderhand kein Grund vor, zu bezweifeln, dass sich meine Untersuchungen in II. auf Beobachtungen stützen, die auf ein wesentlich richtiges System bezogen worden sind, wenngleich nicht ausgeschlossen ist, dass sich in der Folgezeit, wo hoffentlich recht viele der jetzt zur Verfügung stehenden grossen Fernrohre zur Ausmessung von ζ Cancri benutzt werden, eine Modification nach der einen oder anderen Seite ergeben könnte.

Die oben angeführten Jahresmittel wurden zunächst, zur Erleichterung aller Vergleichungen, auf dasselbe Zehntel des betreffenden Jahres reducirt. Es muss aber wiederholt darauf aufmerksam gemacht werden, dass die letzten Stellen, also die Hundertstel der Positionswinkelgrade und die Tausendstel der Distanzsecunden, um einige wenige Einheiten unsicher wird; das liegt in der Art ihrer Berechnung. Ebenso haben alle weiteren Rechnungen eine solche minimale, gänzlich belanglose Unsicherheit. Den 15 neu abgeleiteten Jahresmitteln habe ich nun noch die 4 zunächst vorangehenden aus II. hinzugefügt. Eine Aenderung oder Vervollständigung mit ihnen vorzunehmen, war ich nicht in der Lage.

Zuerst sollen die beobachteten Positionswinkel und Distanzen p_B und ϱ_B mit den aus der Theorie (II S. 68—71) folgenden Werthen p_R und ϱ_R verglichen werden. Die Differenzen im Sinne Beobachtung—Rechnung finden sich unter der Rubrik $B-R$ in der Zusammenstellung auf folgender Seite. Ein nur flüchtiger Blick auf diese Zahlen ergiebt nun, dass im Grossen und Ganzen der Anschluss an die Theorie zufriedenstellend ist. Zum mindesten sind die eigenthümlichen Undulationen, welche die Beobachtungen in p und ϱ ergeben, fast vollständig verschwunden. Uebrig geblieben sind Differenzen von allerdings wohl noch systematischem Betrage, die aber für den objectiven Beurtheiler absolut nichts Auffallendes mehr haben, da sowohl systematische Fehler in den Beobachtungen vorauszusetzen sind und ferner es sich ja um eine Extrapolation auf etwa 10 Jahre hinaus handelt. In Anbetracht dessen darf die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung als befriedigend bezeichnet werden. Die Summen der absoluten Differenzen betragen im Positionswinkel 8.56, in Distanz 0.769.

Die Undulationen, welche die beobachteten p und ϱ zeigen und die, wie ich in II. gezeigt habe, mit einer fast mathematischen Regelmässigkeit an eine Periode von ungefähr 18 Jahren geknüpft sind, treten deutlicher hervor, wenn man die Beobachtungen etwa durch eine Kreisbewegung darzustellen sucht. Hierbei ist wohl zu beachten, dass es sich um eine fortschreitende Veränderung der Positionswinkel um nur 9 Grad handelt. Nimmt man diese fortschreitende Veränderung von p nach II an und setzt:

$$p_0 = 145.^\circ46 - 0.^\circ513\ (t - 1850.2),\quad \varrho_0 = 5.''459$$

entsprechend dem einfachen ohne Rücksicht auf die Gewichte gebildeten Mittelwerth aller ϱ_B, so geben die Differenzen $p_0 - p_B$, $\varrho_0 - \varrho_B$ nahezu das, was man als die übrig bleibenden Fehler der Beobachtungen anzusehen hätte, wenn man die Annahme, dass der Stern C nicht wiederum doppelt sei, fallen

liesse. Differenzen von einem solchen Betrage sind nunmehr in der vierten Wiederholung aufgetreten. Es widerstrebt mir, angesichts dieser Zahlen die Behauptung des Herrn Burnham, dass solche Abweichungen als eine merkwürdige, nunmehr zum 4. Male in gleicher Weise auftretende Anhäufung von persönlichen Fehlern aufzufassen seien, zu kritisiren. Dergleichen Behauptungen mit einem parlamentarischen Ausdrucke zu charakterisiren ist kaum möglich.

	p_B	ϱ_B	p_R	ϱ_R	$B-R$		p_0	p_0-p_B	$\varrho_0-\varrho_B$
1876.2	130°51	5″817	130°91	5″281	−0°40	+0″036	132°12	+1°61	+0″142
77.2	131.15	258	131.21	255	−0.06	+0.003	131.60	+0.45	+0.201
78.2	131.42	295	131.57	259	−0.15	+0.036	131.09	−0.33	+0.164
79.2	132.62	258	131.86	294	+0.76	−0.036	130.58	−2.04	+0.201
80.2	132.25	372	131.95	351	+0.30	+0.021	130.06	−2.19	+0.087
81.2	131.46	425	131.76	422	−0.30	+0.003	129.55	−1.91	+0.034
82.2	131.16	514	131.28	494	−0.12	+0.020	129.03	−2.13	−0.055
83.2	129.79	597	130.54	561	−0.75	+0.036	128.52	−1.27	−0.138
84.2	128.72	543	129.59	615	−0.87	−0.072	128.00	−0.72	−0.084
85.2	128.19	642	128.49	651	−0.30	−0.009	127.49	−0.70	−0.183
86.2	127.06	591	127.32	667	−0.26	−0.076	126.99	−0.07	−0.132
87.2	126.04	598	126.12	665	−0.08	−0.067	126.48	+0.44	−0.139
88.2	124.38	627	124.93	642	−0.55	−0.015	125.96	+1.58	−0.168
89.2	123.81	535	123.84	601	−0.03	−0.066	125.45	+1.64	−0.076
90.2	123.58	511	122.91	554	+0.67	−0.043	124.93	+1.35	−0.052
91.2	122.80	494	122.20	475	+0.60	+0.019	124.42	+1.62	−0.035
92.2	122.43	447	121.75	403	+0.68	+0.044	123.90	+1.47	+0.012
93.2	122.54	290	121.60	335	+0.94	−0.045	123.39	+0.85	+0.169
94.2	122.46	404	121.72	282	+0.74	+0.122	122.89	+0.43	+0.045

Um indessen die entscheidende Thatsache deutlich vorzuführen, dass die angeführten letzten 19 Jahresmittel, bei denen so viele und ausgezeichnete Beobachter (es sei hierbei hingewiesen auf die überaus gute Uebereinstimmung, namentlich in den Positionswinkeln) mitgewirkt haben, die in den Jahresmitteln vor 1876 nicht vorkommen, mit derselben Periode übereinstimmen, die in II aus der Gesammtheit der früher verfügbaren Messungen abgeleitet worden ist, habe ich die Differenzen $p_0 - p_B$ nach der Methode des kl. Qu. durch eine, einer Kreisbewegung mit der genannten Periode entsprechenden Formel darzustellen unternommen. Es ergab sich so:

$$\text{(II)} \qquad p_0 - p_B = -0.^\circ 06 + 1.^\circ 918 \sin 19.^\circ 947\, t + 0.^\circ 137 \cos 19.^\circ 947\, t$$

worin die Zeit t in Jahren von 1850.2 anzusetzen ist. Wollte man noch einen besseren Anschluss dadurch erreichen, dass man die Veränderung von p_0 etwas ändert, so wäre zu setzen

$$\text{(III)} \qquad p_0 - p_B = -0.^\circ 06 - 0.^\circ 681 \left(\frac{t}{10}\right) + 2.^\circ 268 \sin 19.^\circ 947\, t + 0.^\circ 286 \cos 19.^\circ 947\, t$$

In der folgenden Tabelle sind die nach den Formeln gerechneten Werthe der Positionswinkel unter II bezw. III angegeben, ferner sind nunmehr die übrig bleibenden Fehler unter $\varDelta$ bezw. $\varDelta_1$ angeführt. Die gewonnene Darstellung ist, wie ja gar nicht anders zu erwarten war, eine zufriedenstellende. Der systematische Charakter der Differenzen kann zum Theil gewiss durch eine mehr ausgearbeitete Theorie, ähnlich etwa der von mir früher dargestellten und einer mit Rücksicht auf die Gewichte durchgeführten Rechnung fortgeschafft werden, zum grösseren Theil sprechen sich hier eben wirklich jene rein persönlichen Beobachtungsfehler aus. Ich habe auf diesen Punkt in meinen früheren Arbeiten stets nachdrücklich hingewiesen. Für die Summen der absoluten

Werthe der $\varDelta$ und $\varDelta_1$ ergiebt sich 6°05 bezw. 5°58. Man wird demnach kaum nöthig haben, der Formel III etwa einen Vorzug vor II zu geben.

	$p_0 - p_B$	II	$\varDelta$	III	$\varDelta_1$	a	$\varDelta_2$
1876.2	+ 1°61	+ 0°51	+ 1°10	+ 1°10	+ 0°51	5"493	+ 0"031
77.2	+ 0.45	− 0.15	+ 0.60	+ 0.25	+ 0.20	439	− 0.023
78.2	− 0.33	− 0.49	+ 0.16	− 0.21	− 0.12	465	+ 0.003
79.2	− 2.04	− 1.26	− 0.78	− 1.29	− 0.75	391	− 0.071
80.2	− 2.19	− 1.77	− 0.42	− 1.81	− 0.38	456	− 0.006
81.2	− 1.91	− 1.97	+ 0.06	− 2.08	+ 0.17	449	− 0.013
82.2	− 2.13	− 1.94	− 0.19	− 2.15	+ 0.02	475	+ 0.013
83.2	− 1.27	− 1.69	+ 0.42	− 1.80	+ 0.53	499	+ 0.037
84.2	− 0.72	− 1.24	+ 0.52	− 1.30	+ 0.58	399	− 0.063
85.2	− 0.70	− 0.65	− 0.05	− 0.45	− 0.25	468	+ 0.006
86.2	− 0.07	0	− 0.07	+ 0.07	− 0.14	410	− 0.052
87.2	+ 0.44	+ 0.66	− 0.22	+ 0.77	− 0.33	429	− 0.033
88.2	+ 1.58	+ 1.22	+ 0.36	+ 1.35	+ 0.23	490	+ 0.028
89.2	+ 1.64	+ 1.63	+ 0.01	+ 1.73	− 0.09	449	− 0.013
90.2	+ 1.35	+ 1.84	− 0.49	+ 1.87	− 0.52	485	+ 0.023
91.2	+ 1.62	+ 1.82	− 0.20	+ 1.73	− 0.11	534	+ 0.072
92.2	+ 1.47	+ 1.60	− 0.13	+ 1.32	+ 0.15	547	+ 0.085
93.2	+ 0.85	+ 1.12	− 0.27	+ 0.70	+ 0.15	434	− 0.028
94.2	+ 0.43	+ 0.43	0	+ 0.08	+ 0.35	(582)	(+0.120)

Eine nicht unwichtige Controlle, wenn es derselben überhaupt noch bedarf, liefert nunmehr die Behandlung der Distanzen. Die Formel II zieht natürlich dann, wenn angenommen wird, dass C eine Kreisbahn um einen dunklen Begleiter beschreibt, ganz bestimmte Veränderungen der Distanzen nach sich. Nennt man a den Radius der Kreisbahn, welchen der Schwerpunkt von C und seinem Begleiter um $\frac{A+B}{2}$ beschreibt, so kann man aus jedem ϱ_B einen Werth von a rechnen. Die angeführten a nebst den Differenzen $\varDelta_1 = 5''462 - a$, wobei 5"462 den einfachen ohne Rücksicht auf die Gewichte genommenen Mittelwerth darstellt, liefern nun wieder eine und zwar eine ganz unabhängige Be-

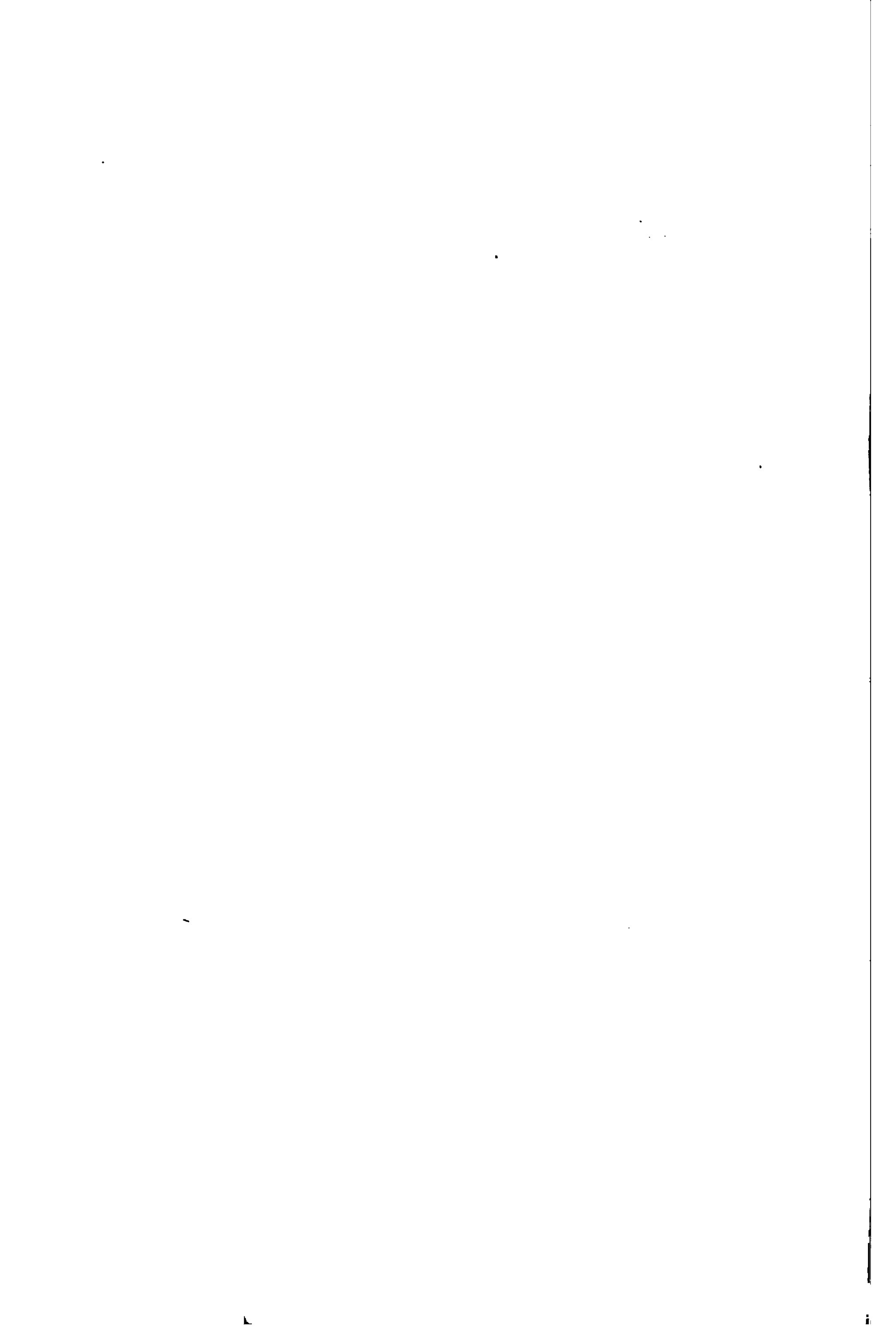
stätigung der Theorie. Wenn man die geringen Abweichungen ($\Sigma \Delta_2 = 0''720$ bezw. $0''600$) überblickt, so wird man nicht zweifelhaft sein können, dass alle grösseren regelmässigen Undulationen in den Distanzen vollkommen verschwunden sind. Ich habe in dieser Controlle in meinen beiden früheren Abhandlungen stets eine sehr gewichtige Stütze erblickt für die fast apodiktische Sicherheit der Annahme, dass C einen dunklen Begleiter haben müsse. Ich kann auch jetzt nur wiederholen, was ich über jene Annahme in II (S. 14) gesagt habe: „Ich für meinen Theil stehe nicht an, derselben eine Sicherheit zuzusprechen, die so gross ist, wie sie wenigen Erklärungsversuchen in der Stellarastronomie zukommt, die nicht durch den blossen Augenschein sofort bewiesen werden können."

Zum Schlusse muss ich nochmals, obwohl nur ungern, auf Herrn Burnham zurückkommen. Nachdem ich die Angriffe des genannten Herrn ausführlich zurückgewiesen[1]) und gezeigt hatte, welche sonderbaren Vorstellungen er sich über systematische Beobachtungsfehler gebildet hat, hat es Herr Burnham für gut befunden in No. 120 der Zeitschrift „Astronomy and Astrophysics" nicht nur seine Behauptungen zu wiederholen, sondern dies in einem Tone zu thun, den ich als ganz ungehörig auf das Entschiedenste zurückweisen muss. Auf seine Argumente nochmals einzugehen, dazu liegt auch nicht die mindeste Veranlassung vor, da diese durch meine früheren Aufsätze vollständig widerlegt sind. Ich kann mir aber nicht versagen, Nr. III der zuletzt genannten Burnham'schen Notiz hier abzudrucken, weil die Eigenart ihres Verfassers hierdurch sich von selbst kennzeichnet. „It is evident that Professor Seeliger has had little practical experience in double stars work, or he would not have criticised my remark that the close pair of ε Hydrae could

---

1) Ueber Herrn Burnham's „Invisible Double Stars" und insbesondere über ε Hydrae. Astron. Nachrichten, Band 132.

not possibly affect the measures of *C*. The truth of this statement must be so obvious to every practical astronomer who is accustomed to use the micrometer that it can hardly be considered a debateable question." Ich kann nur mein lebhaftes Bedauern darüber aussprechen, dass ein praktischer Astronom eine so auffallende Unkenntniss der Umstände besitzt, welche systematische Abweichungen nothwendiger Weise erzeugen müssen, und noch mehr muss ich es bedauern, dass er diese Unkenntniss in so überaus anspruchsvoller Form zur Schau trägt. Schon hieraus folgt, dass ein wissenschaftlicher Gewinn aus einer Auseinandersetzung mit Herrn Burnham über die vorliegenden Fragen nicht hervorgehen kann. Ich werde deshalb auch etwaige weitere Bemerkungen dieses Herrn über ζ Cancri und meine Arbeiten, als für die Sache gleichgültig, in Zukunft unberücksichtigt und erneute Angriffe unbeantwortet lassen.



Ueber eine Verallgemeinerung der v. Helmholtz'schen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell-schen Elektrodynamik entspricht.

Von Dr. J. R. Schütz.

(Eingelaufen 2. Juni.)

1. Wir setzen eine unendlich ausgedehnte reibungslose Flüssigkeitsmasse voraus, der wir vorläufig die Beschränkung der Incompressibilität noch nicht auferlegen wollen; wir betrachten vorerst nur solche Gebiete derselben, in welchen die 3 rechtwinkligen Geschwindigkeitscomponenten u_1, v_1, w_1 eindeutige und mit allen ihren Derivirten endliche und stetige Funktionen der 3 rechtwinkligen Raumcoordinaten x, y, z sind. Im Unendlichen soll die Flüssigkeit ruhen.

Ueberall dort, wo die Grössen u_1, v_1, w_1 eine Potentialfunktion Φ_1 (das Geschwindigkeitspotential) besitzen, werden die Gleichungen bestehen

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \qquad 1)$$

Dort wo die Potentialfunktion Φ_1 zu existiren aufhört, werden gewisse Bewegungen auftreten, die v. Helmholtz in seiner Abhandlung „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen etc". Crelle's Journal, Bd. 55, S. 25—55, 1858 unter dem Namen der „Wirbelbewegungen" eingeführt hat.

2. Wirbelpotential nenne ich eine Funktion Φ_2, deren Ableitungen nach den Coordinaten die nach diesen geschätzten Wirbelgeschwindigkeiten geben. Die Wirbelgeschwindigkeiten u_2, v_2, w_2 sind definirt durch die Gleichungen

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right), \quad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\right),$$
$$w_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \qquad 2)$$

Dort wo ein Wirbelpotential existirt, wird sein

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \qquad 3)$$

An allen Stellen aber, wo diese Potentialfunktion zu existiren aufhört, setzen wir

$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right), \quad v_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\right),$$
$$w_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \qquad 4)$$

Die Grössen u_3, v_3, w_3 haben eine einfache und anschauliche physikalische Bedeutung, von der später noch die Rede sein wird; wir wollen sie die „Strömungsgeschwindigkeiten zweiter Ordnung" nennen. Die Grössen u_1, v_1, w_1 sind dann für uns die Strömungsgeschwindigkeiten erster Ordnung.

Es wird Stellen geben können, woselbst die Grössen u_3, v_3, w_3 sich als Ableitungen einer Funktion Φ_3 darstellen lassen. Wir nennen diese Funktion das „Strömungspotential zweiter Ordnung" (Φ_1 ist dann für uns das Strömungspotential erster Ordnung).

An allen diesen Stellen wird sein

$$\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} = \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \qquad 5)$$

Dort wo Φ_3 zu existiren aufhört, setzen wir wieder

$$u_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z}\right), \quad v_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x}\right),$$

$$w_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \qquad 6)$$

Die Grössen u_4, v_4, w_4 nennen wir die Wirbelgeschwindigkeiten zweiter Ordnung und eine etwa existirende Potentialfunktion Φ_4 derselben das „Wirbelpotential zweiter Ordnung". In diesem Sinne sind dann u_2, v_2, w_2, bezw. Φ_2 die Wirbelgeschwindigkeiten bezw. das Wirbelpotential erster Ordnung.

Man sieht schon, wie sich der Faden weiter spinnt. Allgemein zu reden, nennen wir die Grössen u_{2n-1}, v_{2n-1}, w_{2n-1}, Φ_{2n-1} die Strömungsgeschwindigkeiten und das Strömungspotential $n$ter Ordnung und die Grössen u_{2n}, v_{2n}, w_{2n}, Φ_{2n} die Wirbelgeschwindigkeiten und das Wirbelpotential $n$ter Ordnung.

3. Die formale Uebereinstimmung der Differenzialgleichungen 4) und 6) lässt erwarten, dass auch die Integraleigenschaften der Wirbel und Strömungen höherer Ordnung wesentlich übereinstimmen. Es wird sich daher zur Abkürzung empfehlen, dass wir uns für beide zuweilen eines gemeinsamen Namens bedienen, und wir wählen hiefür, nicht ohne die Absicht, an den verwandten Quaternionen-Begriff des curl (vgl. Boltzmann, Vorl. II pag. 3) anzuklingen, den Ausdruck „Quirl".

Demnach nennen wir die Grössen u_k, v_k, w_k die nach den 3 rechtwinkligen Coordinatenaxen geschätzten Quirlgeschwindigkeiten $k$ter Ordnung und Φ_k das Quirlpotential $k$ter Ordnung, und erinnern uns, wenn erforderlich, daran, dass diese Grössen Strömungsgeschwindigkeiten bezw. ein Strömungspotential bedeuten, wenn k ungerade, dagegen Wirbelgeschwindigkeiten bezw. ein Wirbelpotential, wenn k gerade ist.

Man hat für die Quirlgeschwindigkeiten k ter Ordnung die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_{k-1}}{\partial y} - \frac{\partial v_{k-1}}{\partial z}\right) \\ v_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial z} - \frac{\partial w_{k-1}}{\partial x}\right) \\ w_k &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{k-1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{k-1}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

Für den Fall der Existenz eines Quirlpotentials Φ_k ist

$$u_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \quad v_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial y}, \quad w_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \qquad 8)$$

und

$$\frac{\partial w_k}{\partial y} - \frac{\partial v_k}{\partial z} = \frac{\partial u_k}{\partial z} - \frac{\partial w_k}{\partial x} = \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{\partial u_k}{\partial y} = 0 \qquad 9)$$

Es lassen sich über die Wechselbeziehungen der Quirl verschiedener Ordnung zu einander eine grosse Reihe von Sätzen ableiten, von denen wir hier nur solche anführen wollen, die für unsere späteren Entwicklungen von einiger Bedeutung sind.

4. Existirt in einem Bereiche R ein Quirlpotential k ter Ordnung als variable Funktion der Coordinaten, so sind die Quirlpotentiale von höherer Ordnungszahl in demselben Bereiche constante Grössen, Quirlpotentiale von niederer Ordnungszahl aber können in demselben Bereiche nicht existiren. Denn es ist in diesem Bereiche nach Gl. 9)

$$u_{k+1} = v_{k+1} = w_{k+1} = 0, \text{ also } \Phi_{k+1} = \text{const.}$$

und dasselbe gilt natürlich auch von den analogen Grössen noch höherer Ordnungszahl. Der zweite Theil des obigen Satzes ist eine nothwendige Consequenz des ersten Theiles.

Man kann daher aus der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse solche Bereiche R_1 hervorheben, die lediglich ein Quirlpotential erster Ordnung Φ_1 (d. i. ein Geschwindigkeitspotential) besitzen, dann solche Bereiche R_2, die lediglich ein Quirlpotential zweiter Ordnung Φ_2 (d. i. ein Wirbel-

potential 1. Ordnung), dann solche R_3, die lediglich ein Quirlpotential 3. Ordnung (d. i. ein Geschwindigkeitspotential 2. Ordnung) bis zu solchen Bereichen R_k, die lediglich ein Quirlpotential $k$ter Ordnung besitzen. Wir können jetzt den obigen Satz auch so aussprechen:

In einem Bereiche R_k coexistiren nothwendig sämmtliche Arten von Quirlbewegungen, deren Ordnungszahl kleiner ist als k, und es existirt darin keine Quirlbewegung von einer grösseren Ordnungszahl. (Satz I.)

5. Jedes Quirlpotential Φ_k ($k > 1$) genügt der Laplace'schen Differentialgleichung (Satz II). Aus Gl. 7 ergibt sich (für $k > 1$)

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0 \qquad 10)$$

Für den Fall der Existenz einer Potentialfunktion kann diese Gleichung so geschrieben werden

$$\Delta \Phi_k = 0 \qquad 11)$$

Die Gleichung 10) gilt nicht für $k = 1$; nur, wenn die Flüssigkeit incompressibel ist, hat man auch

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \qquad 12)$$

Es müssen daher alle nachfolgenden Sätze, insoweit sie sich auf den Eingangs dieses Artikels angegebenen Satz stützen, entweder unter der beschränkenden Annahme $k > 1$, oder unter der Voraussetzung der Incompressibilität der Flüssigkeit verstanden werden.

6. Es kann nicht ein einziger Bereich R_k die ganze unendliche Flüssigkeitsmasse erfüllen. (Satz III.) Denn man hätte dann eine Funktion Φ_k, welche im ganzen unendlichen Raume der Gleichung $\Delta \Phi_k = 0$ genügte und im Unendlichen, da die Flüssigkeit daselbst als ruhend vorausgesetzt wird, gegen einen constanten Werth C limitirte. Genau so gross

würde daher auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_k auf der Oberfläche einer Kugel sein, die man mit unendlich grossem Radius um einen im Endlichen gelegenen Punkt P beschriebe. Gemäss einem nach Herrn Riemann benannten Satze der Potentialtheorie müsste daher auch im Punkte P, und weil dieser beliebig gewählt wurde, überall im Endlichen $\Phi_k = C$ sein. Nach Satz I müsste demnach die Ordnungszahl des Bereiches R_k kleiner sein als k und sie könnte, da k beliebig ist, nur gleich 1 sein, aber auch dies nur dann, wenn die Flüssigkeit compressibel ist.

7. Es kann nicht ein Bereich R_k einem Bereiche R_m unmittelbar benachbart sein, es sei denn $k = m$. (IV.)

Denn setzen wir etwa willkürlich $m > k$, dann würde nach Satz I das Quirlpotential Φ_k im Bereiche R_k existiren, im Bereiche R_m aber zu existiren aufhören. Dagegen würde das Quirlpotential Φ_m sowohl im Raume R_m als auch im Raume R_k existiren, im letzteren Bereiche aber als Constante. Da die beiden Bereiche einander unmittelbar benachbart sein sollen, so muss ein Theil ihrer Begrenzungsflächen beiden gemeinsam sein. Denkt man sich diesen Theil entfernt, so erhielte man einen grösseren Bereich, in welchem eine Funktion Φ_m existirte, die überall der Laplace'schen Differentialgleichung genügte und in einem endlichen Theile des Bereiches einen constanten Werth C besässe. Wir können dann eine Kugelfläche so construiren, dass deren Mittelpunkt in diesem Bereiche, in welchem $\Phi_m = C$ ist, liegt, und die zum Theil in diesen Bereich selbst fällt, zum Theile aber in eine Region taucht, in der Φ_m grösser (oder kleiner) als C wird. Dann müsste aber auch das arithmetische Mittel der Funktionswerthe von Φ_m auf der Kugeloberfläche grösser (oder kleiner) als C sein, und dies wäre ein Widerspruch gegen den Riemann'schen Satz.

8. Es muss in der bewegten Flüssigkeitsmasse Bereiche, mindestens aber einen geben, innerhalb

deren überhaupt kein Quirlpotential irgend welcher Ordnungszahl existirt. (V.)

Dieser Satz ist eine nothwendige Consequenz der Sätze III und IV. Wir wollen diese Gebiete die „charakteristischen Schichten" nennen; nach Satz IV muss jeder Bereich R_k von einer solchen charakteristischen Schicht vollständig eingehüllt sein. Sie soll im Allgemeinen als von endlicher Dicke vorausgesetzt sein. An Stellen, wo sie unendlich dünn wird, degenerirt sie zu einer wahren Discontinuität; solche und andere Discontinuitäten wollen wir, wie schon Eingangs im Artikel 1 bemerkt ist, von unserer Betrachtung ausschliessen. Wir denken uns hiezu jede derselben einzeln von einer sie ganz umschliessenden, einfach zusammenhängenden Fläche umgeben, die wir passend „Discontinuitätshülle" nennen können. Die Flüssigkeit, die sich ausserhalb dieser Discontinuitätshüllen befindet, ist für uns die „betrachtete Flüssigkeitsmasse".

9. Ein für uns sehr wichtiger Satz ist der folgende: Die Bewegung der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse ist zu irgend einem Zeitmomente überall eindeutig bestimmt, wenn in demselben Zeitmomente die Quirlgeschwindigkeiten irgend einer beliebigen Ordnungszahl n in allen charakteristischen Schichten gegeben sind und gleichzeitig auch die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben ist. (VI.)

Man erhält aus den Gleichungen 7), indem man in denselben die Grössen u_{k-1}, v_{k-1}, w_{k-1} durch die Grössen u_{k-2}, v_{k-2}, w_{k-2} ersetzt, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial x} - \Delta u_{k-2}\right) \\ v_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial y} - \Delta v_{k-2}\right) \\ w_k &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \Theta_{k-2}}{\partial z} - \Delta w_{k-2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad 13)$$

Hiebei ist

$$\Theta_{k-2} = \frac{\partial u_{k-2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k-2}}{\partial y} + \frac{\partial w_{k-2}}{\partial z} \qquad 14)$$

Nach Gleichung 10) verschwindet dieser Ausdruck für $k > 3$; also ist für $k > 1$ und bei incompressibeln Flüssigkeiten auch für $k = 1$

$$u_{k+2} = -\frac{1}{4} \Delta u_k, \quad v_{k+2} = -\frac{1}{4} \Delta v_k, \quad w_{k+2} = -\frac{1}{4} \Delta w_k \qquad 15)$$

Speziell in Bereichen von der Ordnungszahl k ist daher mit Rücksicht auf Satz I

$$\Delta u_{k-1} = 0, \quad \Delta v_{k-1} = 0, \quad \Delta w_{k-1} = 0 \qquad 16)$$

und auch

$$\Delta u_k = 0, \quad \Delta v_k = 0, \quad \Delta w_k = 0 \qquad 17)$$

Wir beweisen nun zunächst folgenden Hilfssatz: Sind in allen Punkten der betrachteten Flüssigkeitsmasse die Quirlgeschwindigkeiten von der Ordnungszahl n, also u_n, v_n, w_n, in einem bestimmten Augenblicke gegeben, und ist gleichzeitig die Bewegung der Flüssigkeit an den Discontinuitätshüllen vorgeschrieben, so sind für denselben Augenblick auch die Quirlgeschwindigkeiten $(n - 1)$ter Ordnung u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1} überall eindeutig bestimmt. (VIa.)

Zunächst ist klar, dass auch überall die Quirlintensitäten $(n + 1)$ter Ordnung, die ja aus jenen $n$ter Ordnung durch eindeutige Differenzation hervorgehen, gegeben sind. Nun ist nach Gleichung 15)

$$\Delta u_{n-1} = -4 u_{n+1}, \; \Delta v_{n-1} = -4 v_{n+1}, \; \Delta w_{n-1} = -4 w_{n+1}; \qquad 18)$$

gäbe es noch 3 andere Funktionen $\mathfrak{u}_{n-1}$, $\mathfrak{v}_{n-1}$, $\mathfrak{w}_{n-1}$, welche denselben Differentialgleichungen

$$\Delta \mathfrak{u}_{n-1} = -4 u_{n+1}, \text{ etc.} \qquad 18a)$$

genügten, so wären $u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1}$, $v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1}$, $w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1}$ drei neue Funktionen, welche — wie sich durch Subtraktion

der Gleichung 18) und 18a) ergibt — in der ganzen betrachteten Flüssigkeit die Laplace'schen Differentialgleichungen befriedigen und an den Discontinuitätshüllen, sowie im Unendlichen verschwinden. Die — zufolge des Dirichlet'schen Principes einzige — Lösung hiefür ist

$$u_{n-1} - \mathfrak{u}_{n-1} = v_{n-1} - \mathfrak{v}_{n-1} = w_{n-1} - \mathfrak{w}_{n-1} = 0.$$

Es sind demnach die Quirlgeschwindigkeiten (n — 1) ter Ordnung und, da sich dieses Beweisverfahren beliebig oft wiederholen lässt, auch jene von beliebig anderer Ordnungszahl, demnach die gesammte Bewegung der Flüssigkeit eindeutig bestimmt.

Sind nun nicht in der ganzen Flüssigkeit, sondern bloss an den charakteristischen Stellen die Grössen u_n', v_n', w_n' gegeben, so lässt sich dieser Fall immer auf den durch den Hilfssatz präcisirten Fall zurückführen. Denn sei etwa R_k derjenige Bereich, der unter allen Bereichen R_1 bis R_k die höchste Ordnungszahl k hat, so bilden wir, wenn $n \leq k$ ist, aus den Grössen u_n', v_n', w_n' durch fortgesetztes Differenziren nach dem Schema der Gleichung 7) die Grössen

$$u_{k+1}', \quad v_{k+1}', \quad w_{k+1}' \tag{19}$$

Da nun die Quirlgeschwindigkeiten $(k + 1)$ ter Ordnung in der ganzen Flüssigkeitsmasse, mit Ausschluss der charakteristischen Schichten, verschwinden, in diesen letzteren aber die gegebenen Werthe 19) haben, so darf man sie in der gesammten Flüssigkeitsmasse als gegeben betrachten.

Ist aber $n > k$, dann sind ohnehin schon die Grössen u_n, v_n, w_n in allen Bereichen R_1 bis R_k gleich Null, also gleichfalls in der gesammten betrachteten Flüssigkeitsmasse gegeben.

10. Ein specieller Fall des vorigen Satzes ist der folgende: Sind in einem Augenblicke die Geschwindigkeiten u_1', v_1', w_1' in allen charakteristischen Schichten sowie an den

Discontinuitätshüllen gegeben, so sind für denselben Augenblick die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 überall eindeutig bestimmt. Es sollen hier die drei letzteren Grössen aus den drei ersteren berechnet werden.

Es sei wieder R_k jener Quirlbereich, der die höchste Ordnungszahl k besitzt. Die auf die Zahl k zunächst folgende ungerade Zahl bezeichnen wir mit $2i+1$; sie ist — unabhängig davon ob k selbst eine gerade oder ungerade Zahl ist — jedenfalls durch die Formel gegeben

$$2i+1 = k + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(-1)^k,$$

woraus folgt

$$i = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^k \qquad 20)$$

Durch i-malige Anwendung der $\varDelta$-Operation auf die gegebenen Funktionen u_1', v_1', w_1' erhält man gemäss Formel 15) — wenn wir uns für die i-malige Anwendung der gedachten Operation des Symboles $\varDelta^i$ bedienen —

$$\varDelta^i u_1' = (-4)^i u_{2i+1}', \quad \varDelta^i v_1' = (-4)^i v_{2i+1}', \quad \varDelta^i w_1' = (-4)^i w_{2i+1}' \qquad 21)$$

Ganz ebenso würde man durch i-malige Anwendung der $\varDelta$-Operation auf die zu suchenden Funktionen u_1, v_1, w_1 erhalten

$$\varDelta^i u_1 = (-4)^i u_{2i+1} \text{ etc.} \qquad 21\text{a})$$

Nun sind aber die Grössen u_{2i+1}' und u_{2i+1} nicht nur in den charakteristischen Schichten, sondern auch in allen Quirlbereichen R_1 bis R_k einander gleich, weil sie daselbst — wegen $2i+1 > k$ — überall verschwinden. Also erhält man die Differentialgleichungen

$$\varDelta^i u_1 = \varDelta^i v_1', \quad \varDelta^i v_1 = \varDelta^i v_1', \quad \varDelta^i w_1 = \varDelta^i w_1' \qquad 22)$$

Die vollständigen Integrale dieser Differentialgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots\\
&\quad\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\varDelta^i u_1' + \frac{d}{dx}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}},\\
v_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots\\
&\quad\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\varDelta^i v_1' + \frac{d}{dy}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}},\\
w_1 &= \frac{1}{(-4\pi)^i}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_i\,dy_i\,dz_i}{r_i}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_{i-1}\,dy_{i-1}\,dz_{i-1}}{r_{i-1,i}}\cdots\\
&\quad\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_2\,dy_2\,dz_2}{r_{2,3}}\int\!\!\int\!\!\int\frac{dx_1\,dy_1\,dz_1}{r_{1,2}}\varDelta^i w_1' + \frac{d}{dz}\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}.
\end{aligned}\right\}\quad 23)$$

Hiebei ist

$$\left.\begin{aligned}
r_{1,2} &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\
&\;\vdots\\
r_{i-1,i} &= \sqrt{(x_{i-1}-x_i)^2+(y_{i-1}-y_i)^2+(z_{i-1}-z_i)^2}\\
r_i &= \sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2}\\
\text{und}\quad r_{ds} &= \sqrt{(x_{ds}-x)^2+(y_{ds}-y)^2+(z_{ds}-z)^2}
\end{aligned}\right\}\quad 24)$$

Alle dreifachen Integrale sind über die gesammte betrachtete Flüssigkeitsmasse zu erstrecken, das einfache Integral $\int\frac{G\,d\sigma}{r_{ds}}$ aber über die Oberfläche derselben, sowie über alle Discontinuitätshüllen.

G ist eine willkürliche Funktion, die so bestimmt werden muss, dass die Auswerthung der Gesammtintegrale für alle Punkte dieser Oberflächen die an denselben vorgeschriebenen Werthe von u_1, v_1, w_1 ergibt.

v. Helmholtz hat in seiner Eingangs erwähnten Abhandlung über die Wirbelbewegung eine interessante Analogie entwickelt, die zwischen dieser Art hydrodynamischer

Bewegung und den elektrodynamischen Erscheinungen besteht. Die Gleichungen 23) lehren, dass man eine unendliche Mannigfaltigkeit solcher Analogieen angeben kann. Bevor wir auf dieselben mit einigen Worten eingehen, wollen wir noch den Begriff der „Wirbellinie" verallgemeinern.

11. Wir verstehen unter einer „Quirllinie $k$ter Ordnung" eine Curve, welche der Differentialgleichung genügt

$$dx : dy : dz = u_k : v_k : w_k, \tag{25}$$

und unter einem „Quirlfaden" einen unendlich dünnen Faden, welcher aus der Flüssigkeit ausgeschnitten wird, wenn man durch alle Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche die Quirllinien zieht. Auch erinnern wir uns wieder, dass wir es mit Stromlinien, bezw. -Fäden zu thun haben, wenn k ungerade ist, dagegen mit Wirbellinien bezw. -Fäden, wenn k gerade ist.

Durch Anwendung des Green'schen Satzes auf die Gleichung 10) erhalten wir

$$\int \nu_k \, dq = 0 \tag{26}$$

Hiebei bezeichnet ν_k die normal zum Oberflächenelemente dq geschätzte Componente der Quirlgeschwindigkeit $k$ter Ordnung. Wir nennen die Gleichung 26) die allgemeine Continuitätsgleichung der Quirlbewegungen; sie lehrt, dass kein Quirlfaden beliebiger Ordnungszahl inmitten der Flüssigkeit enden kann und dass für einen und denselben Quirlfaden das Produkt aus seinem Querschnitt und der Quirlgeschwindigkeit

$$\nu_k \cdot dq = i_k = \text{constans} \tag{27}$$

für seine ganze Erstreckung einen constanten Werth behalten muss.

12. Um uns nun die erwähnte unendliche Mannigfaltigkeit der elektrodynamischen Analogieen an einem Beispiele

zu versinnlichen, wollen wir annehmen, es sei ein aus der betrachteten Flüssigkeitsmasse herausgetheilter zweifach zusammenhängender Raum mit lauter Quirlfäden $k$ter Ordnung so erfüllt, dass er einen Quirlbereich R_k (im Sinne des Artikels 4) darstelle. Gemäss Artikel 7 und 8 muss dieser Quirlbereich zunächst von einer charakteristischen Schicht S umgeben sein, von welcher wir annehmen wollen, dass ihre Dicke sehr klein gegenüber den Dimensionen des Bereiches R_k ist. Die ganze übrige betrachtete Flüssigkeitsmasse soll ein Bereich R_{k-1} von der nächstniederen Ordnungszahl sein. Bezeichnen wieder u_k, v_k, w_k die Quirlgeschwindigkeiten im Bereiche R_k und u_k', v_k', w_k' dieselben Grössen in der charakteristischen Schicht, so ist für alle Punkte der betrachteten Flüssigkeitsmasse (die wir zur Vereinfachung so gross voraussetzen wollen, dass wir die Randbedingungen vernachlässigen können)

$$u_{k-2} = \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k\,dx\,dy\,dz}{r} + \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k'\,dx\,dy\,dz}{r}$$

Das erste Integral ist über den Bereich R_k zu erstrecken, das zweite über die charakteristische Schicht S. Wir wollen annehmen, dass letztere so dünn ist, dass der Beitrag, den das zweite Integral liefert, gegenüber dem des ersten verschwindet. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} u_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{u_k\,dx\,dy\,dz}{r} \\ v_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{v_k\,dx\,dy\,dz}{r} \\ w_{k-2} &= \frac{1}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int \frac{w_k\,dx\,dy\,dz}{r} \end{aligned}\right\} \quad 28)$$

Wir führen nun statt des Volumelements $dx\,dy\,dz$ das Produkt $dq \cdot ds$ ein, d. i. jenes Volum, welches ein Längenelement ds des Quirlfadens vom Querschnitte dq besitzt. Ferner setzen wir

$$u_k = \nu_k \cdot \alpha, \quad v_k = \nu_k \cdot \beta, \quad w_k = \nu_k \cdot \gamma,$$

wobei ν_k die resultirende Quirlgeschwindigkeit und α, β, γ die Richtungscosinus des ds sind.

Berücksichtigen wir endlich noch, dass das Produkt $\nu_k \cdot dq$ für die ganze Erstreckung des Wirbelfadens einen constanten Werth i_k besitzt (Gleichung 27), so lauten die Gleichungen 28) jetzt

$$u_{k-2} = \int i_k ds \cdot \alpha \frac{1}{r}, \quad v_{k-2} = \int i_k ds \cdot \beta \frac{1}{r}, \quad w_{k-2} = \int i_k ds \cdot \gamma \frac{1}{r}$$

Hieraus erhalten wir für u_{k-1}

$$u_{k-1} = \int i_k ds \left[\gamma \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - \beta \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right]$$

oder, wenn φ, χ, ψ die Richtungscosinus der Geraden r bezeichnen,

$$u_{k-1} = -\int i_k \frac{ds}{r^2} [\gamma \chi - \beta \psi]$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist gleich dem Produkte $\sin(ds, r) \cdot \cos(n, x)$, wo n die auf ds und r senkrecht stehende Richtung ist; also ist

$$u_{k-1} = \int \frac{i_k \, ds \cdot \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, x), \quad \text{und analog}$$

$$v_{k-1} = \int \frac{i_k \, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, y),$$

$$w_{k-1} = \int \frac{i_k \, ds \sin(ds, r)}{r^2} \cos(n, z).$$

Man kann diese Formeln so aussprechen: Jedes Element ds eines Quirlfadens von der Ordnungszahl k bedingt in jedem Theilchen der Flüssigkeitsmasse eine Quirlgeschwindigkeit von der Ordnungszahl $(k-1)$, deren Grösse gleich dem Ausdrucke

$$\frac{i_k\, ds \sin(ds, r)}{r^2} \tag{29)}$$

ist, und deren Richtung n senkrecht zu jener Ebene steht, die durch das Fadenelement ds und das betrachtete Flüssigkeitstheilchen bestimmt ist.

13. Es besteht also zwischen den Quirllinien $k$ter und $(k-1)$ter Ordnung genau dieselbe Wechselbeziehung, die auch zwischen den elektrischen Stromlinien und den magnetischen Kraftlinien statt hat. (Vgl. hiezu Boltzmann, Vorlesungen I pag. 90.) Wäre etwa der Bereich R_k ein metallischer Leiter, innerhalb dessen das Strompotential Φ_k bestünde, so würde die hiedurch bedingte elektrische Strömung im Aussenraum eine Vertheilung der magnetischen Kraftlinien hervorrufen, die sich der Grösse und Richtung nach vollkommen mit der Vertheilung der Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung im Bereiche R_{k-1} decken würde.

Es entspricht diese Analogie genau jener, welche v. Helmholtz a. a. O. abgeleitet hat und welche man hier erhält, wenn man $k = 2$ setzt. Für $k = 3$ erhält man das hydrodynamische Bild, welches Boltzmann in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie[1]) 1892 pag. 279 zur Maxwell'schen Elektrodynamik in Analogie gesetzt hat. Mit Bezug auf diese letztere Abhandlung, welche diese Analogie insbesonders auch für quasielastische Media mechanisch ausbaut, sei hier die übrigens selbstverständliche Bemerkung gemacht, dass unsere bisherigen Betrachtungen, da sie ja rein geometrischer Natur sind und desshalb jedweder physikalischen Voraussetzung entbehren können, natürlich auf jedes beliebige continuirliche Medium anwendbar sind.

14. Wir wollen aber sogleich eine andere wesentlich mechanische Analogie ableiten, welche die verwandtschaft-

---

1) Abgedruckt in Wiedemann's Annalen, Bd. 48 pag. 78.

lichen Beziehungen zwischen den allgemeinen Quirlbewegungen und den elektrodynamischen Phänomenen sehr enge knüpft.

Wir gehen dabei von den Integralen der Gleichung 23) aus; doch machen wir auch hier wieder die vereinfachende Annahme, dass die betrachtete Flüssigkeitsmasse so gross ist, dass wir die Oberflächenbedingungen vernachlässigen dürfen, sowie dass die charakteristischen Schichten im Vergleiche zu den Dimensionen der von ihnen umhüllten Quirlbereiche so dünn sind, dass ihre Beiträge in die Bewegung der betrachteten Flüssigkeitsmasse verschwindend klein sind. Wir behandeln den Fall, dass in der Flüssigkeit neben Quirlbereichen beliebig anderer Ordnungszahlen sich zwei Quirlbereiche R_k und R'_k von der Ordnungszahl k vorfinden, und es sei k die grösste unter den vorhandenen Ordnungszahlen. Φ_k und Φ'_k seien die Quirlpotentiale in diesen Bereichen, ν_k und ν'_k die Quirlgeschwindigkeiten in denselben und u_k, v_k, w_k, beziehlich u'_k, v'_k, w'_k deren Componenten.

Hier haben wir nun zum erstenmale zwischen den Strömungen und den Wirbeln höherer Ordnung zu unterscheiden. Wir wollen vorerst den einfacheren Fall betrachten und annehmen, es sei k eine ungerade Zahl $2i + 1$. Wir haben es also mit Strömungen zu thun.

Es seien u_1, v_1, w_1 die Geschwindigkeiten, welche irgend ein Flüssigkeitstheilchen $(dx \cdot dy \cdot dz)$ haben würde, wenn bloss der eine Quirlbereich R_k, und u'_1, v'_1, w'_1, jene, wenn bloss der zweite Quirlbereich R'_k vorhanden wäre. Die Geschwindigkeiten, die dasselbe Flüssigkeitstheilchen bei der Coexistenz beider Quirlbereiche R_k und R'_k hat, sind dann wegen der Linearität der Gleichungen 21a)

$$u_1 + u'_1,\ v_1 + v'_1,\ w_1 + w'_1 \qquad 30)$$

Es ist noch wichtig, zu bemerken, dass die Grössen u_k, v_k, w_k bei gegebener Configuration der Systeme vollkommen unabhängig von den Grössen u'_k, v'_k, w'_k sind, so dass,

wenn z. B. bloss der eine Quirlbereich R'_k existiren würde, an den Stellen, wo sich der von diesen weggedachte Quirlbereich R_k befindet, die Grössen u_k, v_k, w_k sämmtlich gleich Null wären, und umgekehrt.

15. Unter all den Voraussetzungen des vorhergehenden Artikels erhalten wir für u_1 in Anlehnung an Gleichung 23) das Integral

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int\int\int \frac{dx_i\, dy_i\, dz_i}{r_i} \cdots\cdots \int\int\int \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int\int\int \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\, u_k}{r_{1,2}} \qquad 31)$$

Um das letzte dreifache Integral in ein Linienintegral zu verwandeln, zerlegen wir den Quirlbereich R_k, der allenfalls die Form eines Ringes hat, durch einander unendlich nah geführte Querschnitte in unendlich viele Cylinder von unendlich kleiner Höhe ds. Diese Querschnitte q sollen so geführt werden, dass sie zur resultirenden Geschwindigkeit ν_k überall normal stehen. Ausserdem zertheilen wir das ganze Bündel von Quirlfäden, welches die charakteristische Schicht erfüllt, in N unendlich dünne Quirlfäden so, dass das Produkt aus dem Querschnitt dq eines Fadens in dessen Quirlgeschwindigkeit ν_k gleich einer für alle Fäden constanten Grösse p_k ist

$$d\,q \cdot \nu_k = p_k = \text{constans}.$$

Dann kann man setzen

$$\int\int\int \frac{dx_1\, dy_1\, dz_1\;\, u_k}{r_{1,2}} = p_k \int \frac{ds \cos(ds, x}{r}$$

und es lautet die Gleichung 30):

$$u_1 = p_k \int\int\int \frac{1}{\pi^i} \frac{dx_i\, dy_i\, dx_i}{r_i} \cdots\cdots \int\int\int \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int \frac{ds, \cos(ds, x)}{r} \qquad 32)$$

Das letzte einfache Integral ist über alle Quirlfäden einzeln zu erstrecken. Nimmt man an, dass alle Quirlfäden nahezu parallel laufen und dass überdies der gesammte Querschnitt des Quirlbereichs klein ist, dann darf man $N = 1$ setzen, und es braucht das Integral bloss über einen einzigen Stromfaden erstreckt werden. p_k können wir dann passend die Quirlintensität des Bereiches R_k nennen.

Zur Abkürzung bezeichnen wir noch das gesammte vielfache Integral der Gleichung 32) mit J_x, so dass

$$u_1 = p_k \cdot J_x, \quad v_1 = p_k \cdot J_y, \quad w_1 = p_k \cdot J_z \qquad 33)$$

ist, wo J_y und J_z analog zu J_x zu bilden sind.

Ganz ebenso erhält man für die vom zweiten Quirlbereich R'_k bedingten Geschwindigkeiten u'_1, v'_1, w'_1 unseres Flüssigkeitstheilchens die Werthe

$$u'_1 = p'_k J'_x, \quad v'_1 = p'_k J'_y, \quad w'_1 = p'_k J'_z \qquad 34)$$

16. Mit Rücksicht auf 30, 33 und 34 erhält man für die gesammte kinetische Energie T der betrachteten Flüssigkeitsmasse den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2} p_k^2 \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ + \frac{1}{2} p_k'^2 \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ + p_k p'_k \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x J'_x + J_y J'_y + J_z J'_z) \end{aligned} \qquad 35)$$

ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit.

Wir bezeichnen das erste Integral mit $A_{(h_1, h_2, h_3)}$, das zweite mit $B_{(h_4, h_5, h_6)}$ und das dritte mit $C_{(h_7, h_8, h_9)}$, so dass

$$T = \frac{A_{(h_1, h_2, h_3)}}{2} p_k^2 + \frac{B_{(h_4, h_5, h_6)}}{2} p_k'^2 + C_{(h_7, h_8, h_9)} p_k p'_k \qquad 36)$$

und es seien h_1, h_2, h_3 drei Coordinaten (Parameter), welche die geometrische Configuration des Quirlbereiches R_k bezogen auf seinen Schwerpunkt bestimmen, h_4, h_5, h_6 die analogen

Parameter für den zweiten Quirlbereich und h_7, h_8, h_9 die Parameter, welche die relative Configuration der beiden Bereiche zu einander bestimmen.

Wir wollen annehmen, dass alle diese Configurationen im Raume sich mit Geschwindigkeiten ändern, die klein gegen die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen sind. Dann liefert die Lagrange'sche Gleichung für die Kräfte P_k, P'_k und H_i, welche beziehlich die cyclischen Coordinaten p_k, p'_k und den beliebig gewählten Parameter h_i zu beschleunigen streben, die Werthe

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{d}{dt}\left(A_{(h_1, h_2, h_3)}\, p_k + C_{(h_7, h_8, h_9)}\, p'_k\right) \\ P'_k &= \frac{d}{dt}\left(C_{(h_7, h_8, h_9)}\, p_k + B_{(h_4, h_5, h_6)}\, p'_k\right) \\ H_i &= -\frac{p_k^2}{2}\frac{\partial A_{(h_1, h_2, h_3)}}{\partial h_i} - \frac{p_k'^2}{2}\frac{\partial B_{(h_4, h_5, h_6)}}{\partial h_i} - p_k p'_k \frac{\partial C_{(h_7, h_8, h_9)}}{\partial h_i} \end{aligned}\right\} \quad 37)$$

17. Gleichungen von ganz derselben Form erhält man auch, wenn man annimmt, dass die Ordnungszahl k gerade ist, in welchem Falle man es mit Wirbeln höherer Ordnung zu thun hat. Doch haben dann die Parameterfunktionen A, B, C eine etwas andere Bedeutung, von der sogleich die Rede sein wird. Vergleicht man die Gleichungen 37) mit den Gleichungen 12) in Boltzmann's Vorlesungen über Maxwell's Theorie I, pag. 24, so sieht man, dass zwei Quirlbereiche gleicher, im Uebrigen aber beliebiger Ordnungszahl ganz analoge ponderomotorische und Inductionswirkungen auf einander ausüben, wie elektrische Ströme. Dieses Resultat ist an sich so wenig wunderbar, dass es sogar als ganz selbstverständliches Postulat der Maxwell'schen Theorie erscheint, wenn wir diese in der Allgemeinheit auffassen, in der sie in den wiederholt citirten „Vorlesungen" dargestellt worden ist.

18. Es besteht aber in Bezug auf den Richtungssinn, in welchem diese ponderomotorischen und Induktionswirkungen erfolgen, eine bemerkenswerthe Differenzirung zwischen den Quirlbewegungen von gerader und jenen von ungerader Ordnungszahl. Man gelangt zu derselben durch eine Discussion der Parameterfunktionen A, B, C. Wir wollen diese oben mit dem Index s versehen, wenn sie sich auf Quirlbereiche mit ungerader Ordnungszahl (Strömungen) beziehen, dagegen mit dem Index w, wenn sie sich auf solche mit gerader Ordnungszahl (Wirbeln) beziehen. Nach den Festsetzungen der Artikel 15 und 16 haben die A^s, B^s, C^s folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} A^s &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2) \\ B^s &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x'^2 + J_y'^2 + J_z'^2) \\ C^s &= \int\!\!\int\!\!\int \varrho\, dx\, dy\, dz\, (J_x J_x' + J_y J_y' + J_z J_z') \end{aligned}\right\} \quad 38)$$

Hiebei hat J_x den Werth

$$\begin{aligned} J_x = \int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{\pi^i} \frac{dx_i\, dy_i\, dz_i}{r_i} \cdots\cdots \\ \int\!\!\int\!\!\int \frac{dx_2\, dy_2\, dz_2}{r_{2,3}} \int \frac{ds \cos(ds, x)}{r} \end{aligned} \quad 39)$$

Die Grössen J_y und J_z erhält man, wenn man im letzten einfachen Integral statt $\cos(ds, x)$ beziehlich $\cos(ds, y)$ und $\cos(ds, z)$ setzt, und die Grössen J_x', J_y', J_z' erhält man, wenn man das einfache Integral beziehlich über alle Quirlfäden im Bereiche R_k' erstreckt. Der Index i hat den Zahlenwerth $\frac{k-1}{2}$.

Für die Parameterfunktionen A^w, B^w, C^w aber erhält man folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
A^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \Big[\Big(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\Big)^2 \\
&\quad + \Big(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\Big)^2\Big] \\
B^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \Big[\Big(\frac{\partial J_z'}{\partial y} - \frac{\partial J_y'}{\partial z}\Big)^2 \\
&\quad + \Big(\frac{\partial J_x'}{\partial z} - \frac{\partial J_z'}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial J_y'}{\partial x} - \frac{\partial J_x'}{\partial y}\Big)^2\Big] \\
C^w &= \int\int\int \varrho\, dx\, dy\, dz \Big[\Big(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial J_z'}{\partial y} - \frac{\partial J_y'}{\partial z}\Big) \\
&+ \Big(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial J_x'}{\partial z} - \frac{\partial J_z'}{\partial x}\Big) + \Big(\frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial J_y'}{\partial x} - \frac{\partial J_x'}{\partial y}\Big)\Big]
\end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Die Grössen J_x, J_y, J_z, J_x', J_y', J_z' haben auch hier noch die in Gleichung 39) gegebene Bedeutung; doch ist hier $i = \frac{k}{2}$ zu setzen.

19. Wir wollen die Grössen A, B die Selbstinductionscoefficienten der beiden Quirlbereiche und die Grösse C den wechselseitigen Inductionscoefficienten derselben nennen. Man kann dann die Inductionsgesetze so aussprechen, dass sie allgemein für beliebige Quirlfäden gerader und ungerader Ordnungszahl gelten. Man sagt dann z. B.: „Wird die relative geometrische Configuration der beiden Quirlfäden so geändert, dass dadurch der wechselseitige Inductionscoefficient vergrössert wird, so erregen die Quirlfäden in einander Quirlbewegungen, welche den erregenden entgegengesetzt gerichtet sind." Aehnliches gilt für das Gesetz der ponderomotorischen Kräfte. Würde man aber diese Sätze speziell so aussprechen: „Nähert man zwei geradlinige parallele Quirlfäden, so erregen sie in einander etc." oder „zwei geradlinige parallele und gleichgerichtete Quirlfäden ziehen einander an", so wären sie in dieser Form nur für Quirlfäden

mit ungerader Ordnungszahl unbedingt zutreffend; überhaupt gebührt den letzteren auch noch in anderer Hinsicht der Vorzug, wenn man sich darüber entscheiden will, welche Art der Quirlbewegungen man den elektrischen Strömen zuordnen soll; auf einen hieher gehörigen Punkt hat schon Boltzmann[1]) aufmerksam gemacht; man kann die daselbst angewandte Betrachtungsweise leicht auf die Quirl jeder beliebigen geraden Ordnungszahl verallgemeinern. Aber gerade die Discussion der Parameterfunktionen A^s, B^s, C^s und A^w, B^w, C^w liesse sogar auch noch unter den Quirlbewegungen ungerader Ordnungszahl eine spezielle Vorzugswahl treffen. Die letzten Consequenzen, zu denen man dann gelangen würde, kann man aber auch noch auf einem anderen direkteren Wege erreichen. In einer Abhandlung über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für rasch veränderliche Parameter, welche gleichzeitig mit der vorliegenden an anderer Stelle zum Drucke gelangt, findet sich einiges hierüber.

20. Hier sei noch folgendes bemerkt: Unsere Analogieen bleiben auch dann noch bestehen, wenn wir unter u_1, v_1, w_1, nicht die Geschwindigkeiten eines Mediumtheilchens, sondern die einfachen Verschiebungen eines solchen, unter u_k, v_k, w_k aber Grössen verstehen, welche aus jenen durch k malige Anwendung der Curl-Operation hervorgehen, nur bedarf es hiezu der Annahme, dass die durch diese Verschiebungen in das Medium gespeicherte (hier potentielle) Energie wiederum dem Ausdrucke $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ proportional ist. Auch sei besonders noch betont, dass alle unsere Aussagen ihren physikalischen Sinn in voller Strenge nur dann bewahren, wenn wir uns vorstellen, dass alle inneren Kräfte des Mediums stets durch willkürlich hinzugefügte langsam veränderliche äussere Kräfte paralysirt werden.

Es mögen hier noch 2 Sätze Platz finden, welche wir

---

1) Wiedem. Ann. Bd. 48, 1893, p. 95.

als die mechanischen Bilder der beiden Hertz'schen Gleichungssysteme betrachten können:

a) Sind die Quirllinien $(k+1)$ter Ordnung elektrische Stromlinien, so sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „zweiten" Hertz'schen Gleichungssystems.)

b) Sind die Quirllinien $k$ter Ordnung magnetische Stromlinien, so sind die Quirllinien $(k-1)$ter Ordnung elektrische Kraftlinien. (Mechanisches Bild des „ersten" Hertzschen Gleichungssystems.)

Der Begriff des magnetischen Stromes ist dabei natürlich nicht im vulgären elektrotechnischen Sinne zu verstehen, sondern in jener Auffassung, in welcher er zuerst wohl von Hertz (1884) gebraucht und später vornehmlich von Heaviside in die Theorie eingebürgert worden ist.

Der Satz a) gilt — sofern man der Ampère'schen Ansicht vom Wesen des Magnetismus beipflichtet — immer auch umgekehrt, der Satz b) dies aber nur dann, wenn das elektromagnetische Feld frei von elektrostatischer Ladung ist.

Die beiden Sätze a) und b) umfassen — im wohlverstandenen bildlich-mechanischen Sinne — das gesammte Lehrgebäude der Maxwell'schen Theorie der Elektrodynamik des freien Aethers.

München, mathem.-physik. Institut d. Universität.

Sitzung vom 7. Juli 1894.

1. Herr Gustav Bauer hält einen Vortrag: „Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome".

2. Herr Gustav Bauer legt eine Abhandlung des Privatdozenten Dr. Ludwig Maurer in Strassburg: „zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen" vor.

3. Herr Ad. v. Baeyer theilt die Resultate seiner neueren Untersuchungen „über das Kümmelöl" mit. Dieselben werden an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen.

Von L. Maurer in Strassburg.

(Eingelaufen 7. Juli.)

Die folgende Untersuchung schliesst sich an die Abhandlung von mir an, die der Akademie im Jahre 1888 vorgelegen ist.[1]) Es sei gestattet zunächst in Kürze an den Inhalt derselben zu erinnern.

Den Ausgangspunkt bildet die Aufgabe, die umfassendste continuirliche Gruppe linearer homogener Substitutionen zu bestimmen, die eine rationale und homogene Function f der Variabeln $x_1\ x_2 \ldots x_n$ in sich selbst transformirt. Ist diese Gruppe gerade m-gliedrig, so genügt f einem System von m Differentialgleichungen der Form

$$(\gamma) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = C_i(f) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

Diese Differentialgleichungen sind von einander linear unabhängig, d. h. ihre Coefficienten genügen keiner Relation der Form

$$q_1\, c_{\lambda\mu}^{(1)} + q_2\, c_{\lambda\mu}^{(2)} \ldots + q_m\, c_{\lambda\mu}^{(m)} = 0 \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Damit ist nicht ausgeschlossen, dass nicht eine der Differentialgleichungen (γ) eine Folge der übrigen ist.

---

1) Ueber allgemeinere Invariantensysteme. Ich citire diese Abhandlung im Folgenden kurz mit Inv.

Die Coefficienten der Differentialgleichungen (γ) genügen Gleichungen der Form

$$(J) \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)} c_{\nu\mu}^{(i)} \right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} c_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \qquad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Man kann dieselben auch in der symbolischen Form

$$C_i C_k(f) - C_k C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} C_j(f)$$

darstellen.

Die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe, die f in sich selbst transformirt, sind als Funktionen von m Parametern $u_1\, u_2 \ldots u_m$ definirt durch die Differentialgleichungen

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}^{(j)}\, P_j^{(i)} \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

und die Anfangsbedingung, dass einem bestimmten Werthsystem der Parameter — den Anfangswerthen — die identische Substitution entspricht.

Die m^2 Funktionen $P_j^{(i)}$ der Parameter unterliegen der Bedingung, dass ihre Determinante nicht identisch verschwindet und dass sie insbesondere nicht für die Anfangswerthe der Parameter gleich Null ist.

Die angegebenen Bedingungen reichen — wie aus der allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — aus, damit das m-fach unendliche Substitutionensystem

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

eine Gruppe bildet. Damit aber diese Gruppe die umfassendste Gruppe ist, die eine rationale Funktion in sich selbst transformirt, müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein.

Die Aufstellung dieser Bedingungen führt zu einer Eintheilung der „infinitesimalen Transformationen“ der Form

$$C(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu$$

in verschiedene Arten.

Nehmen wir an, die zu $C(f)$ gehörige charakteristische Determinante

$$\varDelta(p) = | c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p |^{1)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2 \,.\,. \, n$$

verschwinde nur für $p = 0$, dann bezeichne ich $C(f)$ als regulär von der ersten Art.

Nehmen wir zweitens an, $\varDelta(p)$ verschwinde nur für ganzzahlige Werthe von p und es verschwinden für eine h-fache Wurzel auch alle Unterdeterminanten $n - h + 1$. Grades des Systems

$$| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} p |$$

dann bezeichne ich $C(f)$ als regulär von der zweiten Art. In allen anderen Fällen heisst $C(f)$ irregulär. Diese Bezeichnungen werden auch auf das Coefficientensystem $c_{\lambda\mu}$ angewandt. Ist $C(f)$ irregulär, so kann man immer eine Anzahl regulärer infinitesimaler Transformationen

$$K(f) \quad K_1(f) \quad K_2(f) \,.\,. \quad K_\beta(f)$$

derart bestimmen[2]) dass

$$C(f) = K(f) + \varrho_1 K_1(f) + \varrho_2 K_2(f) \,.\,. + \varrho_\beta K_\beta(f)$$

Von diesen inf. Transformationen ist die erste von der ersten Art, alle übrigen sind von der zweiten Art.

---

1) Das Symbol $\binom{\lambda}{\mu}$ hat den Werth 1 oder 0, je nachdem λ und μ gleich oder ungleich sind.

2) Inv. S. 123.

Die Zerlegung von $C(f)$ in reguläre inf. Transformationen ist im wesentlichen vollkommen bestimmt, d. h. eine Unbestimmtheit tritt nur insoferne ein, als eine jede der inf. Transformationen $K_1(f)$ $K_2(f)$ .. $K_\beta(f)$ durch einen Ausdruck der Form

$$\alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_\beta K_\beta(f)$$

mit ganzzahligen Coefficienten $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ ersetzt werden kann.

Die oben erwähnten weiteren Bedingungen, denen unsere Gruppe genügen muss, lauten nun:

Kommt unter den inf. Transformationen der Gruppe eine irreguläre Transformation $C(f)$ vor, so gehören der Gruppe auch alle die regulären Transformationen $K(f)$ $K_1(f)$ .. $K_\beta(f)$ an, in die $C(f)$ zerlegt werden kann.

Daraus folgt sofort:

Unsere m-gliedrige Gruppe enthält m linear unabhängige reguläre inf. Transformationen.

Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so kann man die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ als rationale Funktionen von m Parametern $u_1 u_2 \ldots u_m$ darstellen und daraus folgt dann die Existenz rationaler Funktionen — der Invarianten der Gruppe — die durch die Gruppe in sich selbst transformirt werden.

Zu dieser rationalen Darstellung der Substitutionscoefficienten gelangt man auf folgende Art:

Man wähle m linear unabhängige inf. Transformationen $C_1(f)$ $C_2(f)$ .. $C_m(f)$ der Art aus, dass eine jede derselben regulär ist.

Die infinitesimale Transformation $C_i(f)$ „erzeugt" eine eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$. Ist die inf. Transformation $C_i(f)$ von der ersten Art, so sind die Coefficienten $b^{(i)}_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe $B_i(u_i)$ durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d\,b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\,u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\,c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda,\mu = 1,2,\ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 0$ bestimmt. Die Grössen $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ sind in diesem Fall ganze Funktionen von u_i.

Ist dagegen die inf. Transformation $C_i(f)$ von der zweiten Art, so sind die Substitutionscoefficienten $b_{\lambda\mu}^{(i)}$ durch die Differentialgleichungen

$$u_i\,\frac{d\,b_{\lambda\mu}^{(i)}}{d\,u_i} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\lambda\nu}^{(i)}\,c_{\nu\mu}^{(i)} \qquad \lambda,\mu = 1,2,\ldots n$$

und die Anfangsbedingung $b_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu}$ für $u_i = 1$ bestimmt. In diesem Fall sind die Substitutionscoefficienten wenigstens rationale Funktionen des Parameters u_i.

Setzt man nun die m eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ zu einer m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1\,u_2\ldots u_m) = B_1(u_1)\,B_2(u_2)\ldots B_m(u_m)$$

zusammen, so ist klar, dass die Coefficienten der allgemeinen Substitution dieser Gruppe A sich als rationale Funktionen der m Parameter $u_1\,u_2\ldots u_m$ ergeben, und zwar gilt dies, wie auch immer die m inf. Transformationen $C_i(f)$ im übrigen gewählt sein mögen, wenn nur eine jede derselben regulär ist.

Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe A

$$z_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((v))\,y_\mu \qquad y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\,x_\mu \qquad \lambda = 1,2,\ldots n$$

zusammen, so erhält man dem Gruppenbegriff gemäss wieder eine Substitution der Gruppe.

Es muss also möglich sein m Funktionen $w_1\,w_2\ldots w_m$ der Grössen $u_1\,u_2\ldots u_m$; $v_1\,v_2\ldots v_m$ der Art zu bestimmen, dass

$$a_{\lambda\mu}((w)) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}((v))\, a_{\nu\mu}((u)) \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Die Grössen w sind im allgemeinen algebraische Funktionen der Grössen u und v, weil ja die Substitutionscoefficienten rationale Funktionen der Parameter sind. Aber es gilt der Satz:

Man kann die m inf. Transformationen $C_i(f)$, von deren Wahl die Wahl des Parametersystems abhängig gemacht worden ist, so wählen, dass die Grössen w rationale Funktionen der Grössen u und v werden.

Der Satz ist für die allgemeine Theorie der continuirlichen Gruppen insofern von Bedeutung, als er für eine sehr ausgedehnte Classe von Gruppentypen die Existenz einfach transitiver rationaler Gruppen nachweist. Es ist aber auch vom invariantentheoretischen Gesichtspunkt von Interesse, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll.

Im Folgenden erlaube ich mir einen Beweis dieses Satzes vorzulegen.

Der Beweis wird in der Weise geführt, dass nachgewiesen wird: bei passender Wahl der inf. Transformationen $C_i(f)$ ergeben sich nicht nur die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe als rationale Funktionen der Parameter, sondern es sind auch umgekehrt die Parameter rational durch die Substitutionscoefficienten bestimmt. Ist dies bewiesen, so ist klar, dass von den vorhin besprochenen drei Grössensystemen u; v; w ein jedes durch die beiden anderen rational bestimmt ist.

Für den Beweis ist es zweckmässig die hier in Betracht kommenden Gruppen in drei Classen einzutheilen. In die erste Classe rechnen wir die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der ersten Art sind; in die zweite Classe die Gruppen, deren inf. Transformationen sämmtlich regulär von der zweiten Art sind; in die dritte

Classe endlich die Gruppen, die sowohl reguläre inf. Transformationen erster Art als auch solche zweiter Art enthalten. Jede dieser Classen muss für sich betrachtet werden.

I.

Die im Vorausgehenden ausgesprochenen Sätze kann man leicht von einer unnöthigen, ihnen anhaftenden Beschränkung frei machen.

Diese Sätze beziehen sich nämlich zunächst nur auf solche Gruppen, für die Invarianten existiren, die also nach der Lie'schen Terminologie intransitiv sind. Damit Invarianten auftreten, ist erforderlich, dass die Differentialgleichungen (γ) wenigstens eine Lösung zulassen, dass also die Anzahl der untereinander unabhängigen Differentialgleichungen kleiner als n ist.

Halten wir an der Voraussetzung fest, dass die Gleichungen

$$y_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n$$

eine m-gliedrige Gruppe definiren, lassen aber die Voraussetzung, dass für diese Gruppen Invarianten existiren, fallen und machen wir statt dessen die Voraussetzung, die Gruppe sei durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt. Derartige Gruppen sollen im Folgenden als reguläre Gruppen bezeichnet werden.

Die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ genügen — wie aus der allgemeinen Theorie des H. Lie hervorgeht — einem System von Differentialgleichungen der Form (α) und den zugehörigen Anfangsbedingungen.

Wir betrachten nun ein System von q cogredienten Substitutionen

$$(\beta) \quad y_\lambda^{(\sigma)} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}((u))\, x_\mu^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad \sigma = 1, 2, \ldots q$$

und wählen die Zahl q so gross, dass $q\,n > m$ ist. Alsdann hat das System der Differentialgleichungen

$$(\gamma) \quad S_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda^{(\sigma)}} x_\mu^{(\sigma)} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$q\,n - m$ unabhängige Lösungen und jede Lösung ist gegenüber der Gruppe (β) invariant. Da aber die Gruppe (β) durch algebraische Relationen zwischen den Substitutionscoefficienten definirt ist, so gibt es rationale Invarianten der Gruppe[1]) und zwar sind darunter $q\,n - m$ untereinander unabhängige.

Den Differentialgleichungen $S_i(f) = 0$ kommt also ein vollständiges System rationaler Lösungen zu. Es finden somit die in der Einleitung angegebenen Sätze auf die Gruppe (β) Anwendung.

Nun überzeugt man sich leicht, dass die inf. Transformation $S_i(f)$ regulär oder irregulär ist, je nachdem die inf. Transformation $C_i(f)$ regulär oder irregulär ist. Es gilt somit der Satz:

Findet sich unter den inf. Transformationen, die zu einer regulären Gruppe gehören, eine irreguläre Transformation $C(f)$, so gehören alle die regulären Transformationen, in die $C(f)$ zerlegt werden kann, der Gruppe an.

II.

Um später den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, schicke ich einige Hülfssätze aus der Theorie der bilinearen Formen voraus.

Wir stellen uns zunächst die folgende Frage: es seien n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ gegeben, unter welchen Bedingungen gibt es

1) Christoffel Math. Annalen Bd. 19 S. 280.

dann n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$, die nicht alle gleich Null sind und die den Gleichungen

$$(a) \quad \sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

Ich behaupte, ein derartiges System $c'_{\lambda\mu}$ kann nur existiren, wenn die Grösse ω gleich der Differenz zweier der Werthe r ist, für die die charakteristische Determinante $\Delta(r) = |\, c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \,|$ $\lambda, \mu = 1, 2, .. n$ verschwindet.

Den Beweis führen wir indirect: wir nehmen an, ω sei nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, und beweisen, dass dann alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ verschwinden müssen.

Die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$ bezeichnen wir mit $r_1\, r_2 .. r_{n'}$, und die Exponenten der zum Wurzelfaktor $r_k - r$ gehörigen Elementartheiler mit $e_0^{(k)}\, e_1^{(k)} .. e_{l_k}^{(k)}$.

Wie ich in meiner Inauguraldissertation[1]) nachgewiesen habe, lassen sich n^2 Grössen $[g\, h\, \lambda]_k$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k = r_k\, [1\, h\, \lambda]_k \qquad \begin{aligned} \lambda &= 1, 2, .. n \\ g &= 2, 3, .. e_h^{(k)} \\ h &= 0, 1, .. l_k \\ k &= 1, 2, .. n' \end{aligned}$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, [g\, h\, \mu]_k = r_k\, [g\, h\, \lambda]_k + [g-1\, h\, \lambda]_k$$

Nun folgt aus den Gleichungen (a)

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu}\, [1\, h\, \mu]_k \right) = (r_k + \omega) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, [1\, h\, \mu]_k$$
$$\lambda = 1, 2, .. n$$

Weil nach Voraussetzung die Determinante $\Delta(r)$ für $r = r_k + \omega$ nicht verschwindet, so folgt hieraus

1) Zur Theorie der linearen Substitutionen, Strassburg 1887.

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} \, [1 \, h \, \mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, .. \, n$$

Nun folgt aus (a) weiter

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{\lambda\nu} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\nu\mu} \, [2 \, h \, \mu]_k \right) = (r_k + w) \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} \, [2 \, h \, \mu]_k$$
$$\lambda = 1, 2, .. \, n$$

und hieraus ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} \, [2 \, h \, \mu]_k = 0 \qquad \lambda = 1, 2, .. \, n$$

Diese Schlussweise fortsetzend erkennt man, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu} \, [g \, h \, \mu]_k = 0 \quad \text{für } \lambda = 1, 2, .. \, n$$

und alle n Werthsysteme der Indices g, h, k.

Da die Determinante der Grössen $[g \, h \, \mu]_k$ nicht verschwindet, so folgt hieraus $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, .. \, n$, w. z. b. w.

Aus dem eben Bewiesenen folgt der

1. Hülfssatz:

Ist das System der n^2 Grössen $c_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu} \, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu} \, c_{\nu\mu}) = \omega \, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. \, n$$

nur dann bestehen, wenn entweder ω oder alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Denn in diesem Fall verschwindet die charakteristische Determinante $\Delta(r)$ nur für $r = 0$.

Man kann das Gleichungssystem (a) in bekannter Weise durch die symbolische Gleichung

$$C\,C' - C'\,C = \omega\,C'$$

repräsentiren. Aus dieser symbolischen Gleichung ergibt sich:

$$C C'^2 - C'^2 C = (C C' - C' C)\, C' + C' (C C' - C' C) = 2\omega\, C'^2$$
$$C C'^3 - C'^3 C = (C C'^2 - C'^2 C)\, C' + C'^2 (C C' - C' C) = 3\omega\, C'^3$$
$$\text{und allgemein } C C'^h - C'^h C = h\,\omega\, C'^h$$

Wählt man die Zahl h so gross, dass $h\,\omega$ nicht gleich der Differenz zweier Wurzeln der Gleichung $\varDelta(r) = 0$ ist, was offenbar immer möglich ist, wenn ω von Null verschieden ist — so müssen alle n^2 Elemente des durch das Symbol C'^h repräsentirten Systems verschwinden. Das ist aber nur möglich, wenn die zu dem System $c'_{\lambda\mu}$ gehörige charakteristische Determinante $\varDelta'(r)$ für keinen von Null verschiedenen Werth von r verschwindet, d. h. wenn das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art ist.

Es gilt somit der

2. Hülfssatz:

Bestehen die n^2 Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

und ist die Constante ω von Null verschieden, so ist das System der n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ regulär von der ersten Art.

Die beiden ersten Hülfssätze haben sich auf reguläre Systeme erster Art bezogen, die beiden folgenden beziehen sich auf reguläre Systeme zweiter Art.

3. Hülfssatz:

Wenn die charakteristische Determinante

$$\varDelta(r) = \left| c_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

nur Elementartheiler erster Ordnung besitzt, so können die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c'_{\nu\mu} - c'_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c'_{\lambda\mu}$$
$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} (c_{\lambda\nu}\, c''_{\nu\mu} - c''_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}) = \omega\, c''_{\lambda\mu} + c'_{\lambda\mu}$$

nur dann bestehen, wenn alle n^2 Grössen $c'_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $\Delta(r) = 0$, unter denen beliebig viele einander gleiche vorkommen können, mit $r_1\, r_2 \,..\, r_n$. Aus unserer Voraussetzung folgt: es gibt zwei Systeme von je n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ und $\delta_\lambda^{(\sigma)}$ $(\sigma, \lambda = 1, 2 .. n)$ mit nicht verschwindender Determinante, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}\, d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, d_\lambda^{(\sigma)}$$
$$\lambda, \sigma = 1, 2, .. n$$
$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu\lambda}\, \delta_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma\, \delta_\lambda^{(\sigma)}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen leitet man aus dem vorgelegten Gleichungssystem das Folgende ab:

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = 0$$

$$(r_\varrho - r_\sigma - \omega) \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c''_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$
$$\varrho, \sigma = 1, 2, .. n$$

Die erste Gleichung zeigt, dass der Ausdruck

$$\sum_\lambda \sum_\mu c'_{\lambda\mu}\, \delta_\lambda^{(\varrho)}\, d_\mu^{(\sigma)}$$

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega$ von Null verschieden ist. Die zweite Gleichung zeigt, dass dieser Ausdruck auch dann

verschwindet, wenn $r_\varrho - r_\sigma - \omega = 0$ ist. Der genannte Ausdruck verschwindet also in allen Fällen und daraus folgt $c'_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$, w. z. b. w.

4. Hülfssatz:

Es seien m Systeme von je n^2 Grössen vorgelegt:

$$c_{\lambda\mu}^{(1)}\, c_{\lambda\mu}^{(2)} \ldots c_{\lambda\mu}^{(m)} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Wir setzen voraus, die zu einem jeden Systeme gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ habe nur Elementartheiler erster Ordnung, und wir setzen weiter voraus, zwischen den Elementen von je zwei Grössensystemen bestehen die Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)}\, c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i, k = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

Dann kann man ein System von n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)}\, d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma^{(i)}\, d_\lambda^{(\sigma)} \qquad \begin{matrix} \lambda, \sigma = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

Die n Grössen $r_1^{(i)}\, r_2^{(i)} \ldots r_n^{(i)}$ sind die Wurzeln der Gleichung $\Delta_i(r) = 0$, also ganze Zahlen, wenn das System der $c_{\lambda\mu}^{(i)}$ regulär von der zweiten Art ist.

Dass der eben ausgesprochene Satz gilt, wenn nur ein Grössensystem $c_{\lambda\mu}^{(i)}$ vorgelegt ist, ist bekannt. Um seine allgemeine Gültigkeit darzuthun, wollen wir annehmen, er gelte, solange die Anzahl der vorgelegten Grössensysteme kleiner als m ist, und beweisen, dass er dann auch noch für m Grössensysteme gilt. Wir nehmen also an, es gebe ein Grössensystem $t_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante, das den Gleichungen

$$(T) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} t_{\mu}^{(\sigma)} = r_{\sigma}^{(i)} t_{\lambda}^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, .. n; \; i = 1, 2, .. m-1$$

genügt. Weil nach Voraussetzung die Determinante der $t_{\lambda}^{(\sigma)}$ nicht verschwindet, so kann man die Gleichungen ansetzen

$$(\alpha) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)} t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\sigma\nu} t_{\lambda}^{(\nu)} \qquad \lambda, \sigma = 1, 2, .. n$$

Nach dem bekannten Theorem des H. Weinstrass stimmen die charakteristischen Determinanten.

$$\Delta_m(r) = \left| c_{\lambda\mu}^{(m)} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \text{ und } \Delta'_m(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right|$$
$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n$$

in ihren Elementartheilern überein.

Nun folgt aus den Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind bei Benützung der Gleichungen (T) und (α)

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(m)} - c_{\lambda\nu}^{(m)} c_{\nu\mu}^{(i)} \right) t_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(r_{\nu}^{(i)} - r_{\sigma}^{(i)} \right) \alpha_{\sigma\nu} t_{\lambda}^{(\nu)} = 0$$
$$\sigma, \lambda = 1, 2, .. n; \; i = 1, 2, .. m-1$$

und hieraus ergibt sich $\alpha_{\sigma\nu} = 0$, wenn nicht

$$r_{\nu}^{(i)} = r_{\sigma}^{(i)} \text{ für } i = 1, 2, .. m-1$$

Ist nun für keinen Index $\nu > 1$ gleichzeitig $r_{\nu}^{(i)} = r_1^{(i)}$ für $i = 1, 2, .. m-1$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu}^{(m)} t_{\mu}^{(i)} = \alpha_{11} t_{\lambda}^{(1)} \qquad \lambda = 1, 2, .. n$$

und wir genügen den zu beweisenden Gleichungen, wenn wir $d_{\lambda}^{1)} = t_{\lambda}^{(1)}$ und $r_1^{(m)} = \alpha_{11}$ setzen.

Nehmen wir nunmehr an, es sei

$$r_1^{(i)} = r_2^{(i)} .. = r_h^{(i)} \qquad i = 1, 2, .. m-1$$

dagegen sei für keinen Index $\nu > h$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots m-1$$

Von den Elementen der Determinante

$$\Delta'_m(r) = \left| \alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \right| \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

verschwinden alle, die den ersten h Zeiten, aber nicht gleichzeitig den ersten h Spalten angehören. Beachtet man, dass die Determinante $\Delta'_m(r)$ ebenso wie die Determinante $\Delta_m(r)$ nur Elementartheile erster Ordnung besitzt, so überzeugt man sich leicht, dass auch die charakteristische Determinante des Systems h^{ten} Grades $\alpha_{\lambda\mu} - \binom{\lambda}{\mu} r \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots h$ nur Elementartheiler erster Ordnung hat, und daraus folgt: man kann ein System von h^2 Grössen $\beta_{\varrho\sigma}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\sigma=1}^{h} \beta_{\varrho\sigma} \alpha_{\sigma\nu} = r_\varrho^{(m)} \beta_{\varrho\nu} \qquad \varrho, \nu = 1, 2, \ldots h$$

Setzt man dann

$$\sum_{\nu=1}^{h} \beta_{\varrho\nu} t_\lambda^{(\nu)} = d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \ \varrho = 1, 2, \ldots h$$

so ergibt sich aus den Gleichungen (α)

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(m)} d_\mu^{(\varrho)} = r_\varrho^{(m)} d_\lambda^{(\varrho)} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots n; \ \varrho = 1, 2, \ldots h$$

Damit sind die ersten h der zu beweisenden Gleichungen als richtig erwiesen. Der Beweis der übrigen ergibt sich auf analoge Weise.

III.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zunächst zu den Gruppen der zweiten Classe (s. Einleitung, Schluss).

Wir nehmen also an, eine jede inf. Transformation, die der vorgelegten m-gliedrigen Gruppe A angehört, sei regulär

von der zweiten Art. Zwischen den Coefficienten von m linear unabhängigen inf. Transformationen der Gruppe A

$$C_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

bestehen Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)} c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)} c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} c_{\lambda\mu}^{(j)}$$
$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \quad i, k = 1, 2, \ldots m)$$

Ich behaupte, die Constanten ε_j^{ik} müssen alle gleich Null sein. Wäre nämlich z. B. eine der m^2 Grössen ε^{1k} von Null verschieden, so müsste die Determinante $E(r) = | \varepsilon_j^{1k} - \binom{k}{j} r |$ $k, j = 1, 2, \ldots m$ entweder wenigstens für einen von Null verschiedenen Werth von r verschwinden, oder sie müsste, wenn sie durch r^m theilbar ist, wenigstens einen Elementartheiler von höherer als der ersten Ordnung haben.

Tritt der letztere Fall ein, so kann man zwei Werthsysteme, deren Elemente nicht alle verschwinden, $e_1\, e_2 \ldots e_m$ und $e_1'\, e_2' \ldots e_m'$ so bestimmen, dass

$$\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h} e_h' = e_j \qquad (j = 1, 2, \ldots m)$$

Setzt man nun

$$\sum_{i=1}^{m} e_i\, c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} e_i'\, c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu}' \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n)$$

so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu} - k_{\lambda\nu} c_{\nu\mu}^{(1)}\right) = 0 \\ &\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)} k_{\nu\mu}' - k_{\lambda\nu}' c_{\nu\mu}^{(1)}\right) = k_{\lambda\mu} \end{aligned}\right\} \quad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Aber diese Gleichungen können nach Hülfssatz (3) nur dann statt haben, wenn alle n^2 Grössen $k_{\lambda\mu}$ verschwinden.

Dies ist aber unmöglich, weil einerseits nicht alle m Grössen e_i Null sind, und andererseits die m inf. Transformationen $C_i(f)$ linear unabhängig sind.

Nehmen wir nunmehr an, die Determinante $E(r)$ verschwinde für einen von Null verschiedenen Werth ω von r. Unter dieser Voraussetzung kann man m Grössen $e_1\, e_2 \,.\,.\, e_m$, die nicht alle gleich Null sind, so bestimmen, dass

$$\sum_{h=1}^{m} \varepsilon_j^{1h}\, e_h = \omega\, e_j \quad \text{für } j = 1, 2, \ldots m$$

Setzen wir wieder zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{m} e_i\, c_{\lambda\mu}^{(i)} = k_{\lambda\mu}$$

Diese Grössen $k_{\lambda\mu}$ genügen der Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(1)}\, k_{\nu\mu} - k_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}^{(1)}\right) = \omega\, k_{\lambda\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$$

Aber diese Gleichungen können nach Hülfssatz (2) nur dann bestehen, wenn entweder alle n^2 Grössen $k_{\lambda\mu}$ verschwinden oder wenn diese Grössen ein reguläres System erster Art bilden. Beides ist durch unsere Voraussetzungen ausgeschlossen.

Damit ist bewiesen: die Coefficienten der vorgelegten m inf. Transformationen genügen den Gleichungen

$$(S) \quad \sum_{\nu=1}^{n} \left(c_{\lambda\nu}^{(i)}\, c_{\nu\mu}^{(k)} - c_{\lambda\nu}^{(k)}\, c_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0$$

$$\text{für } \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n; \quad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Es sind somit die Voraussetzungen erfüllt, auf denen der Hülfssatz (4) beruht, und man kann daher n^2 Grössen $d_\mu^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$(T) \quad \sum_{\mu=1}^{n} c_{\lambda\mu}^{(i)}\, d_\mu^{(\sigma)}\, r_\sigma^{(i)} = d_\lambda^{(\sigma)}$$

$$\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n; \quad i = 1, 2, \ldots m$$

Führt man an Stelle der inf. Transformationen $C_i(f)$ m andere linear unabhängige inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, C_h(f) \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

ein, so treten in den Gleichungen (T) an Stelle der Grössen $r_\sigma^{(i)}$ die Grössen

$$\varrho_\sigma^{(i)} = \sum_{h=1}^{m} q_{ih}\, r_\sigma^{(h)}$$

während die Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ unverändert bleiben.

Ich behaupte nun: man kann die verfügbaren Grössen q_{ih} so wählen, dass

1. auch die Grössen $\varrho_\sigma^{(i)}$ — ebenso wie die Grössen $r_\sigma^{(i)}$ — ganze Zahlen sind, und dass

2. die aus m Spalten des Systems

$$\begin{matrix} \varrho_1^{(1)} & \varrho_2^{(1)} \ldots & \varrho_n^{(1)} \\ \varrho_1^{(2)} & \varrho_2^{(2)} \ldots & \varrho_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \varrho_1^{(m)} & \varrho_2^{(m)} \ldots & \varrho_n^{(m)} \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten m^{ten} Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Zum Beweise ist zunächst zu bemerken: weil nach Voraussetzung die m inf. Transformationen $C_i(f)$ linear unabhängig sind, so können nicht alle Determinanten m^{ten} Grades, die aus m Spalten des Systems

$$(R) \qquad \begin{matrix} r_1^{(1)} & r_2^{(1)} \ldots & r_n^{(1)} \\ r_1^{(2)} & r_2^{(2)} \ldots & r_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ r_1^{(m)} & r_2^{(m)} \ldots & r_n^{(m)} \end{matrix}$$

gebildet sind, verschwinden. Wir können ferner voraussetzen, dass nicht alle n zu einer inf. Transformation $C_i(f)$ gehörigen Grössen

$$r_1^{(i)} \quad r_2^{(i)} \ldots \quad r_n^{(i)}$$

einen gemeinschaftlichen Divisor haben. Wären nämlich diese n Zahlen durch die Zahl a theilbar, so hätte man nur die inf. Transformation $C_i(f)$ durch $\frac{1}{a} C_i(f)$ zu ersetzen.

Um nun unsere Behauptung zu beweisen, gehen wir von der Annahme aus, dass nicht alle Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen des Systems (R) angehören, einen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen. Diese Voraussetzung ist, wenn nicht für grössere h, so doch sicher für $h = 2$ erfüllt. Es sei sodann a der grösste gemeinschaftliche Divisor aller der Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören. Unter den Unterdeterminanten $h-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Elemente den $h-1$ ersten Zeilen von (R) angehören, ist mindestens eine nicht durch a theilbar. Es sei dies die aus den Elementen der $h-1$ ersten Spalten gebildete Determinante D_{h-1}. Unter den Unterdeterminanten h^{ten} Grades, deren Elemente den h ersten Zeilen von (R) angehören und die alle Elemente von D_{h-1} enthalten, hat mindestens eine einen von Null verschiedenen Werth. Es sei dies die aus den Elementen der h ersten Spalten gebildete Determinante D_h. Es sei ferner b der grösste gemeinschaftliche Divisor von D_{h-1} und a, so dass jedenfalls $b < a$ ist. Endlich sei t eine Wurzel der Congruenz $t\,R_{h-1} \equiv b \mod a$.

Wir lassen nun an Stelle der inf. Transformation $C_h(f)$ die Transformation

$$K(f) = \frac{1}{a}\left(t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}} C_1(f) + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}} C_2(f) \ldots \right.$$
$$\left. + t \frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}} C_{h-1}(f) + b\, C_h(f)\right)$$

treten. Dementsprechend tritt an Stelle des Zahlensystems (R) ein Zahlensystem (R'), das sich von (R) nur in den

Elementen der h^{ten} Zeile unterscheidet, indem die Zahlen $r_\sigma^{(h)}$ durch die Zahlen

$$\varrho_\sigma = \frac{1}{a}\left(t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(1)}} r_\sigma^{(1)} + t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(2)}} r_\sigma^{(2)} \ldots + t\frac{\partial R_h}{\partial r_h^{(h-1)}} r_\sigma^{(h-1)} + b\, r_\sigma^{(h)}\right)$$

$$(\sigma = 1, 2, \ldots n)$$

ersetzt sind. Die Grössen ϱ_σ sind ganze Zahlen, denn der Zähler von ϱ_σ ist nach dem Modul a dem t-fachen einer der Unterdeterminanten h^{ten} Grades congruent, die aus den Elementen der h ersten Zeilen des Systems (R) gebildet sind, er ist also durch a theilbar.

Man überzeugt sich nun leicht, dass b der grösste gemeinschaftliche Divisor der Unterdeterminanten h^{ten} Grades ist, die aus den Elementen der h ersten Zeilen des Systems (R') gebildet sind. An Stelle des gemeinschaftlichen Divisors a ist somit ein kleinerer gemeinschaftlicher Divisor b getreten.

Es ist nun klar, dass bei wiederholter Anwendung des eben durchgeführten Verfahrens an Stelle des Systems (R) ein System (R_1) von der Beschaffenheit tritt, dass die Unterdeterminanten h^{ten} Grades, die aus den Elementen der h ersten Zeilen gebildet sind, keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen. Aus diesem System (R_1) leitet man dann in analoger Weise ein System (R_2) von der Beschaffenheit ab, dass auch die Unterdeterminanten $h+1^{\text{ten}}$ Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor mehr besitzen u. s. w.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, die inf. Transformation $C_1(f)\ C_2(f) \ldots C_m(f)$ seien von Anfang an so gewählt, dass die aus m Spalten des Systems (R) gebildeten Determinanten m^{ten} Grades keinen gemeinschaftlichen Divisor besitzen.

Unter dieser Voraussetzung bezeichne ich die genannten

inf. Transformationen als ein kanonisches System inf. Transformationen.

Die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution unserer m-gliedrigen Gruppe A sind — wie in der Einleitung bemerkt worden ist — durch Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\lambda\nu}\, c_{\nu\mu}^{(j)}\, P_j^{(i)} \qquad \begin{matrix} \lambda, \mu = 1, 2, \ldots n \\ i = 1, 2, \ldots m \end{matrix}$$

und die Anfangsbedingungen $a_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}$ für

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 1 \ldots \quad u_m = 1$$

bestimmt. Ich setze nun $P_j^{(i)} = 0$, wenn i und j ungleich sind und $P_i^{(i)} = \frac{1}{u_i}$. Dass diese Festsetzung nicht gegen die Integrabilitätsbedingung verstösst, wird sich im Folgenden von selbst ergeben.

Die vorstehenden Differentialgleichungen kann man wegen der Gleichungen (T) durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_{\mu}^{(\sigma)} = \frac{1}{u_i}\, r_{\sigma}^{(i)} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_{\mu}^{(\sigma)}$$

$$(\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n; \; i = 1, 2, \ldots m)$$

und aus diesen ergibt sich bei Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\lambda\mu}\, d_{\mu}^{(\sigma)} = u_1^{r_{\sigma}^{(1)}}\, u_2^{r_{\sigma}^{(2)}} \cdots u_m^{r_{\sigma}^{(m)}}\, d_{\lambda}^{(\sigma)}$$

$$(\sigma, \lambda = 1, 2, \ldots n)$$

Durch diese n^2 Gleichungen sind die Substitutionscoefficienten als rationale Funktionen der Parameter bestimmt. Um zu beweisen, dass auch umgekehrt die Parameter rationale Funktionen der Substitutionscoefficienten sind, nehmen wir an, den beiden Werthsystemen der Parameter

$$u_1 \; u_2 \ldots u_m \text{ und } v_1 \; v_2 \ldots v_m$$

entspreche dasselbe Werthsystem der Grössen $a_{\lambda\mu}$, und wir beweisen, dass dann nothwendig

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2 \,.\,.\; v_m = u_m$$

Aus unserer Voraussetzung ergibt sich

$$\left(\frac{v_1}{u_1}\right)^{r_\sigma^{(1)}} \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^{r_\sigma^{(2)}} \,.\,. \left(\frac{v_m}{u_m}\right)^{r_\sigma^{(m)}} = 1 \qquad \sigma = 1, 2, \,.\,. \,n$$

und hieraus folgt, dass eine jede von den n Summen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h}$$

eine ganze Zahl ist.

Wir setzen nun, unter N_σ eine ganze Zahl verstehend. die n Gleichungen

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{h=1}^{m} r_\sigma^{(h)} \log \frac{v_h}{u_h} = N_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \,.\,. \,n)$$

an und bilden von denselben alle die Combinationen zu m, die m von einander unabhängige Gleichungen umfassen. Die Auflösung eines dieser Gleichungssysteme ergibt die m Grössen $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ als Quotienten, deren Zähler von den Zahlen N_σ abhängige, nicht näher bestimmte ganze Zahlen sind, und deren gemeinschaftlicher Nenner — die Auflösungsdeterminante — eine von den Determinanten m^{ten} Grades ist, die aus m Spalten des Systems (R) gebildet sind, und es ist klar, dass jede derartige Determinante, die nicht verschwindet, als Auflösungsdeterminante zu einem unserer Systeme von m Gleichungen gehört. Der kleinste gemeinschaftliche Nenner der m Brüche $\frac{1}{2\pi i} \log \frac{v_h}{u_h}$ muss daher gemeinschaftlicher Divisor aller der genannten Determinanten sein: er ist also $= 1$.

Demnach sind die Logarithmen der Quotienten $\frac{v_h}{u_h}$ Multipla von $2\pi i$ und es ist folglich $v_1 = u_1 \; v_2 = u_2 \, .. \; v_m = u_m$ w. z. b. w.

IV.

Die beiden Theile unseres Beweises, die sich auf Gruppen der ersten und der dritten Classe (s. Einleitung) beziehen, beruhen auf einem gemeinschaftlichen Grundgedanken. Ich beginne mit der Darlegung dieses Beweisprincips.

Es seien m reguläre, linear unabhängige, inf. Transformationen

$$C_1(f) \; C_2(f) \, .. \; C_m(f)$$

vorgelegt, die eine m-gliedrige Gruppe erzeugen. Wir bestimmen die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ (s. Einleitung) und setzen dann diese m eingliedrigen Gruppen zu der m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1 \, u_2 \, ., \, u_m) = B_1(u_1) \, B_2(u_2) \, .. \, B_m(u_m)$$

zusammen.

Bezüglich der inf. Transformationen $C_i(f)$ machen wir nun die Voraussetzungen:

1. es sollen die q ersten von denselben für sich eine Gruppe bestimmen und ebenso sollen die $m-q$ letzten für sich eine Gruppe bestimmen.

Alsdann werden die q ersten unter den eingliedrigen Gruppen $B_i(u_i)$ sich zu einer q-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1 \, u_2 \, .. \, u_q) = B_1(u_1) \, B_2(u_2) \, .. \, B_q(u_q)$$

zusammensetzen und ebenso werden sich die $m-q$ letzten zu einer $m-q$-gliedrigen Gruppe

$$A''(u_{q+1} \, u_{q+2} \, .. \, u_m) = B_{q+1}(u_{q+1}) \, B_{q+2}(u_{q+2}) \, .. \, B_m(u_m)$$

zusammensetzen.

Wir nehmen nun an, es sei bereits bewiesen:

2. Die Parameter $u_1\, u_2 \,..\, u_q$, von denen die Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A' abhängen, lassen sich als rationale Funktionen der Coefficienten $a'_{\lambda\mu}$ darstellen und ebenso sind die Parameter $u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m$, von denen die Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A'' abhängen, rationale Funktionen der Coefficienten $a''_{\lambda\mu}$.

Bezüglich der Gruppe A'' machen wir noch die weitere Voraussetzung:

3. Unter den Potenzen einer beliebigen Substitution S der Gruppe A'' soll die identische Substitution nur dann vorkommen, wenn S selbst die identische Substitution ist, wenn also die der Substitution entsprechenden Parameter die Werthe haben, die in der Einleitung als Anfangswerthe der Parameter bezeichnet worden sind.

Aus dieser Voraussetzung ergibt sich in bekannter Weise, dass alle Potenzen einer Substitution S der Gruppe A'' unter einander verschieden sind.

Geht also die Substitution S^h aus der allgemeinen Substitution der Gruppe dadurch hervor, dass man den verfügbaren Parametern $u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m$ die Werthe $w^{(h)}_{q+1}\, w^{(h)}_{q+2} \,..\, w^{(h)}_m$ ertheilt, so sind diese Werthsysteme $w^{(h)}_{q+1}\, w^{(h)}_{q+2} \,..$, die den verschiedenen Potenzen von S entsprechen, alle unter einander verschieden.

Ich behaupte nun, die eingeführten Voraussetzungen reichen für den Beweis hin, dass sich die Parameter $u_1\, u_2 \,..\, u_m$ rational durch die Coefficienten $a_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe A darstellen lassen.

Zum Beweis ist zunächst zu bemerken:

Weil die Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ rationale Funktionen der Parameter $u_1\, u_2 \,..\, u_m$ sind, so hängen umgekehrt die Parameter algebraisch von den Substitutionscoefficienten ab und weil die Gruppe A m-gliedrig ist, also über m der Substitutionscoefficienten durch geeignete Wahl der Parameter

verfügt werden kann, so kann einem Werthsystem der Substitutionscoefficienten nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen der Parameter entsprechen. Um die eben aufgestellte Behauptung zu beweisen, genügt es also zu zeigen:

Wenn einem Werthsysteme der Substitutionscoefficienten zwei verschiedene Werthsysteme der Parameter entsprechen, so entsprechen ihm unendlich viele Werthsysteme der Parameter.

Nehmen wir, um diesen Nachweis zu führen, an, den beiden Parametersystemen

$$u_1\, u_2 \,..\, u_m \text{ und } v_1\, v_2 \,..\, v_m$$

entspreche dieselbe Substitution der Gruppe A. Es sei also

$$(G) \quad A\,(u_1\, u_2 \,..\, u_m) = A\,(v_1\, v_2 \,..\, v_m)$$

ohne dass gleichzeitig die m Gleichungen $v_1 = u_1 \; v_2 = u_2 \,..$ bestehen. Da allgemein $A = A'\,A''$ so kann man die symbolische Gleichung (G) durch die folgende ersetzen:

$$(G') \quad \begin{aligned} & A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) \\ & = A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)\, A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m) \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$(H) \quad \begin{aligned} & [A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q)\, A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) \\ & \qquad [A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m)]^{-1} = 1 \end{aligned}$$

wo in üblicher Weise die identische Substitution mit 1 bezeichnet ist.

Wegen des Gruppencharakters der Substitutionen A' und A'' kann man Funktionen $w_1\, w_2 \,..\, w_q$ von $u_1\, u_2 \,..\, u_q$ und $v_1\, v_2 \,..\, v_q$ und Funktionen $w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m$ von u_{q+1} $u_{q+2} \,..\, u_m$ und $v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m$ derart bestimmen, dass

$$(J) \quad [A'\,(v_1\, v_2 \,..\, v_q)]^{-1}\, A'\,(u_1\, u_2 \,..\, u_q) = A'\,(w_1\, w_2 \,..\, w_q)$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} & A''\,(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m)\,[A''\,(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m)]^{-1} \\ & \qquad = A''\,(w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m) \end{aligned}$$

Nach unserer zweiten Voraussetzung hängen diese Funktionen w rational von ihren Argumenten ab.

Setzen wir sodann für beliebige positive und negative Exponenten h

$$(K)\qquad \begin{aligned} [A'(w_1\, w_2 \,..\, w_q)]^h &= A'(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)} \,..\, w_q^{(h)}) \\ [A''(w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m)]^h &= A''(w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)} \,..\, w_m^{(h)}) \end{aligned}$$

so sind auch die Grössen $w_1^{(h)}\, w_2^{(h)} \,..\, w_q^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_1\, u_2 \,..\, u_q$ und $v_1\, v_2 \,..\, v_q$ und die Grössen $w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)} \,..\, w_m^{(h)}$ rationale Funktionen von $u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m$ und $v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m$.

Die Substitution

$$A''(w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m)$$

ist von der identischen Substitution verschieden.

Denn andernfalls wäre

$$A''(u_{q+1}\, u_{q+2} \,..\, u_m) = A''(v_{q+1}\, v_{q+2} \,..\, v_m)$$

und nach unserer zweiten Voraussetzung folgt hieraus $v_{q+1} = u_{q+1}$ $v_{q+2} = u_{q+2} \,..\, v_m = u_m$.

Wegen (G') wäre nun auch

$$A'(u_1\, u_2 \,..\, u_q) = A'(v_1\, v_2 \,..\, v_q)$$

also auf Grund der zweiten Voraussetzung auch

$$v_1 = u_1 \quad v_2 = u_2 \,..\, v_q = u_q$$

im Widerspruch mit der Annahme, von der wir ausgegangen sind.

Aus unserer dritten Voraussetzung ergibt sich nunmehr, dass die Werthsysteme

$$w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)} \,..\, w_m^{(h)}$$

alle untereinander verschieden sind.

Nun folgt aus (H) bei Berücksichtigung von (J) und (K)

$$A'(w_1\, w_2 \,..\, w_q)\, A''(w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m) = 1$$

$$\begin{aligned} &[A'(w_1\, w_2 \,..\, w_q)]^h\, [A''(w_{q+1}\, w_{q+2} \,..\, w_m)]^h \\ &= A'(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)} \,..\, w_q^{(h)})\, A''(w_{q+1}^{(h)}\, w_{q+2}^{(h)} \,..\, w_m^{(h)}) \\ &= A(w_1^{(h)}\, w_2^{(h)} \,..\, w_m^{(h)}) = 1 \end{aligned}$$

für beliebige positive und negative Exponenten h.

Es entsprechen also der identischen Substitution unendlich viele verschiedene Werthsysteme der Parameter und hieraus schliesst man leicht, dass einem jeden System der Substitutionscoefficienten $a_{\lambda\mu}$ unendlich viele Werthsysteme der Parameter entsprechen.

Damit ist bewiesen, dass die Annahme, die Parameter seien **nicht** rationale Funktionen der Substitutionscoefficienten zu einem Widerspruch führt.

Durch ganz analoge Betrachtungen beweist man:

Unter den Potenzen der Substitution

$$A(u_1 u_2 . u_m) = A'(u_1 u_2 .. u_q) A''(u_{q+1} u_{q+2} .. u_m)$$

kann nur dann die identische Substitution auftreten, wenn sich die Substitution

$$A''(u_{q+1} u_{q+2} .. u_m)$$

auf die identische Substitution reducirt.

V.

Der Theil des Beweises, der sich auf Gruppen der ersten Classe bezieht, bietet nun keine Schwierigkeit mehr.

Ich nehme zunächst an, es sei nur **eine** reguläre inf. Transformation erster Art $C(f)$ vorgelegt. Die zu dieser inf. Transformation gehörige eingliedrige Gruppe $B(u)$ ist in meiner früheren Abhandlung (S. 122) in expliciter Form dargestellt werden. Aus den daselbst gegebenen Formeln ergibt sich

1. Der Parameter u lässt sich rational durch die Coefficienten $b_{\lambda\mu}$ der allgemeinen Substitution der Gruppe B darstellen.

Ferner: Setzt man zwei Substitutionen der Gruppe $B(u)$ und $B(v)$ zusammen, so ergibt sich

$$B(u)\, B(v) = B(u + v)$$

Es ist somit

$$[B(u)]^h = B(hu)$$

Die identische Substitution entspricht dem Parameterwerth $u = 0$. Daraus folgt

2. In der Reihe der Potenzen der Substitution $B(u)$ kann die identische Substitution nur dann auftreten, wenn $u = 0$, also schon die Substitution $B(u)$ selbst die identische Substitution ist.

Es sei nun eine m-gliedrige Gruppe der ersten Classe vorgelegt.

$$C_1(f) \; C_2(f) \ldots C_m(f)$$

seien untereinander linear unabhängig, im Uebrigen aber beliebige inf. Transformationen derselben. Sie sind alle regulär von der ersten Art, weil die Gruppe nach ihrer Definition keine anderen inf. Transformationen enthält.

Zwischen diesen m inf. Transformationen bestehen Relationen der Form

$$C_i C_k(f) - C_k C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} C_j(f) \qquad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Ich behaupte, die charakteristische Determinante

$$\left| \varepsilon_j^{ik} - \binom{k}{j} r \right| \qquad k, j = 1, 2, \ldots m$$

kann für keinen von Null verschiedenen Werth von r verschwinden.

Nehmen wir nämlich an, diese Determinante verschwinde für den von Null verschiedenen Werth $r = \omega$, dann kann man eine lineare Combination $K(f)$ der inf. Transformationen $C_1(f) \; C_2(f) \ldots C_m(f)$ derart bestimmen, dass

$$C_i K(f) - K C_i(f) = \omega \, C_i(f)$$

Aber dies ist nach dem ersten Hülfssatz des Art. II unmöglich, weil $C_i(f)$ regulär von der ersten Art ist.

Daraus folgt, dass die Gruppen erster Classe zu den-

jenigen Gruppen gehören, die H. Killing als Gruppen vom Rang Null bezeichnet hat.

Für diese Gruppen gilt der Satz:[1])

Man kann die inf. Transformationen $C_i(f)$ so wählen, dass sie den Relationen

$$(J) \quad C_i C_k(f) - C_k C_i(f) = \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_j^{ik} C_j(f)$$

$$(k = 1, 2, .. i - 1; \ i = 2, 3, .. m)$$

genügen.

Das charakteristische an den Relationen (J) ist: sie haben zur Folge, dass die i inf. Transformationen

$$C_1(f) \ C_2(f) \, .. \ C_i(f)$$

für sich eine i-gliedrige Gruppe bestimmen, und zwar gilt dies für $i = 1, 2, .. m$.

Ein System von m unter einander linear unabhängigen Transformationen, das den Relationen (J) genügt, bezeichne ich als kanonisches System.

Um nun die m-gliedrige Gruppe A zu bestimmen, die von den m inf. Transformationen $C_i(f)$ erzeugt ist, bestimmen wir zunächst die zu einer jeden inf. Transformation $C_i(f)$ gehörige eingliedrige Gruppe $B_i(u_i)$ und setzen dann diese m eingliedrigen Gruppen zu der m-gliedrigen Gruppe

$$A(u_1 u_2 .. u_m) = B_1(u_1) B_2(u_2) .. B_m(u_m)$$

zusammen. Da die inf. Transformationen

$$C_1(f) \ C_2(f) \, .. \ C_{m-1}(f)$$

für sich eine Gruppe bestimmen, so setzen sich die $m-1$ eingliedrigen Gruppen

$$B_1(u_1) B_2(u_2) .. B_{m-1}(u_{m-1})$$

---

1) Dissertation von Umlauf: Ueber die Zusammensetzung der Gruppen vom Rang Null. Leipzig 1891. Vergl. auch Engel, Leipziger Berichte 1887 S. 95.

zu einer $m-1$-gliedrigen Gruppe

$$A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1}) = B_1(u_1) B_2(u_2) \ldots B_{m-1}(u_{m-1})$$

zusammen und $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$ entsteht durch Zusammensetzung von $A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1})$ und $B_m(u_m)$.

Um zu beweisen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, nehmen wir an, die Behauptung gelte für Gruppen, deren Gliederzahl kleiner als m ist, und beweisen, dass sie dann auch für m-gliedrige gilt. Da sie für eingliedrige Gruppen gilt, gilt sie dann allgemein.

Für die Gruppe A' gelten auf Grund unserer Annahme die Voraussetzungen, die im vorigen Artikel bezüglich der dort mit A' bezeichneten Gruppe gemacht worden sind; für die eingliedrige Gruppe gelten die im vorigen Artikel bezüglich der Gruppe A'' gemachten Voraussetzungen. Somit ergibt sich der Beweis unserer Behauptung aus den Betrachtungen des vorigen Artikels.

Die Gruppen erster Classe haben die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass unter den Potenzen einer Substitution $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$, die der Gruppe angehört, nur dann die identische Substitution auftreten kann, wenn sich die Substitution $A(u_1 u_2 \ldots u_m)$ selbst auf die identische Substitution reducirt. Der Beweis ergiebt sich aus der Schlussbemerkung des vorigen Art. Darnach muss nämlich, damit unter den Potenzen der Substitution

$$A(u_1 u_2 \ldots u_m) = A'(u_1 u_2 \ldots u_{m-1}) B_m(u_m)$$

die identische Substitution vorkommt, $B_m(u_m)$ die identische Substitution sein, woraus $u_m = 0$ folgt. Man schliesst dann in derselben Weise weiter, dass sich jede der Substitutionen $B_{m-1}(u_{m-1}) B_{m-2}(u_{m-2}) \ldots B_1(u_1)$ auf die identische Substitution reducirt, dass also $u_1 = u_2 = u_3 \ldots = u_m = 0$ ist.

Aus der Definition der Gruppen erster Classe hat sich ergeben: man kann m untereinander linear unabhängige

inf. Transformationen der Gruppe so wählen, dass 1) jede derselben regulär von der ersten Art ist, und dass 2) die Zusammensetzung der Gruppe durch Gleichungen der Form (J) bestimmt ist.

Es ist nicht schwer zu beweisen, dass umgekehrt diese beiden Eigenschaften eine Gruppe erster Classe — d. h. eine Gruppe, die nur reguläre inf. Transformationen erster Art enthält — charakterisiren. Ich unterlasse diesen Nachweis, weil er für das Folgende nicht nothwendig ist, und beschränke mich auf die Bemerkung, dass die beiden eben angeführten Eigenschaften für den Beweis hinreichen, dass sich die Parameter rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen, und dass keine Potenz einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, die identische Substitution ergeben kann. Es ergibt sich dies unmittelbar aus dem Gang des gegebenen Beweises.

Im Folgenden wenden wir die Bezeichnung „Gruppe erster Classe" auf alle die Gruppen an, die die beiden eben genannten charakteristischen Eigenschaften besitzen.

VI.

Wir gehen nunmehr zu den Gruppen der dritten Classe über, die reguläre inf. Transformationen sowohl von der ersten als von der zweiten Art enthalten.

Es sei $C_1(f)$ eine beliebige in der Gruppe enthaltene reguläre inf. Transformation zweiter Art.

Unter den in der Gruppe enthaltenen inf. Transformationen $K(f)$, die mit $C_1(f)$ vertauschbar sind, d. h. der Relation $C_1 K(f) - K C_1(f) = 0$ genügen, wählen wir, — wenn es solche gibt — eine reguläre Transformation zweiter Art aus und bezeichnen sie mit $C_2(f)$. Gibt es weitere reguläre Transformationen zweiter Art, die mit $C_1(f)$ und

$C_2(f)$ vertauschbar und von diesen linear unabhängig sind, so bezeichnen wir eine derselben mit $C_3(f)$ u. s. w.

Nehmen wir an, es finden sich genau m_0 reguläre Transformationen zweiter Art

$$C_1(f)\ C_2(f)\ldots C_{m_0}(f)$$

die untereinander linear unabhängig und paarweise vertauschbar sind. Diese bestimmen eine m_0-gliedrige Gruppe A_0, die der zweiten Classe angehört.[1]) Daran wird selbstredend nichts geändert, wenn wir an Stelle der inf. Transformationen

$$C_1(f)\ C_2(f)\ldots C_{m_0}(f)$$

lineare Combinationen derselben treten lassen. Wir können desshalb voraussetzen, diese m_0 inf. Transformationen seien so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die Gruppe A_0 bilden (Art. III).

Mit $$C_{m_0+1}(f)\ C_{m_0+2}(f)\ldots C_m(f)$$

bezeichnen wir irgend welche untereinander und von $C_1(f)$ $C_2(f)\ldots C_{m_0}(f)$ linear unabhängige inf. Transformationen der vorgelegten m-gliedrigen Gruppe A.

Die m inf. Transformationen $C_i(f)$ genügen Relationen der Form

$$(J)\quad C_i\,C_k(f) - C_k\,C_i(f) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{ik}\,C_j(f) \qquad i, k = 1, 2, \ldots m$$

Aus der Art, wie die m_0 ersten inf. Transformationen gewählt worden sind, folgt, dass

$$\varepsilon_j^{ik} = 0 \quad \text{für } i, k = 1, 2, \ldots m_0 \text{ und } j = 1, 2, \ldots m$$

Zwischen drei inf. Transformationen besteht die Jacobi'sche Identität[2])

---

1) Diese Zahl m_0 stimmt mit der Zahl überein, die H. Killing als Rang der Gruppe bezeichnet. Math. Annalen Bd. 33.

5) Lie, Transformationsgruppen I S. 94.

$$C_h(C_i C_k - C_k C_i) - (C_i C_k - C_k C_i) C_h + C_i(C_k C_h - C_h C_k)$$
$$- (C_k C_h - C_h C_k) C_i + C_k(C_h C_i - C_i C_h) - (C_h C_i - C_i C_h) C_k = 0$$

Sind i und k Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0$, so ist $C_i C_k - C_k C_i = 0$ und es folgt mit Rücksicht auf (J)

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{kh} (C_i C_j - C \;\, C_i) + \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j^{hi} (C_k C_j - C_j C_k) = 0$$

und hieraus weiter

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} (\varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij} + \varepsilon_j^{hi} \varepsilon_l^{kj}) C_l = 0$$

Die m inf. Transformationen $C_l(f)$ sind untereinander linear unabhängig, ferner ist $\varepsilon_j^{hi} = - \varepsilon_j^{ih}$ folglich ist

$$\sum_{j=1}^{m} (\varepsilon_j^{ih} \varepsilon_l^{kj} - \varepsilon_j^{kh} \varepsilon_l^{ij}) = 0 \qquad \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \ldots m_0 \\ h, l = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

Repräsentiren wir das System der m^2 Constanten ε_j^{hi} $(h, j = 1, 2, \ldots m)$ durch das Symbol E_i, so lassen sich die vorstehenden Gleichungen durch die symbolischen Gleichungen

$$E_i E_k - E_k E_i = 0 \qquad i, k = 1, 2, \ldots m_0$$

repräsentiren. Die zu einem der m_0 Systeme E_i gehörige charakteristische Determinante kann nur Elementartheiler erster Ordnung besitzen. Denn andernfalls könnte man zwei nicht identisch verschwindende inf. Transformationen der Gruppe $K(f)$ und $K'(f)$ so bestimmen, dass

$$C_i K(f) - K C_i(f) = \omega K(f)$$
$$C_i K'(f) - K' C_i(f) = \omega K'(f) + K(f)$$

Aber dies ist wegen des dritten Hülfssatzes des Art. II nicht möglich.

Demnach genügen die m_0 Systeme E_i den Voraussetzungen, auf denen der vierte Hülfssatz des Art. II beruht. Man kann also ein System von m^2 Constanten $\gamma_k^{(h)}$ mit nicht verschwindender Determinante so bestimmen, dass

$$\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_j^{ik} \gamma_k^{(h)} = \omega_h^{(i)} \gamma_j^{(h)} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, .. m_0 \\ h, j = 1, 2, .. m. \end{array}$$

Von den Gleichungen (J) benützen wir nun diejenigen, die einem der Indiceswerthe $i = 1, 2, .. m_0$ entsprechen, und setzen zur Abkürzung

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^{(h)} C_j(f) = K_h(f) \qquad h = 1, 2, .. m$$

Es ergibt sich

$$(\Omega) \quad C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, .. m_0 \\ h = 1, 2, .. m \end{array}$$

Weil $\varepsilon_j^{ik} = 0$ für $i, k = 1, 2, .. m_0$; $j = 1, 2, .. m$, so kann man die Grössen $\gamma_k^{(h)}$ so wählen, dass

$$\gamma_k^{(i)} = \binom{k}{i} \text{ für } i = 1, 2, .. m_0; \; k = 1, 2, .. m$$

Es ist dann $K_i(f) = C_i(f)$ für $i = 1, 2, .. m_0$ und $\omega_k^{(i)} = 0$ für $h, i = 1, 2, .. m_0$.

In dem aus m_0 Zeilen und m Spalten bestehenden System

$$\begin{array}{cccc} \omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & .. & \omega_m^{(1)} \\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & .. & \omega_m^{(2)} \\ . & . & . & . \\ \omega_1^{(m_0)} & \omega_2^{(m_0)} & .. & \omega_m^{(m_0)} \end{array}$$

haben also alle Elemente, die den ersten m_0 Spalten angehören, den Werth Null.

Es kann der Fall eintreten, dass noch weitere Spalten dieses Systems kein von Null verschiedenes Element enthalten. Es seien dies etwa die auf die ersten m_0 Spalten folgenden m_0' Spalten, dagegen möge in jeder weiteren Spalte wenigstens ein von Null verschiedenes Element vorkommen.

Jede inf. Transformation, deren Index $h > m_0 + m_0'$ ist, genügt somit einer Relation

$$C_i K_h(f) - K_h C_i(f) = \omega_h^{(i)} K_h(f) \qquad (i \leqq m_0)$$

wo $\omega_h^{(i)}$ von Null verschieden ist. Daraus folgt: jede inf. Transformation $K_h(f)$ $(h > m_0 + m_0')$ ist regulär von der ersten Art (Art. II Hülfssatz 2) und es folgt überdies: die Grössen $\omega_h^{(i)}$ sind ganze Zahlen. Denn $\omega_h^{(i)}$ muss gleich der Differenz von zweien der Werthe r sein, für welche die zu $C_i(f)$ gehörige charakteristische Determinante $\Delta_i(r)$ verschwindet (Art II Anfang). Diese Determinante verschwindet aber nur für ganzzahlige Werthe von r, weil $C_i(f)$ regulär von der zweiten Art ist.

Bezüglich $m - m_0'$ von den inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_m(f)$$

steht nunmehr fest, dass sie regulär sind, nämlich von den m_0 ersten und von dem $m - m_0 - m_0'$ letzten. Die ersteren sind von der zweiten, die letzteren von der ersten Art. Es bleiben nur noch die m_0' inf. Transformationen übrig, die den Indices $m_0 + 1, m_0 + 2, \ldots m_0 + m_0'$ entsprechen. Diese bedürfen einer besonderen Untersuchung, die im nächsten Art. durchgeführt wird.

Auf Grund der Formeln (Ω) kann nun die vorgelegte Gruppe in bemerkenswerther Weise in Untergruppen zerfällt werden. Zu diesem Zweck bilden wir zunächst — unter $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{m_0}$ ganze Zahlen verstehend — eine lineare Combination der inf. Transformationen zweiter Art

$$L(f) = \alpha_1 K_1(f) + \alpha_2 K_2(f) \ldots + \alpha_{m_0} K_{m_0}(f)$$

Aus den Gleichungen (Ω) folgt

$$L K_h(f) - K_h L(f) = \varrho_h K_h(f) \qquad h = 1, 2, \ldots m$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha_1 \omega_h^{(1)} + \alpha_2 \omega_h^{(2)} \ldots + \alpha_{m_0} \omega_h^{(m_0)} = \varrho_h$$

gesetzt ist.

Die zur Verfügung stehenden Zahlen α denken wir so gewählt, dass

1) ϱ_h nur dann $= 0$ ist, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = 0 \quad \omega_h^{(2)} = 0 \,.\,.\, \omega_h^{(m_0)} = 0$$

also wenn $h \leqq m_0 + m_0'$, und dass

2) zwei verschiedene Zahlen ϱ_h und ϱ_i nur dann einander gleich sind, wenn gleichzeitig

$$\omega_h^{(1)} = \omega_i^{(1)} \quad \omega_h^{(2)} = \omega_i^{(2)} \,.\,.\, \omega_h^{(m_0)} = \omega_i^{(m_0)}$$

Die Indicesbezeichnung denken wir uns so gewählt, dass in der Reihe der Zahlen

$$\varrho_{m_0+m_0'+1} \quad \varrho_{m_0+m_0'+2} \cdot\cdot \varrho_m$$

die positiven den negativen und, unter Zahlen gleichen Vorzeichens, die dem absoluten Werthe nach grösseren den kleineren vorangehen. m_+ sei die Anzahl der positiven, m_- die Anzahl der negativen ϱ.

Bilden wir nun die Jacobi'sche Relation für die inf. Transformationen $K_h(f)$ $K_j(f)$ $L(f)$. Sie lautet:

$$L(K_h K_j - K_j K_h) - (K_h K_j - K_j K_h) L + K_h(K_j L - L K_j) \\ - (K_j L - L K_j) K_h + K_j (L K_h - K_h L) \\ - (L K_h - K_h L) K_j = 0.$$

Die 4 letzten Glieder ergeben

$$-(\varrho_j + \varrho_h)(K_h K_j - K_j K_h)$$

Sei nun $K_h K_j - K_j K_h = \delta_1 K_1 + \delta_2 K_2 \,.\,.\, + \delta_m K_m$ wo $\delta_1 \delta_2 \,.\,.\, \delta_m$ Constante bedeuten, die in leicht zu übersehender Weise von den Constanten ε_j^{α}, die in den Gleichungen (J) vorkommen, abhängen.

Nun erhält die Jacobi'sche Relation die Form

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i (L K_i - K_i L) - (\varrho_j + \varrho_h) \sum_{i=1}^{m} \delta_i K_i = 0$$

oder auch

$$\sum_{i=1}^{m} (\varrho_i - \varrho_j - \varrho_h)\, \delta_i K_i = 0$$

Weil die inf. Transformationen K_i untereinander linear unabhängig sind, so folgt hieraus

$$\delta_i = 0, \text{ wenn nicht } \varrho_i = \varrho_j + \varrho_h \text{ ist.}$$

Nehmen wir zunächst an, j und h seien Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$. Dann ist $\varrho_j = 0$ $\varrho_h = 0$ also $\delta_i = 0$ wenn nicht auch $\varrho_i = 0$.

In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen in diesem Fall nur die inf. Transformationen

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen bestimmen also für sich eine Gruppe Γ, die die m_0-gliedrige Gruppe A_0 als Untergruppe enthält.

Nehmen wir zweitens an, j und h seien Zahlen aus der Reihe $m_0 + m_0' + 1$, $m_0 + m_0' + 2, \ldots m_0 + m_0' + m_+$, dann sind ϱ_j und ϱ_h positiv, also ist $\delta_i = 0$, wenn nicht auch ϱ_i positiv ist. Da ferner die positiven ϱ nach absteigender Grösse geordnet sind, so kann die Gleichung $\varrho_i = \varrho_j + \varrho_h$ nur dann bestehen, also nur dann δ_i von Null verschieden sein, wenn der Index i grösser als der grössere der beiden Indices j, h ist. In dem Ausdruck $K_h K_j - K_j K_h$ kommen also nur solche inf. Transformationen K_i vor, die positiven Werthen ϱ_i entsprechen und deren Index grösser als der grössere der beiden Indices j, h ist. Demnach bestimmen die m_+ inf. Transformationen, die zu positiven Werthen ϱ gehören, für sich eine Gruppe erster Classe A_+ (vergl. Art. V Schluss) und sie bilden ein kanonisches System inf. Transformationen derselben.

Ebenso bestimmen die m_- inf. Transformationen, die zu negativen Werthen von ϱ gehören, für sich eine Gruppe A_- und bilden für dieselbe ein kanonisches System.

Nehmen wir endlich drittens für h eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots m_0 + m_0'$, für j eine Zahl aus der Reihe

$m_0 + m_0' + 1,\ m_0 + m_0' + 2, \ldots m_0 + m_0' + m_+$, so ist $\varrho_h = 0$ ϱ_j positiv und aus $\varrho_i = \varrho_h + \varrho_j$ folgt $\varrho_i = \varrho_j$ also auch ϱ_i positiv.

Man schliesst hieraus: die inf. Transformationen, die zu verschwindenden, und diejenigen, die zu positiven Werthen ϱ gehören, bestimmen zusammengenommen eine Gruppe. Mit anderen Worten: die $m_0 + m_0'$-gliedrige Gruppe Γ und die m_+-gliedrige Gruppe A_+ setzen sich zu einer Gruppe H zusammen, deren Gliederzahl $m_0 + m_0' + m_+ = m - m_-$ ist.

VII.

Die Untergruppe Γ bedarf einer eingehenderen Untersuchung.

Von den zu dieser Untergruppe gehörigen inf. Transformationen

$$K_i(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu \qquad i = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'$$

wissen wir:

1) Die ersten m_0 derselben

$$K_1(f)\ K_2(f) \ldots K_{m_0}(f)$$

sind regulär von der zweiten Art und sie bestimmen für sich eine Untergruppe A_0.

2) Diese m_0 inf. Transformationen sind mit allen inf. Transformationen der Untergruppe Γ vertauschbar, es ist also

$$K_i K_h(f) - K_h K_i(f) = 0$$
$$\text{für } i = 1, 2, \ldots m_0; \ h = 1, 2, \ldots m_0 + m_0'.$$

In nicht symbolischer Form geschrieben heisst das:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(i)} k_{\nu\mu}^{(h)} - k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(i)} \right) = 0$$

für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots n$ und die eben angegebenen Werthe der Indices i, h.

Da die $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen eine Gruppe bestimmen, so bestehen weitere Relationen der Form

$$3) \quad \sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)} k_{\nu\mu}^{(h)} \right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{lh} k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. m_0 + m_0'.$$

Wir werden nun beweisen: die m_0' inf. Transformationen $K_{m_0+1}(f)$ $K_{m_0+2}(f)$ .. $K_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass sie für sich eine m_0'-gliedrige Gruppe A_0' bestimmen, die der ersten Classe angehört. Ist dies erwiesen, so ist klar, dass die genannten inf. Transformationen so gewählt werden können, dass sie ein kanonisches System bilden.

Zum Beweise bemerken wir zunächst:

Die Coefficienten der m_0 inf. Transformationen

$$K_1(f) \; K_2(f) \, .. \, K_{m_0}(f)$$

genügen den Voraussetzungen des vierten Hülfssatzes des Art. II. Man kann also ein System von n^2 Grössen $d_\lambda^{(\sigma)}$ mit nicht verschwindender Determinante derart bestimmen, dass

$$\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} d_\mu^{(\sigma)} = r_\sigma^{(i)} d_\lambda^{(\sigma)} \qquad \lambda = 1, 2, .. n; \; i = 1, 2, .. m_0$$

Wir führen nun neue Variable durch die Substitution

$$(S) \quad x_\lambda = \sum_{\sigma=1}^{n} d_\lambda^{(\sigma)} y_\sigma \qquad \lambda = 1, 2, .. n$$

ein, wodurch die inf. Transformation $K_h(f)$ in

$$\bar{K}_h(f) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \bar{k}_{\lambda\mu}^{(h)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda} y_\mu$$

übergehen möge. Auf Grund des Weierstrass'schen Theorems stimmen die zu $K_h(f)$ und $\bar{K}_h(f)$ gehörigen charakteristischen Determinanten in ihren Elementartheilern überein. Diese beiden inf. Transformationen sind also gleichzeitig regulär

oder irregulär. Es ist ferner klar, dass zwischen den inf. Transformationen $\overline{K}_h(f)$ genau dieselben Relationen (2) und (3) bestehen, wie zwischen den inf. Transformationen $K_h(f)$.

Nun ist für $i = 1, 2, .. m_0$

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\mu = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} k_{\lambda\mu}^{(i)} d_\mu^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} y_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n} r_\sigma^{(i)} \frac{\partial f}{\partial y_\sigma} y_\sigma$$

$$\text{also } \overline{k}_{\lambda\mu}^{(i)} = \binom{\lambda}{\mu} r_\lambda^{(i)}$$

und aus (2)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\overline{k}_{\lambda\nu}^{(i)} \overline{k}_{\nu\mu}^{(h)} - \overline{k}_{\lambda\nu}^{(h)} \overline{k}_{\nu\mu}^{(i)}\right) = 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, .. m_0 \\ h = m_0 + 1, m_0 + 2 .. m_0 + m_1 \end{matrix}$$

folgt: $\overline{k}_{\lambda\mu}^{(h)} = 0$ wenn nicht $r_\lambda^{(i)} = r_\mu^{(i)}$ für $i = 1, 2, .. m_0$.

Ist also etwa

$$r_1^{(i)} = r_2^{(i)} .. = r_\varkappa^{(i)} \quad \text{für } i = 1, 2, .. m_0$$

aber für keinen Index $\nu > \varkappa$ gleichzeitig

$$r_\nu^{(i)} = r_1^{(i)} \qquad \text{für } i = 1, 2, .. m_0$$

so hängen die Coefficienten der Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ $\frac{\partial f}{\partial y_2} .. \frac{\partial f}{\partial y_\varkappa}$ in $\overline{K}_h(f)$ nur von $y_1\, y_2 .. y_\varkappa$ ab, und diese Variabeln kommen in den Coefficienten der übrigen Differentialquotienten nicht vor.

Die Variabeln $y_1\, y_2 .. y_\varkappa$ lassen sich also derart in eine Reihe von Systemen vertheilen, dass die Coefficienten der Differentialquotienten nach den Variabeln eines Systems nur von den Variabeln dieses Systems abhängen. Die Anzahl dieser Systeme sei q und die Anzahl der Variabeln, die dem σ^{ten} System angehören, sei n_σ. Dieselben mögen — unter Abänderung der bisher gebrauchten Bezeichnung — mit

$$y_1^{(\sigma)}\; y_2^{(\sigma)} .. y_{n_\sigma}^{(\sigma)}$$

bezeichnet werden.

Es ergeben sich nun für unsere $m_0 + m_0'$ inf. Transformationen Ausdrücke folgender Gestalt:

$$\bar{K}_i(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} R_\sigma^{(i)} y_\lambda^{(\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} \qquad i = 1, 2, \ldots m_0$$

$$\bar{K}_h(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(h\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)}$$

$$h = m_0 + 1,\ m_0 + 2 \ldots m_0 + m_0'$$

Wir beweisen nun zunächst: die m_0' inf. Transformationen $\bar{K}_{m_0+1}(f)\ \bar{K}_{m_0+2}(f) \ldots \bar{K}_{m_0+m_0'}(f)$ können so gewählt werden, dass eine jede derselben regulär von der ersten Art ist.

Zu dem Zweck bemerken wir, dass unter den genannten Transformationen keine vorkommen kann, die regulär von der zweiten Art ist. Denn eine solche müsste von $\bar{K}_1(f)\ \bar{K}_2(f) \ldots \bar{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig und mit jeder dieser inf. Transformationen vertauschbar sein. Es gäbe also entgegen unserer Voraussetzung (Art. VI Anfang) in der Gruppe A mehr als m_0 linear unabhängige inf. Transformationen zweiter Art, die paarweise vertauschbar sind. Eine jede der m_0' Transformationen $\bar{K}_h(f)$ ist also entweder regulär von der ersten Art oder irregulär.

Nehmen wir an, die inf. Transformation $\bar{K}_h(f)$ sei irregulär. Man kann dann (s. Einleitung) eine reguläre Transformation erster Art $L(f)$ und eine gewisse Anzahl regulärer Transformationen zweiter Art $L_1(f)\ L_2(f) \ldots$ so bestimmen, dass

$$\bar{K}_h(f) = L(f) + \varrho_1 L_1(f) + \varrho_2 L_2(f) \ldots + \varrho_\beta L_\beta(f).$$

In den inf. Transformationen $L(f)\ L_1(f)\ L_2(f) \ldots$ sind — wie man sich leicht überzeugt[1]) — die Variabeln in genau derselben Weise getrennt, wie in $\bar{K}_h(f)$, und daraus

1) Vergl. die Inv. S. 123 gegebenen Formeln.

folgt, dass eine jede der inf. Transformationen $L(f)$ $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. mit den inf. Transformationen $\bar{K}_1(f)$ $\bar{K}_2(f)$ .. $\bar{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist. Weil unsere Gesammtgruppe A regulär ist, so gehört ihr eine jede der regulären Transformationen an (s. Einleitung), in die die irreguläre Transformation $\bar{K}_k(f)$ zerlegt worden ist, und weil eine jede der regulären Transformationen zweiter Art $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. mit $\bar{K}_1(f)$ $\bar{K}_2(f)$ .. $\bar{K}_{m_0}(f)$ vertauschbar ist, so kann keine der Transformationen $L_1(f)$ $L_2(f)$ .. von $\bar{K}_1(f)$ $\bar{K}_2(f)$ .. $\bar{K}_{m_0}(f)$ linear unabhängig sein. Denn sonst gehörten gegen unsere Voraussetzung der Gruppe A mehr als m_0 untereinander linear unabhängige reguläre Transformationen zweiter Art an, die paarweise vertauschbar sind. Man kann nun offenbar die der Gruppe Γ angehörige irreguläre Transformation $\bar{K}_k(f)$ durch die ebenfalls der Gruppe Γ angehörige reguläre Transformation erster Art $L(f)$ ersetzen.

Nachdem die Zulässigkeit dieser Annahme bewiesen ist, setzen wir nunmehr jede der inf. Transformationen $\bar{K}_{m_0+1}(f)$ $\bar{K}_{m_0+2}(f)$ .. $\bar{K}_{m_0+m_0'}(f)$ als regulär von der ersten Art voraus.

Damit die inf. Transformation

$$\bar{K}_k(f) = \sum_{\sigma=1}^{q} \left(\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\mu}^{(k\sigma)} \frac{\partial f}{\partial y_\lambda^{(\sigma)}} y_\mu^{(\sigma)} \right)$$

regulär von der ersten Art ist, muss jedes der q Coefficientensysteme $k_{\lambda\mu}^{(k\sigma)}$ $(\lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma)$ regulär von der ersten Art sein. In der Entwicklung der charakteristischen Determinante

$$| k_{\lambda\mu}^{(k\sigma)} - \binom{\lambda}{\mu} r | \qquad \lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma$$

nach Potenzen von r verschwinden also die Coefficienten aller Potenzen von r, abgesehen von r^{n_σ}, und es ist insbesondere

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h = m_0 + 1, \; m_0 + 2 .. \; m_0 + m_0'$$

Die unter (3) angegebenen Relationen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(k_{\lambda\nu}^{(h)} k_{\nu\mu}^{(l)} - k_{\lambda\nu}^{(l)} k_{\nu\mu}^{(h)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\lambda\mu}^{(j)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

gelten, wie bereits oben bemerkt worden ist, unverändert für die Coefficienten der transformirten inf. Transformationen.

Es ist also

$$\sum_{\nu=1}^{n_\sigma} \left(k_{\lambda\nu}^{(h\sigma)} k_{\nu\mu}^{(l\sigma)} - k_{\lambda\nu}^{(l\sigma)} k_{\nu\mu}^{(h\sigma)}\right) = \sum_{j=1}^{m_0+m_0'} \delta_j^{hl} k_{\nu\mu}^{(j\sigma)}$$

$$\lambda, \mu = 1, 2, .. n_\sigma; \; \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. m_0 + m_0'$$

und hieraus folgen für $\lambda = \mu$, wegen

$$\sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = 0 \qquad \text{für } h = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'$$

$$\text{und} \quad \sum_{\lambda=1}^{n_\sigma} k_{\lambda\lambda}^{(h\sigma)} = n_\sigma R_\sigma^{(h)} \qquad \text{für } h = 1, 2, .. \; m_0$$

die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{m_0} \delta_j^{hl} R_\sigma^{(j)} = 0 \qquad \sigma = 1, 2, .. q; \; h, l = m_0 + 1, m_0 + 2, .. m_0 + m_0'$$

Weil die inf. Transformationen

$$\overline{K}_1(f) \; \overline{K}_2(f) \, .. \; \overline{K}_{m_0}(f)$$

linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$\delta_j^{hl} = 0 \;\; \text{für } h, l = m_0 + 1, \; m_0 + 2, .. \; m_0 + m_0'; \quad \text{und } j = 1, 2 .. m_0$$

In dem Ausdruck $\overline{K}_h \overline{K}_l(f) - \overline{K}_l \overline{K}_h(f)$ kommen demnach nur die inf. Transformationen

$$\overline{K}_{m_0+1}(f) \; \overline{K}_{m_0+2}(f) \, .. \; \overline{K}_{m_0+m_0'}(f)$$

vor. Diese m_0' inf. Transformationen bestimmen demnach für sich eine Gruppe A_0' und diese Gruppe gehört nothwendig der ersten Classe an. Denn die m_0'-gliedrige Gruppe A_0' ist regulär, weil sie m_0' linear unabhängige reguläre Transformationen enthält, und sie kann keine reguläre Transformation zweiter Art enthalten.

VIII.

Damit ist auch für die regulären Gruppen der dritten Classe ein kanonisches System inf. Transformationen nachgewiesen. Die m inf. Transformationen dieses Systems vertheilen sich auf vier Untergruppen A_0 A_0' A_+ A_-. Jede dieser Untergruppen ist regulär, und zwar gehört die erste A_0 der zweiten Classe an, die drei übrigen gehören zur ersten Classe. Die inf. Transformationen, die einer dieser Untergruppen angehören, sind so gewählt, dass sie ein kanonisches System für die betreffende Untergruppe bilden.

Für alle vier Untergruppen gilt nun der Satz:

Die Parameter der Gruppe lassen sich rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen.

Für die drei Gruppen erster Classe gilt überdies der Satz: Unter den Potenzen einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe kommt die identische Substitution nicht vor.

Wir haben nun weiter bewiesen:

Die Untergruppen A_0 und A_0' setzen sich zu einer Untergruppe Γ zusammen.

Die Untergruppen Γ und A_+ setzen sich zu einer Untergruppe H zusammen.

Endlich entsteht die m-gliedrige Gruppe A selbst durch Zusammensetzung von H und A_-. Durch Anwendung der Principien des Art. IV beweist man nun erst für die Unter-

gruppe Γ, dann für die Untergruppe H, endlich für die Gruppe A selbst den zu beweisenden Satz, dass sich die Parameter der Gruppe rational durch die Coefficienten der allgemeinen Substitution der Gruppe darstellen lassen.

Dass eine Gruppe A im Allgemeinen aus drei Untergruppen $\Gamma\, A_+\, A_-$ zusammengesetzt werden kann, ergibt sich unmittelbar aus den sehr interessanten Sätzen des H. Killing über die Zusammensetzung von Gruppen.[1]) Für die hier verfolgten Zwecke konnten aber diese Sätze nicht benützt werden. Denn H. Killing beschränkt sich darauf, die Zusammensetzung der Gruppe zu untersuchen, und geht auf die Natur der einzelnen inf. Transformationen nicht weiter ein, während gerade diese für die vorliegende Untersuchung von wesentlicher Bedeutung ist. So gehören — solange man nur die Zusammensetzung der Gruppen in Betracht zieht — die Gruppen, die hier als Gruppen erster und zweiter Classe unterschieden worden sind, in dieselbe Kategorie: sie sind beide Gruppen vom Rang Null.

Sobald man aber die Substitutionen der Gruppe und die zugehörigen Invariantensysteme genauer untersucht, zeigen sie die allergrösste Verschiedenheit.

---

1) Math. Annalen, Bd. 31, 33, 34, 36.

Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome.

Von Gustav Bauer.

(*Eingelaufen 4. August.*)

Das Legendre'sche Polynom n^{ten} Grades sei nach Legendrescher Bezeichnung durch X_n bezeichnet; dann ist X_n Coefficient von z^n in der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots$$

und es berechnet sich hieraus

$$X_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right) \qquad \text{I.}$$

Diese Formel kann als Definition von X_n für jeden Werth von x gelten. Nun sagt Heine in seinem „Handbuch der Kugelfunktionen" 1. Aufl. 1861, S. 7: „Nach der Bemerkung von Euler in einem Briefe an Goldbach, dass in der Entwicklung von $\sqrt[n]{1-n^2 a}$ nach aufsteigenden Potenzen von a alle Coefficienten von a ganze Zahlen werden, erkennt man sofort, dass X_n nur eine Potenz von 2 zum numerischen Nenner hat", indem er beifügt, dass ihm diese Eigenschaft der Polynome X_n von mir mitgetheilt worden sei.[1])

1) In der 2. Auflage seines Handbuchs, I. Th. S. 14, kommt Heine auf diese Eigenschaft der Polynome X_n zurück. Man kann hinzufügen,

Diese Bemerkung in Bezug auf die Coefficienten der Form I und der bekannte Satz, dass alle Polynome X_n für $x = 1$ den Werth 1 annehmen, ist, so viel ich weiss, das einzige, was bisher in zahlentheoretischer Beziehung von diesen Polynomen bekanntgegeben wurde.

Es soll nun hier zunächst gezeigt werden, dass diese Polynome auch die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzen, dass, wenn x irgend eine ungerade ganze Zahl ist, sie selbst ungerade ganze Zahlen sind.

2. Die Polynome X_n genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 X_n}{d x^2} - 2x\frac{d X_n}{d x} + n(n+1) X_n = 0 \qquad \text{II.}$$

Differentiirt man diese Gleichung wiederholt und setzt sodann in diesen Gleichungen $x = 1$, so ergiebt sich sofort die Relation

$$\frac{d^m X_n}{d x^m} = \frac{n(n+1) - m(m-1)}{2m} \cdot \frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}} = \frac{(n-m+1)(n+m)}{2m} \frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}}$$

und hiemit, da $X_n = 1$ für $x = 1$,

$$\frac{d X_n}{d x} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{d^2 X_n}{d x^2} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 3},$$

$$\frac{d^3 X_n}{d x^3} = \frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \quad \text{u. s. f.}$$

Mittels dieser Werthe erhält man die Entwicklung

$$X_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4}\frac{(x-1)^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{(x-1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

---

sagt er hier, „dass sämmtliche Coefficienten mit 4^n multiplicirt ganze Zahlen sind". Diese Angabe ist nicht genau. Denn man beweist leicht mittelst dem in n^0 4 angegebenen Verfahren, dass die Coefficienten der Formel I höchstens 2^{n-1} im Nenner haben.

welche sich auch schreiben lässt

$$X_n = 1 + \frac{n(n+1)}{1^2}\frac{x-1}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \cdots \qquad (1)$$

Die Coefficienten von $\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$ in dieser Entwicklung wollen wir mit $A_n^{(k)}$ bezeichnen, so dass

$$X_n = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x-1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \qquad (1')$$

wo allgemein

$$A_n^{(k)} = \frac{(n-k+1)(n-k)\cdots(n+k)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}. \qquad (2)$$

Setzt man in dieser Reihe $-x$ statt x, so hat man zugleich

$$(-1)^n X_n = 1 - A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - + \cdots \qquad (3)$$

und wenn man in 1) $x+2$ statt x setzt,

$$X_{n(x+2)} = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots \qquad (4)$$

Also ist auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} + (-1)^n X_n\right) &= 1 + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \\ &\quad + A_n^{(4)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^4 + \cdots \\ \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} - (-1)^n X_n\right) &= A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &\quad + A_n^{(3)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Aus Gleichung 3) folgt sofort für $x=1$, dass die Coefficienten A_n der Relation genügen

$$1-A_n^{(1)}+A_n^{(2)}-+\cdots\pm A_n^{(n)}=(-1)^n \qquad (6)$$

3. Es soll nun bewiesen werden, dass die Coefficienten A_n sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.[1])

Hiezu haben wir zunächst zu fragen, wie oft eine gegebene Primzahl θ in dem Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdots N$ enthalten ist. Diese Frage ist schon von Legendre[2]) beantwortet. Ist nämlich $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$ die grösste ganze Zahl, welche in dem Bruch $\frac{N}{\theta}$ enthalten ist, so ist die gesuchte Zahl, d. i. der Exponent der höchsten Potenz von θ, welche in $1\cdot 2\cdots N$ enthalten ist, durch die Formel gegeben

$$\sigma=E\left(\frac{N}{\theta}\right)+E\left(\frac{N}{\theta^2}\right)+E\left(\frac{N}{\theta^3}\right)+\cdots,$$

wo die Reihe fortzusetzen ist, bis der Nenner θ^i grösser als N wird.

Theilt man nun N in zwei oder mehrere ganze Zahlen, z. B. in die drei Zahlen n, n', n'', sodass $N=n+n'+n''$,

---

1) Setzt man in den Gleichungen 1) 3) $x=\cos\alpha$, $\frac{1-x}{2}=\sin^2\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1+x}{2}=\cos^2\frac{1}{2}\alpha$, so werden dieselben

$$X_n(\cos\alpha)=1-A_n^{(1)}\sin^2\frac{1}{2}\alpha+A_n^{(2)}\sin^4\frac{1}{2}\alpha-+\cdots$$

$$(-1)^n X_n(\cos\alpha)=1-A_n^{(1)}\cos^2\frac{1}{2}\alpha+A_n^{(2)}\cos^4\frac{1}{2}\alpha-+\cdots$$

In dieser Form sind die Gleichungen längst bekannt und schon von Dirichlet gegeben worden (Crelle J. Bd. XVII). Aber man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die Coefficienten dieser Reihen sämmtlich ganze Zahlen sind, was allerdings auch wenig Interesse bietet, so lange man die Polynome X nur für Werthe von $x<1$ betrachtet.

2) Legendre, Théorie des Nombres, 3me éd. 1830, T. I p. 10.

so ist klar, dass $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ nicht kleiner sein kann als $E\left(\frac{n}{\theta^i}\right)$ $+E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right)+E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$; wohl aber kann es grösser als diese Summe sein; denn bleiben bei der Division von n, n', n'' durch θ^i die Reste α, β, γ und ist $\alpha+\beta+\gamma>\theta^i$, so wird $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ um 1 oder auch 2 grösser sein, als diese Summe. Hieraus folgt, dass für irgend eine Primzahl θ

$$\Sigma E\left(\frac{N}{\theta^i}\right) \geqq \Sigma E\left(\frac{n}{\theta^i}\right)+\Sigma E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right)+\Sigma E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$$

die Summen auf die Potenzen von θ ausgedehnt, die in N enthalten sind.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz[1]): I n d e m A u s d r u c k

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\cdots}, \quad \text{wo } N=n+n'+n''+\cdots,$$

i s t j e d e i n d e m N e n n e r e n t h a l t e n e P r i m z a h l w e n i g s t e n s e b e n s o o f t i m Z ä h l e r e n t h a l t e n a l s i m N e n n e r u n d d e r A u s d r u c k s t e l l t m i t h i n e i n e g a n z e Z a h l d a r.

Der Coefficient $A_n^{(k)}$ kann nun auf diese Form gebracht werden, nämlich

$$A_n^{(k)}=\frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$$

Es ist hier $N=n+k$, und diese Zahl ist in die 3 Theile $n-k$, k, k, zerlegt. Also ist $A_n^{(k)}$ e i n e g a n z e Z a h l.

4. In dem besonderen Falle, wenn $\theta=2$, ist für $N=2^p$ die Zahl $\sigma=2^p-1$. Nun kann aber irgend eine Zahl N in der Form

$$N=2^p+2^q+2^r+\cdots, \qquad p>q>r\cdots$$

dargestellt werden, und die Anzahl der Faktoren 2, welche in dem Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots N$ enthalten sind, ist also $N-h$,

---

1) Unter $N!$ ist hier das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots N$ zu verstehen.

wenn h die Anzahl der Glieder 2^p, $2^q \cdots$ in N ist (Legendre a. a. O. p. 12).

Frägt man nun, wie oft der Faktor 2 in

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!} \qquad (N = n + n' + n'')$$

vorkommt, so ersieht man, dass der ungünstigste Fall eintritt, wenn n, n', n'' selbst Potenzen von 2 sind, $n = 2^p$, $n' = 2^q$, $n'' = 2^r$, also $N = 2^p + 2^q + 2^r$; in diesem Falle ist der Faktor 2 nämlich im Zähler und im Nenner $N - 3$ mal enthalten und die Zahl $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ enthält den Faktor 2 gar nicht, und ist also eine ungerade Zahl. Eine Ausnahme hievon tritt ein, wenn zwei der Zahlen n, n', n'' oder auch alle drei gleich sind; denn ist $n' = n'' = 2^q$, so ist $N = 2^p + 2^{q+1}$ und der Faktor 2 ist dann in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdots N$ noch $N - 2$ mal enthalten, während er im Nenner $n!\,n'!\,n''!$ nur $N - 3$ mal enthalten ist. Aber man sieht, dass ähnliches eintritt, sowie überhaupt zwei der Zahlen n, n', n'' gleich sind. Ist $n' = n'' = 2^v + 2^w + \cdots$ und i die Anzahl dieser Glieder 2^v, $2^w \cdots$ so wird $N!$ die Zahl 2 wenigstens i-mal öfter enthalten, als der Nenner $n!\,n'!\,n''! \cdots$ und man kann daher obigen Satz dahin ergänzen:

Sind in dem Ausdruck

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\ldots} \qquad (N = n + n' + n'' + \cdots)$$

zwei (oder mehrere) der Zahlen n, n', n'', $\cdots$ gleich, so ist derselbe eine ganze gerade Zahl.

Dieser Fall tritt ein bei dem Coefficienten $A_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$ und folglich ist dieser Coefficient immer eine gerade Zahl.

5. Setzt man in den Gleichungen 1) 3) für x irgend eine ungerade ganze Zahl, $x = 2y + 1$, so werden dieselben

$$\left.\begin{aligned} X_{n(2y+1)} &= 1 + A_n^{(1)} y + A_n^{(2)} y^2 + \cdots + A_n^{(n)} y^n \\ (-1)^n X_{n(2y+1)} &= 1 - A_n^{(1)} (y+1) + A_n^{(2)} (y+1)^2 + \cdots \\ &\quad \pm A_n^{(n)} (y+1)^n \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

woraus die in Nr. 1 angegebene Eigenschaft dieser Polynome X_n hervorgeht, dass sie ganze ungerade Zahlen werden, wenn für x irgend eine ungerade Zahl $2y+1$ gesetzt wird. Zugleich ersieht man, dass dieselben sowohl nach Potenzen von y, als auch nach Potenzen von $y+1$ in ganzzahlige Reihen entwickelt werden können.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner, dass für $x=2y+1$

$$X_n - X'_n$$

für irgend welche Indices n, n' immer durch y theilbar ist, und ebenso, dass, je nachdem n, n' gleichartig oder ungleichartig sind, im ersten Falle

$$X_n - X'_n,$$

im zweiten

$$X_n + X'_n$$

durch $y+1$ theilbar sind.

Aus den Gleichungen 5) folgt für $x=2y-1$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(X_{n(2y+1)} + (-1)^n X_{n(2y-1)}\right) \\ &\quad = 1 + A_n^{(2)} y^2 + A_n^{(4)} y^4 + \cdots \\ &\frac{1}{2}\left(X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}\right) \\ &\quad = A_n^{(1)} y + A_n^{(3)} y^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

woraus ersichtlich, dass auch

$$X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}$$

immer durch y theilbar ist.

Wenn nun aber x eine gerade Zahl ist, so zeigen die Gleichungen 1) und 3), dass sich X_n nur ausnahmsweise

auf eine ganze Zahl reduciren wird.[1]) Da das höchste Glied der Reihe 1) $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ ist, so steht darin 2^n im Nenner; aber

$$A_n^{(n)}=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

hat, wenn $n=2^p+2^q\,2^r+\cdots$ mit i-Gliedern ist und also $2n=2^{p+1}+2^{q+1}+2^{r+1}+\cdots$, nach Nr. 4 $(2n-i)-(n-i)-(n-i)=i$ Faktoren 2, so dass in $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ nur noch 2^{n-i} im Nenner bleibt. Nur wenn n eine Potenz von 2 ist, also $i=1$, bleibt noch 2^{n-1} im Nenner. Das vorletzte Glied $A_n^{(n-1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}$ kann in jedem Falle höchstens 2^{n-2} im Nenner behalten; das drittletzte höchstens nur 2^{n-3} u. s. f. Man sieht also, dass, wenn x eine gerade Zahl ist, X_n höchstens den Nenner 2^{n-1} haben kann; dies wird aber nur eintreten, wenn n eine Potenz von 2 ist; in allen andern Fällen hat X_n, wenn x eine ganze gerade Zahl ist, 2^{n-2} oder eine niedrigere Potenz von 2 im Nenner.

6. Da, wenn n gerade, X_n nur gerade Potenzen von x enthält, und dasselbe von $\frac{X_n}{x}$ gilt, wenn n ungerade, so lassen sich diese Polynome auch nach Potenzen von x^2-1 entwickeln. Man erhält für gerade n

$$X_n=1+a_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)+a_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2+\cdots+a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{9}$$

wo

$$a_n^{(1)}=\frac{n(n+1)}{1^2},\quad a_n^{(2)}=\frac{(n-2)\,n\cdot(n+1)(n+3)}{1^2\cdot 2^2},\ \cdots$$

1) Dies tritt z. B. ein für $n=3$.

allgemein

$$a_n^{(k)} = \frac{(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots n\cdot(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2},$$

Für ungerade n

$$\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right) + b_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2 + \cdots$$
$$+ b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \tag{10}$$

wo

$$b_n^{(1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{1^2},\; b_n^{(2)} = \frac{(n-3)(n-1)\cdot(n+2)(n+4)}{1^2\cdot 2^2},\ldots$$

allgemein

$$b_n^{(k)} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+3)\cdots(n-1)\cdot(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}$$

Die Coefficienten a, b in diesen Reihen sind ebenfalls sämmtlich ganze und gerade Zahlen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Setzt man $x = 2y+1$, so wird $\frac{x^2-1}{4} = y(y+1)$ und man erhält also, wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, folgende ganzzahlige Reihenentwicklungen nach Potenzen von $y(y+1)$[1]:

---

1) Für $x = \cos\alpha$ erhält man aus den Gleichungen 9) 10) für gerade n

$$X_n(\cos\alpha) = 1 - a_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + a_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^n$$

für ungerade n

$$X_n(\cos\alpha) = \cos\alpha\left\{1 - b_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + b_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

Diese **einfachsten ganzzahligen** Entwicklungen von $X_n(\cos\alpha)$ sind, so viel ich weiss, bisher noch nicht gegeben worden.

für gerade n

$$X_n = 1 + a_n^{(1)} y(y+1) + a_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots \\ + a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}} (y+1)^{\frac{n}{2}} \tag{11}$$

für ungerade n

$$\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)} y(y+1) + b_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots \\ + b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}} (y+1)^{\frac{n-1}{2}} \tag{12}$$

Entwickelt man in 11) die Potenzen von $(y+1)$ und vergleicht sodann die Reihe mit der Reihe 7) so ergiebt sich

$$a_n^{(1)} = A_n^{(1)}, \quad a_n^{(2)} = A_n^{(2)} - a_n^{(1)} = A_n^{(2)} - A_n^{(1)},$$

und allgemein

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(2k)} &= a_n^{(k)} + \binom{k+1}{k-1} a_n^{(k+1)} + \binom{k+2}{k-2} a_n^{k+2} + \cdots + \binom{2k-1}{1} a_n^{(2k-1)} + a_n^{(2k)} \\ A_n^{(2k-1)} &= \binom{k}{k-1} a_n^{(k)} + \binom{k+1}{k-2} a_n^{(k+1)} + \cdots + \binom{2k-2}{1} a_n^{(2k-2)} + a_n^{(2k-1)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Da in diesen Recursionsformeln der höchste Coefficient a immer den Faktor 1 hat, so berechnet sich hieraus $a_n^{(2k)}$, resp. $a_n^{(2k-1)}$ durch eine Reihe der A_n mit ganzen Coefficienten. Also sind auch die a ganze gerade Zahlen.

Die Vergleichung der Coefficienten von y^n und y^{n-1} in den beiden Reihen 7) und 11) liefert

$$a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} = A_n^{(n)}, \quad \frac{n}{2} a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} = A_n^{(n-1)},$$

woraus

$$A_n^{(n-1)} = \frac{n}{2} A_n^{(n)} \tag{15}$$

sich ergiebt. Das Bildungsgesetz der A_n zeigt, dass diese Relation in der That stattfindet, und zwar für gerade und ungerade n. Es ist also auch $A_n^{(n-1)}$ immer durch n theilbar. Dies ist aber nur ein specieller Fall des allgemeinen Gesetzes, dass $A_n^{(k-1)}$ immer durch k theilbar ist. (Nr. 7.)

Ebenso giebt die Vergleichung der Reihe 12) mit der Reihe 7) Recursionsformeln für die Berechnung der b_n aus den A_n; dieselben sind wegen des Faktors $x = 2y + 1$ etwas complicirter als die Formeln 13) haben aber mit diesen die Eigenschaft gemein, dass der höchste Coefficient b_n in denselben den Faktor 1 hat. Man erhält also für die Coefficienten b_n ebenfalls eine Reihe der A_n mit ganzen Coefficienten. Also sind auch die b_n ganze gerade Zahlen.

Speciell ergiebt sich

$$b_n^{(1)} = A_1 - 2$$

und aus der Vergleichung der Coefficienten von y^{n-1} und y_n

$$n\, b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = A_{n-1}^{(n-1)}, \quad 2\, b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = A_n^{(n)}$$

Hieraus folgt zunächst wieder die Relation 14); ferner für den letzten Coefficienten b_n

$$b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{1}{2} A_n^{(n)} \tag{15}$$

Hiebei ist zu bemerken, dass, wie wir in Nr. 5 sahen, $A_n^{(n)}$ immer den Faktor 2 mehrfach enthält, ausgenommen, wenn n eine Potenz von 2 ist. Dieser Fall ist aber hier ausgeschlossen, da in der Reihe 12) n eine ungerade Zahl ist; also ist $b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ auch eine gerade Zahl.

7. Bildet man aus den Gleichungen 7) die Differenz $X_{n+1} - X_{n-1}$, so trennt sich in den Coefficienten der Faktor $2n+1$ los und man erhält für $x = 2y+1$

$$\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1}) = 2y + \mathfrak{A}_n^{(2)} y^2 + \mathfrak{A}_n^{(3)} y^3 + \cdots \\ + \mathfrak{A}_n^{(n+1)} y^{n+1} \tag{16}$$

oder auch

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}(X_{n+1}-X_{n-1}) = 2(y+1) - \mathfrak{A}_n^{(2)}(y+1)^2 + \mathfrak{A}_n^{(3)}(y+1)^3 - + \cdots \pm \mathfrak{A}_n^{(n+1)}(y+1)^{n+1}, \tag{17}$$

wo von $k = 2$ an

$$\mathfrak{A}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-k+2)(n-k+3)\cdots(n+k-1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}.$$

Dass trotz der Abtrennung des Faktors $2n+1$ aus der Differenz $A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}$ diese Coefficienten $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ wieder ganze gerade Zahlen sind, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Die Polynome X genügen der Relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \qquad \text{III.}$$

Hieraus zieht man leicht

$$\frac{1}{2n+1}(X_{n+1}-X_{n-1}) = \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1}$$

Ist x eine ungerade ganze Zahl, so sind die Zähler der Brüche auf beiden Seiten ganze gerade Zahlen; und da $2n+1$ und $n+1$ keinen Faktor gemein haben, so folgt, dass

$$X_{n+1} - X_{n-1} \quad \text{durch } 2n+1$$

und

$$xX_n - X_{n-1} \quad \text{durch } n+1$$

theilbar sind, wenn x eine ungerade Zahl. Da also die Reihen in den Gleichungen 16), 17) für alle ganze Zahlen y ganze gerade Zahlen darstellen, so lässt sich schliessen, dass auch die Coefficienten $\mathfrak{A}$ ganze und gerade Zahlen sind.

Dies lässt sich aber auch mittelst des Satzes in Nr. 3 erweisen. Denn es ist

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-k+1)!\,k!\,(k-1)!}$$

Nun sagt der Satz aus, dass $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ eine ganze Zahl ist, wenn $N = n + n' + n''$. In $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist $N = n + k - 1$, aber die Summe der drei Zahlen im Nenner ist $n + k = N + 1$. Der Satz lässt sich also nicht unmittelbar anwenden. Aber wenn eine Primzahl θ die Zahl k theilt, so theilt sie $k-1$ nicht und ist also ebenso oft in $(k-2)!$ enthalten, als in $(k-1)!$; theilt θ aber k nicht, so ist θ jedenfalls ebenso oft in $(k-1)!$ enthalten als in $k!$ Man kann daher bei der Bestimmung wie oft eine Primzahl θ in $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ als Faktor steht immer die Summe der drei Zahlen im Nenner um 1 verringern, d. h. auf N reduciren, und sodann wie in in Nr. 3 schliessen, dass jede Primzahl wenigstens so oft im Zähler steht als im Nenner. $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist also eine ganze gerade Zahl.

Hieraus ergiebt sich auch eine Eigenschaft der Coefficienten A_n. Denn die Vergleichung der Ausdrücke für $\mathfrak{A}_n$ und A_n liefert

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{1}{k} A_n^{(k-1)}$$

und, da $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n$ eine ganze Zahl, so folgt, dass die Zahl $A_n^{(k-1)}$ durch k theilbar ist.

8. Bekanntlich giebt $\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$ das Integral von X_n, so genommen, dass es für $x = 1$ verschwindet, d. h. es ist

$$\int_1 X_n \, dx = \frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$$

Die Gleichungen 16) 17) zeigen also, dass dieses Integral von X_n ebenfalls eine ganze Zahl ist (und zwar eine gerade), wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, und geben die Entwicklung dieser Zahl nach Potenzen von y oder $y+1$.

Man kann auch die Gleichungen 11) und 12) benützen, um eine Entwicklung des Integrals nach Potenzen von $y\,(y+1)$ zu erhalten.

Es ergiebt sich dann für $x = 2y+1$, wenn n ungerade

$$\int_1 X_n\,dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = 2y\,(y+1) + \mathfrak{a}_n^{(2)}\,y^2\,(y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{a}_n^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,y^{\frac{n+1}{2}}\,(y+1)^{\frac{n+1}{2}} \tag{18}$$

wo

$$\mathfrak{a}_n^{(2)} = 4\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{1^2\cdot 2^2},\quad \mathfrak{a}_n^{(3)} = 6\cdot\frac{(n-3)(n-1)\cdot(n+2)(n+4)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}$$

und allgemein von $k=2$ an

$$\mathfrak{a}_n^{(k)} = 2k\cdot\frac{(n-2k+3)(n-2k+5)\cdots(n-1)\cdot(n+2)(n+4)\cdots(n+2k-2)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}$$

Wenn n gerade

$$\int_1 X_n\,dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = (2y+1)\left\{2y\,(y+1) + \mathfrak{b}_n^{(2)}\,y^2\,(y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{b}_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\,y^{\frac{n}{2}}\,(y+1)^{\frac{n}{2}}\right\} \tag{19}$$

wo

$$\mathfrak{b}_n^{(2)} = 4\cdot\frac{(n-2)(n+3)}{1^2\cdot 2^2},\quad \mathfrak{b}_n^{(3)} = 6\cdot\frac{(n-4)(n-2)\cdot(n+3)(n+5)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}$$

und allgemein von $k=2$ an

$$\mathfrak{b}_n^{(k)} = 2k\cdot\frac{(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots(n-2)\cdot(n+3)(n+5)\cdots(n+2m-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}$$

Auch hier lässt sich wie oben (Nr. 6) erweisen, dass die Coefficienten $\mathfrak{a}_n^{(k)}$, $\mathfrak{b}_n^{(k)}$ sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.

9. Da der Differentialquotient von X_n durch die Formel

$$\frac{d\,X_n}{d\,x} = (2n-1)\,X_{n-1} + (2n-5)\,X_{n-2} + \cdots$$

gegeben ist, so folgt, dass, wenn x eine ungerade Zahl ist, auch $\frac{d\,X_n}{d\,x}$ eine ganze Zahl ist, und man sieht, dass sich diese Eigenschaft auch auf die höheren Differentialquotienten von X_n überträgt.

Das Polynom X_n hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn x eine ungerade ganze Zahl ist, nicht nur X_n selbst, sondern auch $\int_1 X_n\,d\,x$ und alle Differentialquotienten von X_n ganze Zahlen sind.

10. Es möge nun hier noch eine Tabelle der Entwicklungen von X_n nach den Gleichungen 7), 11), 12) und von $\int_1 X_n\,d\,x$ nach den Gleichungen 16—19) folgen. Es ist darin auf der linken Seite immer x durch $2\,y+1$ zu ersetzen.

$$X_1 = 1 + 2\,y$$
$$-X_1 = 1 - 2\,(y+1)$$
$$X_2 = 1 + 6\,y + 6\,y^2$$
$$+X_2 = 1 - 6\,(y+1) + 6\,(y+1)^2$$
$$X_3 = 1 + 12\,y + 30\,y^2 + 20\,y^3$$
$$-X_3 = 1 - 12\,(y+1) + 30\,(y+1)^2 - 20\,(y+1)^3$$
$$X_4 = 1 + 20\,y + 90\,y^2 + 140\,y^3 + 70\,y^4$$
$$+X_4 = 1 - 20(y+1) + 90(y+1)^2 - 140(y+1)^3 + 70(y+1)^4$$
$$X_5 = 1 + 2\cdot 15 y + 3\cdot 70\cdot y^2 + 4\cdot 140 y^3 + 5\cdot 126 y^4 + 6\cdot 42 y^5$$
$$X_6 = 1 + 2\cdot 21 y^2 + 3\cdot 140\cdot y + 4\cdot 420\cdot y^3 + 5\cdot 630\cdot y^4 + 6\cdot 462\cdot y^5 + 7\cdot 132\cdot y^6$$
$$X_7 = 1 + 2\cdot 28\,y + 3\cdot 252\cdot y^2 + 4\cdot 1050\cdot y^3 + 5\cdot 2310\cdot y^4 + 6\cdot 2772\cdot y^5 + 7\cdot 1716\cdot y^6 + 8\cdot 429\cdot y^7$$

* * *

$$\frac{X_1}{x} = 1$$

$$X_2 = 1 + 6\,y\,(y+1)$$

$$\frac{X_3}{x} = 1 + 10\,y\,(y+1)$$

$$X_4 = 1 + 20\,y\,(y+1) + 70\,y^2\,(y+1)^2$$

$$\frac{X_5}{x} = 1 + 28\,y\,(y+1) + 126\,y^2\,(y+1)^2$$

$$X_6 = 1 + 42\,y\,(y+1) + 378\,y^2\,(y+1)^2 + 924\,y^3\,(y+1)^3$$

$$\frac{X_7}{x} = 1 + 54\,y\,(y+1) + 594\,y^2\,(y+1)^2 + 1716\,y^3\,(y+1)^3$$

$$X_8 = 1 + 72\,y\,(y+1) + 1188\,y^2\,(y+1)^2 + 6864\,y^3\,(y+1)^3 + 12870\,y^4\,(y+1)^4$$

* * *

$$\int_1 X_1\,d\,x = \frac{1}{3}(X_2 - X_0) = 2\,y + 2\,y^2$$

$$-\int_1 X_1\,d\,x = 2\,(y+1) - 2\,(y+1)^2$$

$$\int_1 X_2\,d\,x = \frac{1}{5}(X_3 - X_1) = 2\,y + 6\,y^2 + 4\,y^3$$

$$+\int_1 X_2\,d\,x = 2\,(y+1) - 6(y+1)^2 + 4(y+1)^3$$

$$\int_1 X_3\,d\,x = \frac{1}{7}(X_4 - X_2) = 2\,y + 12\,y^2 + 20\,y^3 + 10\,y^4$$

$$-\int_1 X_3\,d\,x = 2(y+1) - 12(y+1)^2 + 20(y+1)^3 - 10\,(y+1)^4$$

$$\int_1 X_4\,d\,x = \frac{1}{9}(X_5 - X_3) = 2y + 20y^2 + 60y^3 + 70y^4 + 28y^5$$

$$+\int_1 X_4\,d\,x = 2(y+1) - 20(y+1)^2 + 60(y+1)^3 - 70\,(y+1)^4 + 28\,(y+1)^5$$

$$\int_1 X_5\,dx = \frac{1}{11}(X_6 - X_4) = 2y + 2\cdot 15 y^2 + 2\cdot 70 y^3 + 2\cdot 140 y^4 + 2\cdot 126\, y^5 + 2\cdot 42\, y^6$$

$$\int_1 X_6\,dx = \frac{1}{13}(X_7 - X_5) = 2y + 2\cdot 21 y^2 + 2\cdot 140 y^3 + 2\cdot 420 y^4 + 2\cdot 630\, y^5 + 2\cdot 462\, y^6 + 2\cdot 132\, y^7$$

* * *

$$\int_1 X_1\,dx = 2y(y+1)$$

$$\int_1 X_2\,dx = (2y+1)\cdot 2y(y+1)$$

$$\int_1 X_3\,dx = 2y(y+1) + 10y^2(y+1)^2$$

$$\int_1 X_4\,dx = (2y+1)\,[2y(y+1) + 14y^2(y+1)^2]$$

$$\int_1 X_5\,dx = 2y(y+1) + 28y^2(y+1)^2 + 84y^3(y+1)^3$$

$$\int_1 X_6\,dx = (2y+1)[2y(y+1) + 36y^2(y+1)^2 + 132y^3(y+1)^3]$$

$$\int_1 X_7\,dx = 2y(y+1) + 54y^2(y+1)^2 + 396y^3(y+1)^3 + 858y^4(y+1)^4$$

* * *

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1894.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. Band XV. 1893. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations 1886—87. 1893. fol.

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XVII, 2. 1893. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Monumenta. Vol. XXIV, XXV. 1893. 8⁰.
Starine. Vol. XXVI. 1893. 8⁰.
Ljetopis. 1893. 8⁰.
Rad. Band 116. 117. 1893. 8⁰.

New-York State Library in Albany:

73—75th annual Report. 1891—93. 8⁰.
State Library Bulletin. Legislation No. 4. January 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Augsburg:

Zeitschrift. Jahrg. XX. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

31. Bericht. 1894. 8⁰.

Texas Academy of Science in Austin:

Transactions. Vol. I, No. 2. 1893. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIII, No. 109—112. 1894. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XIV, No. 4. Vol. XV, No. 1—4. 1892/93. 8⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XIII. No. 4. Vol. XIV, No. 1—3. 1892/93. 8⁰.

Universität in Bonn:

Wendelin Förster, Freundesbriefe von Friedrich Diez. 1894. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preuss. Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 50. Jahrgang, II. Hälfte. 1893. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1893. No. 23, 24. 1894. No. 1—10. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 28. 1893. 4⁰.

Public Library in Boston:

Annual Report 1893. 1894. 8⁰.

Boston Society of Natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 26, part 1. 1893. 8⁰.
Memoirs. Vol. IV, No. XI. 1893. 4⁰.
Occasional Papers. No. IV. 1893. 8⁰.

Meteorologische Station in Bremen:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. 4. Jahrg. 1894. fol.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Bd. XIII, 1 und Extrabeilage. 1893/94. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Bd. 31. 1892. 1893. 8⁰.
XI. Bericht der meteorologischen Commission. 1893. 8⁰.

Académie Royale de Médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tom. 7, No. 10, 11. Tom. 8, No. 1—5. 1893/94. 8⁰.

Académie Royale des Sciences in Brüssel:

Annuaire. 1894. 60ᵉ année. 8⁰.
Bulletin. 63ᵉ année. 3. Série. Tom. 26, No. 12, Tom. 27, No. 1—5. 1893/94. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XIII, fasc. 1, 2. 1894. 8⁰.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Ungarische Revue. 1893. Heft 10. 1894. Heft 1—4. gr. 8⁰.

K. Ungarisches geologisches Institut in Budapest:

Mittheilungen. Band X, Heft 4, 5. 1894. 8⁰.
A m. kir. Földtani intézet évkönyve. Bd. X, Heft 5. 1894. 8⁰.
Földtani Közlöny. Band XXXIII, Heft 9—12. Band XXXIV, 1—5. 1893/94. 8⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Eudoxiu de Hurmuzaki, Documente privitóre la Istoria Românilor. Suppl. I, Vol. 5. Suppl. II, Vol. 1. Vol. II, part 4 und Vol. 8. 1893—94. 4⁰.
Analele. Serie II, Tom. XIV. Sect. literar. u. Sect. scientif. Tom. XV. Part. administrat. und Sect. literar. 1893. 4⁰.
Etymologicum Magnum Romaniae. Tom. III, 2. 1894. 4⁰.

Instituto meteorologico in Bukarest:

Analele. Vol. VII, anul 1891. 1893. 4°.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Verslag omtrent den staat van's lands plantentuin te Buitenzorg over het jaar 1892. Batavia 1894. 8°.

Meteorological Departement of the Government of India in Calcutta:

Indian Meteorological Memoirs. Vol. VI, part 1. 1894. fol.

Rainfall Data of India 1892. 1893. fol.

Monthly Weather Review. August, September, October, November, December 1893, January 1894. fol.

Meteorological Observations. August, September, October, November, December 1893, January 1894. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Journal. New Series. Vol. 62, No. 323, 327—332. 8°.

Proceedings. 1893 No. 8, 9, 10. 1894 No. 1. 8°.

Annual Address. 7th February 1894. 8°.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. XXVI, No. 4. Vol. XXVII, part 1. 1893/94. 4°.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. 8, No. 2. 1894. 8°.

Transactions. Vol. XV, part 4. 1894. 4°.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass.:

48th annual Report for the year ending Oct. 31, 1893. 8°.

Annals. Vol. 25, 29. 1893. 4°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. XXV, No. 2, 3, 5, 6. 1893/94. 8°.

Annual Report 1892—93. 1893. 8°.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 6. 1893. 4°.

Bullettino. Fasc. 33—35. 1893. 8°.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. VII, No. 325—350. Vol. VIII, 351—355. 1893/94. 4°.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 4, No. 2, 3. 1894. 8°.

„Editorial Committee of Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878" in Christiania:

XXII. Zoologi Ophiuroidea ved James A. Grieg. 1893. fol.

Norske Gradmaalings-Kommission in Christiania:

Vandstandsobservationer. Heft 5. 1893. 4°.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1893, No. 92—104. 1894, No. 1—41, 44—47, 50, 51. fol.

Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1894. 8°.

Die feierliche Inauguration des Rectors am 4. Oktober 1893. 8°.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:
Quartalblätter. 1893 in 4 Heften. 8°.

Academy of natural Sciences in Davenport, Jowa:
Proceedings. Vol. V, part 2. 1893. 8°.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:
3 kleine Schriften. 1893. 8°.
The Question of a Standard of Value, by O. J. Frost. 1893. 8°.
The Mode of occurrence of gold in the ores of the Cripple Creek District by Richard Pearce. 1894. 8°.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:
Mittheilungen. Band 6, Theil 4. 1893. 8°.

Gelehrte Estnische Gesellschaft in Dorpat:
Sitzungsberichte 1893. 1894. 8°.
Verhandlungen. Band XVI, 3. 1894. 8°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:
Bulletin. Tom. 14. 3. et 4. trimestre 1893. 8°.

Royal Irish Academy in Dublin:
Proceedings. III. Ser. Vol. III, No. 1, 2. 1894. 8°.
Transactions. Vol. 30. part 5—12. 1893/94. 4°.

Royal Dublin Society in Dublin:
The scientific Transactions. Ser. II. Vol. IV, No. 14, Vol. V, No. 1—4. 1892—93. 4°.
The scientific Proceedings. N. Ser. Vol. VII, part 5. Vol. VIII, part 1, 2. 1892—93. 8°.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:
Proceedings. Session 1891—92 and 1892—93. 2 Hefte. 1891—93. 8°.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. XX, pag. 97—160. 1893. 8°.
Transactions. Vol. 37, part I, II. 1893. 4°.

Gymnasium in Eisenach:
Jahresbericht auf das Jahr 1893—94. 1894. 4°.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:
Jahrbücher. N. F. Heft 20. 1894. 8°.

Reale Accademia de' Georgofili in Florenz:
Atti. Ser. IV. Vol. XVI, 3, 4. 1893. 8°.

R. Archivio di Stato in Florenz:
I Capitoli del Comune di Firenze, Inventario e Regesto. Tom. 2. 1893. 4°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a. M.:
Abhandlungen. Band XVIII, No. 2. 1894. 4°.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a. M.:
Mittheilungen über römische Funde in Heddernheim. I. 1894. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a. O.:
Helios. 11. Jahrg. No. 6—12. 1893/94. 8°.
Societatum Litterae. 1893. No. 8—12. 1894. 1—3. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i. Br.:
Berichte. Band VII, 1, 2. Band VIII. 1893/94. 8⁰.

Universität Freiburg i. d. Schweiz:
Index lectionum per menses aestivos 1894. 8⁰.

Oeffentliche Bibliothek in Genf:
Compte rendu pour l'année 1893. 1894. 8⁰.

Institut national Genevois in Genf:
Les Chroniques de Genève par Michel Roset. 1894. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Ser. 2a. Vol. XIII. 1893. 8⁰.

Geological Society in Glasgow:
Transactions. Vol. IX, part 2. 1893. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Band 69, Heft 2. 1893. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Gelehrte Anzeigen. 1893. No. 20—26. 1894. No. 1—6. 8⁰.
Nachrichten. 1893. No. 15—21. 1894. No. 1, 2. 8⁰.

Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha:
65. Rechenschaftsbericht für das Jahr 1893—1894. 4⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville:
Journal. Vol. III, p. 163—182. Vol. IV, p. 1—72, No. I—LXXX. 1893. 8⁰.

Verein der Aerzte in Steiermark in Graz:
Mittheilungen. 30. Jahrgang. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:
Mittheilungen. 25. Jahrgang. 1893. Berlin 1894. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:
Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.

Haag'sche Genootschap tot verdediging van de christelijke Godsdienst im Haag:
Werken. VI. Reeks. Deel V. Leiden 1894. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:
Bijdragen. V. Reeks. Deel X, aflev. 1, 2. 1894. 8⁰.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:
Leopoldina. Heft 29, No. 21—24. Heft 30, No. 1—10. 1893—94. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:
Zeitschrift. Band 47, Heft 4. Band 48, Heft 1. Leipzig 1893/94. 8⁰.

Universität Halle:
Index lectionum per aestatem 1894 habendarum, nebst Verzeichniss der Vorlesungen. 1894. 4⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:
Neue Mittheilungen. Band 18. 2. Hälfte, Heft 1. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 66. Heft 3, 4. Leipzig. 1893. 8⁰.

Stadt-Bibliothek in Hamburg:
Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1892/93. 4⁰.
Handbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Arbeiten. IX. Jahrg. 1891. I. und II. Hälfte. X. Jahrg. 1892. I. Hälfte nebst Beiheft. 1891—93. 4⁰.
Mittheilungen aus der Stadtbibliothek. X, 1. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:
Verhandlungen III. Folge I. 1894. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:
Zeitschrift. Jahrgang 1893. 8⁰.

Teylers Godgeleerd Genootschap in Harlem:
Verhandelingen. Nieuwe Serie. Deel XIV. 1894. 8⁰.

Teylers tweede Genootschap in Harlem:
Verhandelingen. N. Reeks. Deel IV, stuk 2. 1893. 8⁰.
Jacob Dirks, Atlas behoorende bij de beschrijving der Nederlandsche Penningen. Stuk 4. 1893. fol.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:
Archives Néerlandaises. Tom. 27, livr. 4, 5. Tom. 28, livr. 1. 1894. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:
Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrgang 4. Heft 1. 1894. 8⁰.

Naturhistorisch-medicinischer Verein in Heidelberg:
Verhandlungen. N. F. Band V, Heft 2. 1894. 8⁰.

Institut météorologique central in Helsingfors:
Observations. Vol. VI—VIII, livr. I. Vol. XI, livr. I. 1893. 4⁰.
Observations météorologiques 1881—1888 in 4 Voll. Kuopio. 1893. fol.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:
Archiv. N. F. Band 25, Heft 1. 1894. 8⁰.
Jahresbericht für das Vereinsjahr 1892/93. 1893. 8⁰.
Die Kerzer Abtei, von Lud. Reissenberger. 1894. 4⁰.

Historischer Verein in und für Ingolstadt:
Sammelblatt. XVIII. Heft. 1893. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band 28, Heft 2, 3. 1893—94. 8⁰.

Kais. Universität in Kasan:
Utschenia Sapiski. Vol. 61, No. 1—3. 1894. 8⁰.
2 Dissertationen von Krasin und Agababon. 1893. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:
39. Bericht über die Jahre 1892—94. 1894. 8⁰.

Universität in Kharkow:
Sapiski. Vol. 4. 1893. 8⁰.
Annales. 1894. Fasc. 1. 8⁰.

Section médicale de la Société des sciences expérim. in Kharkow:
Trudy. 1891. Teil II. 1892. Teil I. 1893. Heft I. 1892—94. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Zeitschrift. Band 23. 1893. 8⁰.

K. Universität in Kiew:
Iswestija 1893. Band 33, No. 12. Band 34, No. 1—4. 1893/94. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:
Ertesitö. 4 Hefte vom Jahre 1893. 8⁰.
„ I. Abtheilung. Band 18, Heft 2, 3. 1894. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:
Mittheilungen. Heft 24. 1893. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:
Mémoires. 6. série. Section des Lettres. Vol. III, No. 3. 1894. 4⁰.
Regesta diplomatica historiae danicae. Ser. II, tom. 2, fasc. 2. 1893. 4⁰.
Oversigt. 1893, No. 2, 3. 1894, No. 1. 1893—1894. 8⁰.
Skrifter. Naturvidensk. Afdeling. Band VII, No. 8, 9. 1893. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:
Mémoires. Nouv. Série 1892. 1893. 8⁰.
Aarböger. II. Raakke. Band VIII, Heft 3, 4. Band IX, Heft 1. 1893/94. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
Anzeiger. 1893, December. 1894, Januar, Februar, April, Mai. 8⁰.
Sprawozdania komisyi histor. Sztuki. Tom. V, fasc. 3. 1893. fol.
Rozprawy wydz. filolog. Tom. XIX. 1893. 4⁰.
Acta rectoralia universitatis Cracoviensis. Tom. I, fasc. 2. 1893. 4⁰.
Rocznik. Rok 1892/93. 1893. 8⁰.
Biblioteka pisarzów polskich. Tom. 25—27. 1893. 8⁰.

Botanischer Verein in Landshut:
13. Bericht über die Vereinsjahre 1892—93. 1894. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:
Bulletin. III. Sér. Vol. 29, No. 113. Vol. 30, No. 114. 1893. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:
Tijdschrift. Deel XIII, Aflev. 1, 2. 1894. 8⁰.

Observatorium in Leiden:
Catalogue de la Bibliothèque de l'Observatoire. Supplement III. 's Gravenhage 1893. 8⁰.
Verslag. 1891—92 et 1892—93. Leyde 1892—93. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:
Berichte. Mathem.-phys. Classe. 1893, No. VII, VIII, IX. 1894, I. 1894. 8⁰.
Berichte. Philolog.-histor. Classe. 1893. II, III. 1894. 8⁰.
Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. Bd. XXI, 1. 1894. 4⁰.
„ des philos.-hist. Classe. Bd. XIV, 5. 1894. 4⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:
Vierteljahrsschrift. Jahrgang 28. Heft 4.
„ 29. „ 1. 1893/94. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. Neue Folge. Band 48, Heft 8—12.
„ 49, „ 2—9. 1893/94. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1893. 1894. 8⁰.

Museum Franisco-Carolinum in Linz:

52. Bericht. 1894. 8⁰.

Société philosophique in Loewen:

Revue Néo-Scolatisque. I. Année, No. 1. 1894. 8⁰.

Université catholique in Loewen:

Annuaire 1894. 8⁰.
Recueil de travaux publiés par les membres de la conférence d'histoire. Fasc. 4, 5. 1891—1893. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule, Recueil de Cytologie et d'histologie générale. Tom. X, fasc. 1. 1894. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 14, part I. 1894. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Review. Vol. IX, No. 33, 34. 1894. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 54, No. 328, 329, 330. Vol. 55, No. 331, 332, 333. 1894. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 54, No. 2—7. 1893/94. 8⁰.

Chemical Society in London:

Proceedings. Session 1893—94. No. 131—140. 1894. 8⁰.
Journal 1893. Supplement Number. 1894. No. 374—379. (Jan. bis June.) 8⁰.
List of the Officers and Fellows, April 1894. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 49, part 1—4. 1893. 8⁰.
List. November 1st 1893. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 57. 1892. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:

Journal. 1894, part 1-3. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1893, part IV. 1894, part I. 8⁰.
Transactions. Vol. 13, part 8. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 49, No. 1255—1267, 1269, 1271—1278. Vol. 50, No. 1279—1284. 1893/94. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Lucca:

Atti. Tom. 27. 1893. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tom. 20, livr. 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta universitatis Lundensis. Tom. 29, Abth. I, II. 1892/93. 4⁰.

Institut Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Tom. XXII. 1893. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales. Tom. VI, fasc. 3, 4. Paris 1893 und Lyon 1894. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:

Transactions. Vol. IX, part 1, 2. 1893. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. VIII. 1893. 4⁰.

The Government Astronomer in Madras:

Madras Meridian. Circle Observations. Vol. VII. 1894. 4⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo XXIV, No. 1—6. 1894. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio storico Lombardo. Anno XX, fasc. 4. 1893.
„ „ „ Serie III. Anno XXI, fasc. 1, 1894. 8⁰.

Società italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 34, fasc. 4. 1894. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 7, No. 2, 3. Vol. 8, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tom. 3, fasc. 4. 1894. 4⁰.

Tuft's College in Massachusetts:

Tufts College Studies No. 1. 1894. 8⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge zur Geschichte deutschen Alterthums. Lief. 12. 1893. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Festschrift zur Feier ihres 350jährigen Bestehens. 1894. 4⁰.

Scientific Association in Meriden:

Transactions. Vol. 5. 1893. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. 3. Série. Année 20. 1890—1891. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Lothringische Geschichte und Altertumskunde in Metz:

Jahrbuch. 5. Jahrg. 1893. I. Hälfte. 8⁰.

Observatorio meteorologico central in México:

El Clima de la ciudad de México por Mariano Bárcena. 1893. 8⁰.

Sociedad científica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias y Revista. Vol. VII, No. 3—10. 1893/94. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie. Vol. II, cuad. 3 y 4. 1892. fol.

Regia Accademia di scienze in Modena:

Memorie. Serie II, Vol. 9. 1893. 4⁰.

Benediktiner-Abtei in Montecassino:

Pauli Warnefridi in sanctam regulam comment. 1880. 4⁰.
Spicilegium Casinense. Tomus I. 1893. fol.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1893, No. 4. 1894, No. 1. 1894. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Korrespondenzblatt. 1893. No. 11, 12. 1894. No. 1—5. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:

Personalstand. Somm.-Sem. 1894. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel in München:

Amtsblatt für die Erzdiöcese. 1893. 1894. No. 1—12. 8⁰.
Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1894. 8⁰.

Universität in München:

Schriften der Universität München. 1893. 4⁰ u. 8⁰.

Historischer Verein von Oberbayern in München:

Monatsschrift. 1894. No. 1—5. (Jan.—Juni.) 8⁰.

Kaufmännischer Verein München:

20. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Band 51. 1893. 8⁰.
Ergänzungshefte. I. Lieferung 1. 1893. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconti. Serie 2a. Vol. VII, fasc. 8—12. Vol. VIII, fasc. 1—5. 1893/94. 4⁰.

Historischer Verein in Neuburg:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. Jahrg. 56. 1892. 1893. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 42, part 5. Vol. 43, part 2, 3, 4. 1893. 8⁰.
An Account of the Strata of Northumberland and Durham. S-T. 1894. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. Vol. 47, No. 277—282 (Jan.—June). 1894. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Journal. Vol. XVI, No. 1. 1894. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VIII, No. 1—3. Vol. VII, 6—12.
Vol. VI. Index 1894. 1893/94. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. V. 1893. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. XV, No. 12. XVI, No. 1–5. Easton. 1893/94. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XXV, No. 4, part 1, 2.
Vol. XXVI, No. 1. 1893/94. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. 1893. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrg. 1893. 8⁰.
Katalog der Gemälde. 3. Auflage. 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht für das Jahr 1892. 1893. 8⁰.
Mittheilungen. Heft 10. 1893. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Band XVIII, 1, und Mathematische Abtheilung, Band XV. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Osnabrück:

Osnabrücker Geschichtsquellen. Band II. 1894. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Anual Report 1890–91. N. S. Vol. V, part 1, 2 and Maps. 1893. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. IX. 1893. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Serie II. Vol. 1, fasc. 2. Anno 1894. 8⁰.
Bullettino. Tom. V, No. 4. 1894. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VII, fasc. 6. VIII, 1–4. 1893/94. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Anno XVI. 1893. Maggio–Agosto. 1893. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1893, No. 51. 1894, No. 1–26. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 117, No. 26. Tom. 118, No. 1–21, 23–26. 1893/94. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 626–630. Février–Juin 1894. 4⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus 1893, No. 17, 18. 1894, No. 1–13. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tom. 14. 1893. 3. et 4. trimestre. 1894. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XXI, No. 8, 9 et table des 20 premiers volumes.
Tom. XXII, No. 1, 2, 3, 4. 1893/94. 8⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:

L'Électricien. Tom. VI, No. 157, 158. Tom. VII, 159–183. 1893/94. 4⁰.

Kaiserl. Russ. Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg:

Mémoires. Tom. 41, No. 2-5. 1893. 4⁰.
Repertorium für Meteorologie. Band XVI. 1893. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. 13, fasc. 1. 1893. 8⁰.
Scripta botanica. Tom. IV, fasc. 1. 1893. 8⁰.

Kais. russ. archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Vol. 6. Heft 1—4. Vol. 8. Heft 1, 2. 1892/93. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der k. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 25, No. 9. Tom. 26, No. 1—3. 1893/94. 8⁰.
Zum 25jähr. Jubiläum der chem. Abteilung der physikalisch-chem. Gesellschaft (in russ. Sprache). 1894. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1892. Theil I, II. 1893. 4⁰.

Société des naturalistes in St. Petersburg:

Travaux. Tom. 24, Heft 1, 2. 1891. 8⁰.

Sternwarte in St. Petersburg:

Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II, Vol. I. 1893. fol.
Observations de Poulkova. Vol. 10. 1893. fol.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Protokoly No. 48, 49. 1893/94. 8⁰.
Goditschnyi akt (Jahres-Akt) 8. Februar 1894. 8⁰.
P. Kokowzow, Zur Geschichte der mittelalterlichen Philologie und arab.-hebräischen Literatur. Band I. 1893. 8⁰.
A. Domogarow, Von der freien Bewegung des Gyroskops. 1893. 8⁰.
(Beide Schriften in russischer Sprache.)

Historisch-philolog. Fakultät der Universität St. Petersburg:

Sapiski. Tom. 33. Tom. 25, pars II. 1893 u. 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1893. Part II, III. 8⁰.
Journal. II. Ser. Vol. X, part 1. 1894. gr. 4⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings at the 41th annual Meeting, Chicago August 1893. 8⁰.

The Geographical Club of Philadelphia:

Charter, By-laws, List of Members. Bulletin Vol. 1, No. 2. 1894. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine. Vol. XVII, No. 3, 4. 1893/94. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 31, No. 142. 1893. 8⁰.

University of Pennsylvania in Philadelphia:

Catalogue 1893—1894. 1893. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Memorie. Vol. XIII. 1894. 4⁰.
Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 1—61. 1894. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht über d. J. 1893/94. 4⁰.

Historische Gesellschaft für die Provinz Posen in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. 7 u. 8. 1892—93. 8⁰.
Sonder-Veröffentlichungen. I, 1, 2. II. 1892—93. 8⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band IX. 1894. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josef Akademie der Wissenschaften, Litteratur und Kunst in Prag:

Almanach. Ročník IV. 1894. 8⁰.
Rozprawy (Sitzungsberichte). 1893. Abth. I, II, III. 1894. Třída I. Ročník 3. Číslo 1, 2. Třída II. Ročník 3. 4⁰.
Rozprawy (Abhandlungen). Abth. III. 1893. I. 1894. 4⁰.
Historický Archiv. Číslo 2. 1893/94. 4⁰.
Věstník. Band II. Heft 1—9. Band III. Heft 1—5. 1893/94. 8⁰.
Antonín Pavlíček, Právo listů zástavních (Das Recht der Hypothekenbriefe). 1893. 8⁰.
Sbírka pramenův ku poznáni literárního života (Sammlung der Quellen zur Kenntniss des literar. Lebens in Böhmen, Mähren und Schlesien). No. 1. 1893. 8⁰.
Otakar Kukula, O lithiasi (Von der Steinoperation). 1894. 8⁰.
Bulletin international. Classe des sciences mathématiques. I. 1894. 4⁰.
Antonín Veselý. Medicinská Rus. 1894. 4⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Sitzungsberichte: a) Klasse für Philosophie 1893.
b) Mathem.-naturwissensch. Klasse 1893. 1894. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen zu Prag:

Rechenschaftsbericht vom 11. Dezember 1893. 8⁰.
Georg Bruder, Die Gegend um Saaz. Saaz 1893. 8⁰.
Aliscans mit Berücksichtigung von Wolframs von Eschenbach Willehalm, hsg. von Gustaf Rollin. Leipzig. 1894. 8⁰.
Mittheilung. No. II. 1894. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Casopis. Band 23, No. 1, 2. 1893/94. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht. Jahr 1893. 1894. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:

Casopis. Band 67. Heft 1—4. 1893. 8⁰.

K. K. deutsche Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Somm.-Sem. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. 31. Jahrg. No. 1—4. 1892—93. 8⁰.

Instituto historico e geographico in Rio de Janeiro:

Revista trimensal. Tom. 55, parte II. 1893. 8⁰.

Homenagem. Sessão extraordinaria em commemoração do fallecimento de S. M. o. Snr. D. Pedro II. 1892. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario 1893. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. IV. 1893. 8⁰.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1894. 8⁰.

Atti. Serie IV. Classe di scienze morali. Vol. IX, parte 1 e Vol. X, p. I. Memorie. 1893. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. I, parte 2. Notizie degli scavi 1893, Agosto—Dicembre e Indice per l'anno 1893. 1893. 4⁰.

Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Vol. II, semestre II, fasc. 1, 2. Vol. III, semestre I, fasc. 1—11. 1893/94. 4⁰.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. II, fasc. 11, 12. Vol. III, fasc. 1—4. 1894. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 45, Sessione III—VI. Anno 46, Sessione I—VIII. 1892/93. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1893, No. 4. 1894, 1. 1893/94. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut, röm. Abtheilung, in Rom:

Mittheilungen. Band 8, No. 4. Band 9, No. 1. 1894. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Le Opere di Galileo Galilei. Vol. IV. Firenze 1894. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XVI, fasc. 3, 4. 1893. 8⁰.

Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte in Rotterdam:

Nieuwe Verhandelingen. II. Reeks, IV. Deel. Stuk I. 1893. 4⁰.

Accademia degli Agiati in Rovereto:

Atti. Anno I—XI. (1883—1893.) 1893/94. 8⁰.

L'Accademia di Rovereto dal 1750 al 1880. 1882. 8⁰

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht über d. J. 1892/93. 1893. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Annales. Seccion II. Año 1892. 1893. fol.

California Academy of sciences in San Francisco:

Memoirs. Vol. II, No. 3. 1894. 4⁰.

Société scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tom. III, livr. 1—3. 1893/94. 4⁰.

Bosnisch-Herzegowinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftliche Mittheilungen. Band I, II. Wien. 1893—94. 8⁰.

Verein für meklenburgische Geschichte in Schwerin:

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Band XVI. 1893. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bulletino di archeologia. Anno XVI, No. 11, 12. XVII, No. 1—4. 1893/94. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speier:

Mittheilungen. XVII. 1893. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Stettin:

Baltische Studien. 43. Jahrg. 1893. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Observations du magnétisme terrestre faites à Upsala en 1882—1883. 1893. 4⁰.

Meteorologiska iakttagelser i Sverige. Band 31 (1889). 1893. 4⁰.

Öfversigt. Årgang 50 (1893). 1894. 8⁰.

Carl von Linnés brefvexling, af Ewald Ährling. 1894. 8⁰.

Institut Royal Géologique de Suède in Stockholm:

Carte géologique de la Suède. Série Aa, No. 108, 109. Série Ab, No. 13—15, Série Bb, No. 7, Série C, No. 112.

Nordisches Museum in Stockholm:

Samfundet för Nordiska Museets främjando 1891 och 1892. 1894. 8⁰.

Träsniderimönster i Allmogestil af Wilhelm Oldenburg. 1893. fol.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. XXVII, 1893, No. 10. Tom. XXVIII, 1894. Fasc. 1—4. 8⁰.

K. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher. Jahrg. 1893. 4⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. II. Jahrg. 1893. Heft 1—4. 1893. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture in Sydney:

Records of the Geological Survey of N.-South-Wales. Vol. III, part 4. 1893. 4⁰.

Annual Report for 1893. 1894. fol.

The New-South Wales Government Bard for international exchanges in Sydney:

The year Book of Australia 1894. 8⁰.

Royal Society of New-South Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. XXVII. 1893. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Anuario. Año de 1894.

Boletín. Tom. I, No. 15. 16. 1893/94. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio (Japan):

Mittheilungen. Heft 53. 1894. 4°.

Canadian Institute in Toronto:

Transactions. Vol. IV, part 1. 1894. 8°.
7th annual Report. 1894. 8°.

Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XI, fasc. 2. 1893. 8°.

Società Adriaticà di scienze naturali in Triest:

Bolletino. Vol. XV. 1893. 8°.

Korrespondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Württembergs in Tübingen:

Korrespondenzblatt. 40. Jahrg. Heft 7, 8. Tübingen 1893. 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Memorie. Ser. II, Vol. 43. 1893. 4°.
Osservazioni meteorologiche, anno 1893. 1894. 8°.
Atti. Vol. 29, disp. 1—10. 1893—94. 8°.

Universität in Upsala:

De l'emploi des photogrammètres pour mesurer la hauteur des nuages, par Ph. Akerblom. 1894. 8°.
Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique. Vol. 25, année 1893. 1893—94. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht:

F. de Bas, Brieven van Prins Willelm V. s'Gravenhage 1893. 8°.
Werken. III. Serie, No. 1. s'Gravenhage 1893. 8°.

Physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen, IV. Reeks. Deel 3, aflev. 1. 1894. 8°.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Temi di premio proclamati il 20 maggio 1894. 8°.

National Academy of Sciences in Washington:

Memoirs. Vol. VI, part I, II. 1893. 4°.

Bureau of Education in Washington:

Report for 1889—1890. 2 Vols. 1893. 8°.

Bureau of Ethnology in Washington:

Bibliography of the Salishan Languages, by F. Const. Pilling. 1893. 8°.
Ninth annual Report 1887—1888. 1892. 4°.
Museum of comparative zoology. Vol. 25, No. 4. 1894. 8°.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report for the year 1890/91. 1893. 8°.
The internal Work of the Wind. By S. P. Langley. 1893. 4°.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year 1892—93. 1893. 8°.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin No. 28—30. 1893—94. 8°.
Annual Report for the year 1891. Part II. 1892. 8°.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 26. Jahrg. 1893. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein des Harzes in Wernigerode:

Schriften. 8. Jahrgang 1893. 8⁰.

K. K. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte, philos.-hist. Classe. Bd. 129. 1893. 8⁰.
„ mathem.-naturwissensch. Classe.
Abtheilung I, 1893. No. 1—7. Abth. IIa, 1893. No. 1—7.
IIb, 1893. „ 1—7. „ III, 1893. „ 1—7. } 1893. 8⁰.

Denkschriften. Philosophisch-historische Classe, Bd. 42. 1893. 4⁰.

Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 78, II. 79, I, II. 80, I. 1893. 8⁰.

Almanach. 43. Jahrg. 1893. 8⁰.

Mittheilungen der prähistor. Kommission. Bd. I, No. 3. 1893. 4⁰.

14 Stück Separat-Abdrücke aus den Sitzungsberichten der philos.-hist. Classe. 1893. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1891, Heft 4. 1893. Band 43, Heft 2—4.
1894, Heft 4. 1893/94. 4⁰.

Abhandlungen. Band XV, Heft 4—6.
„ VI, II. Hälfte: Text und Tafeln.
„ XVIII, Heft 3. 1893. fol.

Verhandlungen. 1893. No. 11—18. 1894. No. 1—4. 4⁰.

K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:

Astronomische Arbeiten. Band V. 1893. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift 1894. No. 1—26. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Bd. XXIII, Heft 6. Bd. XXIV, Heft 1, 2. 1893/94. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 36. 1893. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1893. Bd. 43, Quartal III u. IV. 1893. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band VIII, No. 3, 4. Band IX, No. 1. 1893/94. 4⁰.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Band VIII u. IX. 1892/93. 4⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde in Wiesbaden:

Annalen. Band 26. 1894. 8⁰.

Magnetisches Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven:

Beobachtungen. Band I, II, III. Berlin, 1890-93. 4⁰.

Bestimmung der erdmagnetischen Elemente, von M. Eschenhagen. Berlin, 1890. 4⁰.

Erdmagnetische Beobachtungen zu Wilhelmshaven, von E. Eschenhagen. Hamburg, 1893. 4⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Sitzungsberichte. Jahrg. 1893. No. 7—9, 11, 12. 1894. No. 1—4. 8°.
Verhandlungen. N. F., Band 27, No. 5. Band 28, No. 1. 1893/94. 8°.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen. 28. Jahrgang 1891. (1894.) 4°.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band 23, Heft 6. Leipzig 1894. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Zürich:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 19. Band. 1894. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrschrift. Jahrg. 38, Heft 3, 4. Jahrg. 39, Heft 1. 1893/94. 8°.

Schweizerische geodätische Kommission in Zürich:

Das schweizerische Dreiecksnetz. Band VI. 1894. 4°.

Universität Zürich:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1893/94. 4° u. 8°.

Von folgenden Privatpersonen:

Gabriel Arnoux in Paris:

Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. 1894. 8°.

Dr. Beck in Klosterwald, Post Ottobeuren:

Die römischen Strassen Regensburgs. Ottobeuren 1894. 8°.

Constantin Chiru in Bukarest:

Canalisarca rîurilor si irigatiunič. 1893. 8°.

Hermann Escher in Zürich:

Georg v. Wyss, Zwei Nekrologe von Paul Schweizer und Hermann Escher. 1894. 8°.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Die magnetischen Lokalabweichungen bei Moskau. 1893. 8°.

Paul Galopin in Genf:

Effets thermiques dus à la compression. Thèse. 1893. 4°.

Hugo Gyldén in Stockholm:

Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales. Tom. I. 1893. 4°.

H. Haug in Gotha:

Vergleichende Erdkunde und alttestamentlich geographische Weltgeschichte. Text- und Kartenheft. 1894. 4°.

J. G. Isola in Genua:

Storia delle lingue e litterature romanze. Parte III, disp. 2. Genova 1894. 8°.

Joseph B. Jack in Konstanz:

Carl Moriz Gottsche. 1893. 8°.
Stephaniella paraphyllina Jack nov. gen. Hepaticarum. 1894. 8°.

Georges Jacquemin in Malzéville bei Nancy:

Emploi rationnel des levures pures sélectionnées pour l'amélioration des boissons alcooliques. Nancy 1894. 8⁰.

James E. Keeler in London:

Physical Observations of Mars. 1893, 8⁰.

J. V. Kull in München:

Repertorium zur Münzkunde Bayerns. Heft IV. 1894. 8⁰.

A. Kurz in Augsburg:

1. Der Mittelpunkt des hydrostatischen Druckes in ebenen Figuren. 2. Zur Theorie der Ausdehnung von Hohlkörpern. 3. Die kleinste Ablenkung im Prisma. 4. Ballistische und Stoss-Versuche. (4 Ausschnitte.)

Die thermischen Capacitäten der festen und tropfbar flüssigen Körper. (Ausschnitt.) 1894. 8⁰.

Ueber die gleitende und rollende Reibung bei der Fallmaschine. Leipzig 1894. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

The ecclesiastical Treatment of Usury. s. l. 1894. 8⁰.

Occult Compensation. Philadelphia. 1894. 8⁰.

Giuseppe de Leva in Padua:

Storia documentata di Carlo V. Vol. V. 1894. 8⁰.

Mrs. Carvill Lewis in London:

The glacial Geology of Great Britain and Ireland, by the late Henry Carvill Lewis. 1894. 8⁰.

L. Martin in Bindjei, Deli:

Neue Lepidopteren aus Sumatra. Batavia 1893. 8⁰.

Marc Micheli in Genf:

Alphonse de Candolle et son oeuvre scientifique. 1893. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 54, No. 1, 2. Tom. 55, No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Charles A. Oliver in Philadelphia:

A Correlation theory of Color-Perception. 1884. 8⁰.

3d and 4th annual Report of the ophthalmological Department of the State Hospital et Norristown. PA. 1888—89. 8⁰.

Emil Pallioppi in Pontresina:

Dizionari dels idioms romauntschs. Fasc. II, III. Samedan. 1894. 8⁰.

Ed. Piette in Saint Quentin:

L'époque éburnéenne et les races humaines de la période glyptique. Saint-Quentin 1894. 8⁰.

J. de Rey-Pailhade in Toulouse:

Le temps décimal. Paris 1894. 8⁰.

Eugenio Ruidíaz y Caravia in Madrid:

La Florida. Su conquista y colonizacion por Pedro Menéndez de Aviles. 2 tom. 1894. 8⁰.

B. Schwalbe in Berlin:

Die wissenschaftliche Fachliteratur. 1894. 8⁰.

Ferdinando Colonna dei Principi di Stigliano in Neapel:

Le grotte del Monte Taburno. Memoria 2da. 1889. 8⁰.
Noticie storiche di Castelnuove in Napoli. 1892. 4⁰.

V. Thomsen in Kopenhagen:

Déchiffrement des inscriptions de l'Orkhon. 1894. 8⁰.

August Tischner in Leipzig:

Le Mouvement universel. 1893. 8⁰.

Victor Ritter von Tschusi zu Schmidhoffen in Hallein:

Meine bisherige literarische Thätigkeit 1865—1893. 1894. 8⁰.

Giuseppe Vincenti in Ivrea:

L'insegnamento del sistema fonografico universale a mano. Torino 1890. 8⁰.
La fonografia universale Michela. Torino 1893. 4⁰.

M. E. Wadsworth in Houghton:

A Paper on the Michigan Mining School. Lansing 1894. 8⁰.

Rudolf Wolf in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. No. 83. 1894. 4⁰.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 2. Juni 1894.

Seite

H. Seeliger: Ueber den vierfachen Stern ζ Cancri 257

Ign. Schütz: Ueber eine Verallgemeinerung der v. Helmholtzschen Wirbel-Integrale, welcher eine unendliche Mannigfaltigkeit von mechanischen Bildern der Maxwell'schen Elektrodynamik entspricht 273

Sitzung vom 7. Juli 1894.

G. Bauer: Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome 343

L. Maurer: Zur Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen 297

*Ad. v. Baeyer: Ueber das Kümmelöl 296

Einsendung von Druckschriften 361

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1894. Heft IV.

München.

Verlag der K. Akademie.

1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Ueber die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von Robert Hartig.

(Eingelaufen 8. November.)

Im Anschlusse an meine Untersuchungen des Holzes der Traubeneiche[1]) unterzog ich im Laufe dieses Jahres das Holz der Stieleiche einer eingehenden Bearbeitung und liess zu dem Zweck theils im Guttenberger- und Gramschatzer Walde bei Würzburg, theils in mehreren Waldungen Oberbayerns etwa 30 Bäume fällen, welche ein reiches Untersuchungsmaterial darboten.

Die ausserordentlich grossen Verschiedenheiten, die die Vertheilung des Leitungs-, Festigungs- und Speichergewebes zu erkennen gaben, beruhen einerseits auf Eigenthümlichkeiten des Baumalters und Baumtheiles, andererseits auf Einwirkung äusserer Factoren. In demselben Baumindividuum kann Holz von 0.40 und solches von 0.82 specif. Trockengewicht auftreten.

Das in der Jugend des Baumes und im jugendlichen Alter jedes Baumtheiles gebildete Holz zeichnet sich durch geringe Grösse der Elementarorgane aus. Bis zum achtzigsten

1) Untersuchungen über die Entstehung und die Eigenschaften des Eichenholzes. Forstlich-naturwissenschaftliche Zeitschrift Bd. III, Heft 1. 2. 4. 5. 1894.

Lebensjahre nimmt die Grösse der neu entstehenden Organe zu. Da nun besonders das Lumen der Gefässe an Grösse zunimmt, so erklärt sich schon daraus theilweise die Abnahme des Holzgewichtes mit zunehmendem Baumalter. Der Antheil, den das Markstrahlgewebe am Holze nimmt, ist in der Jugend ein geringer, er wächst bis über das hundertste Lebensjahr und bleibt von da an mehrere Jahrhunderte hindurch ziemlich gleich gross. Der Vorrath an aufgespeicherten Reservestoffen erreicht also etwa im hundertsten Jahre ein Maximum. Wahrscheinlich steht damit der so späte Eintritt der Mannbarkeit der Eiche im Zusammenhange.

Das meiste Festigungsgewebe entsteht im Baume da, wo dieser den grössten Widerstand gegen Sturm u. s. w. leisten muss, d. h. am untersten Stammende und im Wurzelanlaufe. Stammaufwärts vermindert sich der procentische Antheil, den das Festigungsgewebe am Holzringe ausmacht, bis zum Kronenansatze dann, wenn der Querschnitt des Jahrringes nach oben kleiner wird. Das Leitungsgewebe bleibt sich in den verschiedenen Baumhöhen bis zur Krone mit Schwankungen ziemlich gleich und so muss, wenn der Querschnitt des Ringes sich verkleinert, das Festigungsgewebe abnehmen.

Aehnliches habe ich schon früher für andere Holzarten nachgewiesen. Es wird dadurch erklärt, dass bei Windbruchschäden die Bäume meist unterhalb der Krone abbrechen.

Die grossen Markstrahlen nehmen im Baume von oben nach unten zu und erreichen ihr Maximum in den Wurzeln. So betragen dieselben z. B. in dem Gipfel des Baumes 3%, am Stammende 12% und in den Wurzeln 22% vom ganzen Holzkörper. Mit Ausschluss des Wurzelanlaufes enthalten die Wurzeln nur Speicher- und Leitungsgewebe. Das Festigungsgewebe fehlt ganz. Sie bleiben auch stets ohne Kern und sind in Folge dessen für Speicherung

von Reservestoffen und für Wasserleitung ganz besonders geeignet.

Zahl und Breite der Markstrahlen sind bei den Eichen derselben Art ausserordentlich verschieden und hängt deren procentischer Antheil am Holze von der Grösse der Baumkrone und dem Maasse der Lichtwirkung auf diese ab. Eine grosskronige 270jährige Eiche des Mittelwaldes in freier Stellung besass 22 % Ast- und Reisigholz und im Holz des unteren Stammtheiles 11 % Markstrahlen, eine ebenso alte schwachkronige Eiche mit nur 7.5 % Ast- und Reisholz dagegen nur 5 % Markstrahlen. Eine völlig freistehende 70jährige Eiche hatte 11 % Markstrahlen, eine fast ebenso alte Eiche im geschlossenen Bestande nur 4 %. Erfahrungsgemäss tragen freistehende Eichen mit grossen Kronen häufiger und reichlicher Eicheln, als schwachkronige Bäume im geschlossenen Bestande, da sie einen grösseren Procentantheil ihrer jährlichen Production in Form von Ueberschüssen als Reservestoffe aufzuspeichern vermögen.

Die Entwicklung des Leitungsgewebes hängt von der Verdunstungsgrösse des Baumes ab. Erzeugt ein Baum nur so viel organische Substanz, als erforderlich für die Ausbildung des Leitungsgewebes ist, so entsteht überhaupt kein Festigungsgewebe. Je günstiger der Ernährungszustand des Baumes im Vergleich zu seiner Verdunstungsgrösse ist, um so mehr Festigungsgewebe wird von ihm erzeugt. Das Festigungsgewebe stellt gewissermassen den Ueberschuss der Production an Bildungsstoffen über den Bedarf an Leitungsgewebe dar, insoweit derselbe nicht zur Herstellung von Speichergewebe und Reservestoffen verbraucht wird. Auf nahrkräftigem Boden wird desshalb mehr Festigungsgewebe gebildet, als auf magerem Boden. Die Breitringigkeit ist desshalb aber noch kein sicheres Zeichen für die Güte des Holzes. Freistehende Bäume mit sehr grosser Krone und Blattmenge verdunsten so viel Wasser, dass oft der grösste

Theil der erzeugten Bildungsstoffe zur Ausbildung von Leitungsgewebe verwendet werden muss. In einem geschlossenen Eichenbestande besitzen die breitringigen, am schnellsten gewachsenen Bäume fast nie das schwerste Holz, vielmehr findet sich dies bei denjenigen Eichen, deren Krone seitlich eingeengt ist und desshalb weniger verdunstet. Die Bäume mit voller, hoher Krone besitzen in der Regel einen Ueberfluss an verdunstenden Blättern, deren Assimilationsenergie durch Mangel an Nährstoffzufuhr aus dem Boden nicht zur Maximalhöhe gesteigert ist. Durch eine nicht zu weit gehende Entnahme belaubter Aeste wird die verbleibende Blattmenge zu voller Productionsthätigkeit befähigt. Die Menge der erzeugten Substanz bleibt dieselbe, die sie vor der Ausästung war, das nunmehr entstehende Holz zeigt aber weniger Leitungsgewebe und entsprechend mehr Festigungsgewebe, da mit der Entnahme von Blättern die Verdunstungsgrösse sich vermindert hat.

Specifische Verschiedenheiten im anatomischen Bau des Holzes der Traubeneiche und der Stieleiche liessen sich nicht erkennen, da alle Merkmale, die man bisher benutzt hat, um solche festzustellen, innerhalb derselben Art den grössten Schwankungen unterworfen sind.

Substanzielle Verschiedenheiten im Holze beider Eichenarten waren ebenfalls nicht nachweisbar, da auch in dieser Beziehung innerhalb derselben Species grosse Schwankungen vorkommen. Beim Uebergange aus dem Splintzustande in den des Kernes wird die Reservestärke der innersten Splintringe zur Entwicklung von Thyllen in den Gefässen grossentheils verbraucht. Durch Zufuhr von Gerbstoff, durch Ablagerung desselben und seiner Spaltungsproducte vermehrt sich die Substanzmenge im Durchschnitt um etwa 6 Gewichtsprocente. Zugleich vermehrt sich das specifische Gewicht der Wandungssubstanz erheblich. Bei der Traubeneiche des Spessartes und bei der

Stieleiche in Oberbayern schwankt das Gewicht der Wandungssubstanz im Splinte zwischen 1.55 und 1.565. Dasselbe steigert sich in Folge der Verkernung auf 1.59 bis 1.60. Der Umstand, dass bei der Kernbildung die Substanzmenge und zugleich das specifische Gewicht der Substanz sich vermehrt, berechtigt zu dem Schlusse, dass die Zunahme des specifischen Substanzgewichtes der Zufuhr einer Substanz von sehr hohem specifischen Gewichte zuzuschreiben sei, womit aber die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein soll, dass auch die Holzwandungssubstanz selbst bei der Verkernung Veränderungen unterworfen sei.

In den bei Würzburg gefällten Eichen ergab die Untersuchung sehr verschiedene specifische Gewichte der Substanz, nämlich 1.55 bis 1.66 für den Splint und 1.56 bis 1.71 für den Kern. Die Untersuchung, welchen Umständen diese grossen substanziellen Verschiedenheiten zuzuschreiben sind, hat noch nicht zu befriedigenden Resultaten geführt.



Ueber den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen.

Von Max Planck.

(Eingelaufen 8. November.)

Unter obigem Titel hat Herr L. Boltzmann in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften vom 5. Mai 1894 gegen den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes, wie er sich in den von mir herausgegebenen Kirchhoff'schen Vorlesungen über die Theorie der Wärme, S. 142 ff., findet, einen Einwand geltend gemacht. Da sich die Spitze des Angriffs zum grossen Theil gegen den Herausgeber jener Vorlesungen richtet, indem von Ungenauigkeiten der Darstellung gesprochen und sogar die Stellung des Herausgebers zur kinetischen Gastheorie damit in Verbindung gebracht wird, so liegt mir daran, mich gegen diesen Vorwurf zu vertheidigen. Es könnte nämlich durch ihn leicht die Meinung erweckt werden, als ob in die Darstellung des genannten Beweises sich irgend ein Mangel in der Form eingeschlichen habe, der durch Anwendung grösserer Sorgfalt und Genauigkeit von Seiten des Herausgebers hätte vermieden werden können.

Eine solche Meinung wäre aber durchaus irrig. Bei keiner anderen Stelle des Kirchhoff'schen Buches bietet das

vom Verfasser hinterlassene Manuscript mehr Garantieen dafür, dass die Vorlesung thatsächlich genau so gehalten wurde, wie sie gedruckt vorliegt, und in der That handelt es sich bei dem Boltzmann'schen Einwand keineswegs um ein mögliches Missverständniss oder um eine Unklarheit in der Ausdrucksweise, sondern der Einwand trifft gerade den Kern des ganzen Beweises; es ist nicht denkbar, demselben Rechnung zu tragen, ohne dass der Ideengang vollständig abgeschnitten wird. Von einem Mangel in der Darstellung kann also gar nicht die Rede sein, und damit halte ich die Aufgabe des Herausgebers für erledigt, wie das auch in meinem Vorwort ausdrücklich hervorgehoben ist. Eine Kritik des vorgetragenen Gedankenganges und an Stelle eines unvollkommenen Beweises womöglich einen besseren verlangen heisst doch nicht weniger, als vom Herausgeber ein neues Buch fordern. Wer würde dann wohl die Verantwortung übernehmen können, ein nachgelassenes Werk herauszugeben?

Nach der formellen Rechtfertigung sei mir auch noch ein Wort zum Inhalt verstattet. Den Boltzmann'schen Einwand habe ich mir seinerzeit ebenfalls gemacht, wenn auch in etwas anderer, doch in so wenig abweichender Form, dass ich hier nicht mehr darauf zurückkomme und mich einfach auf die Anerkennung seiner sachlichen Berechtigung beschränke. Ich habe aber daran noch eine weitere Ueberlegung geknüpft, die ich bei dieser Gelegenheit hier anfügen möchte, obwohl ich nicht sicher weiss, ob sie nicht schon einmal angestellt worden ist. In dem Maxwell-Kirchhoff'schen Beweis wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Moleküle nach Beendigung eines Zusammenstosses in bestimmter Weise auseinanderfliegen, aus dem Satze von der Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer unabhängiger Ereignisse auf zwei verschiedene Weisen berechnet: einmal direct durch Betrachtung des Zustandes nach dem Stoss, das andere Mal durch Betrachtung des Zustandes vor

dem Stoss. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke resultirt dann das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz. Die erste Berechnungsart ist aber im Allgemeinen nicht zulässig, da die Zustände der Moleküle nach dem Stoss nicht mehr unabhängige Ereignisse sind im Sinne jenes benutzten Satzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nur bei Gültigkeit des Maxwell'schen Gesetzes wird also jene Berechnung richtig, oder mit anderen Worten: wenn das Maxwell'sche Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz gilt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Moleküle mit bestimmten Geschwindigkeiten auseinanderfliegen, ebenso gross als die, dass zwei Moleküle mit denselben Geschwindigkeiten zusammentreffen. Bei allen anderen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzen gilt dieser Satz nicht.

Wenn man nun in einem in vollständigem Gleichgewicht befindlichen Gas die Geschwindigkeiten sämmtlicher Moleküle plötzlich gerade umgekehrt denkt, so verwandelt sich je ein Paar gerade vor einem Zusammenstoss befindlicher Moleküle in ein Paar gerade auseinanderfliegender Moleküle und umgekehrt; dann vertauschen sich also auch die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Gilt nun das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz, bei welchem diese Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind, so befindet sich auch nach dem Verwandlungsakt das Gas in einem Zustand dynamischen Gleichgewichts; gilt aber ein anderes Vertheilungsgesetz, so kann dies offenbar nicht mehr zutreffen.

Nun besagt aber ein allgemeiner, aus dem Hamilton'schen Princip abzuleitender Satz der Mechanik, dass in einem Punktsystem mit conservativen Kräften, welches sich im dynamischen Gleichgewicht befindet, eine plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten abermals einen dynamischen Gleichgewichtszustand bedingt. Demzufolge muss man schliessen: „Das Maxwell'sche Gesetz ist das einzige Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz, welches im Einklang steht

mit dem Satze der Mechanik, dass der dynamische Gleichgewichtszustand eines Punktsystems durch ein plötzliches Umkehren aller Geschwindigkeiten nicht gestört wird." Durch diese Ueberlegung wird, so viel ich sehe, der Boltzmann'sche Einwand ganz vermieden und das Maxwell'sche Gesetz auf einen festeren Boden gestellt. Hervorheben möchte ich noch besonders, dass die Frage, ob eine solche plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten physikalisch ausführbar ist, hiebei ganz ausser Betracht bleibt.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1894.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Entsprechend der Geschäftsordnung der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften finden jährlich zwei öffentliche Sitzungen statt, zu welchen nicht nur Eingeladene, sondern Jedermann Zutritt hat; die eine an einem sogenannten Königstage, zu Ehren ihres Protectors, die andere an ihrem Stiftungstage. Die heutige Festsitzung gilt unserm durchlauchtigsten derzeitigen Protector, Seiner königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, der in diesem Saale ebenso wohlwollend zu uns niederschaut, wie wir alle ehrfurchtsvoll und dankbar zu ihm aufschauen.

Zunächst sei mir gestattet, einige Thatsachen mitzutheilen, aus welchen hervorgeht, wie unablässig unser Protector und seine Staatsregierung für die Akademie und für die wissenschaftlichen Sammlungen, welche mit der Akademie verbunden sind, Sorge tragen, und nebstdem auch zu erwähnen, was von anderen Seiten geschehen ist, die Zwecke der Akademie und des Generalconservatoriums zu fördern.

Dann wird durch die HH. Classensecretäre die Verkündigung der von Seiner königlichen Hoheit bestätigten Wahlen neuer Mitglieder folgen und schliesslich Hr. College Professor Dr. Sohncke die Festrede über einen allgemein interessirenden Gegenstand, über die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten, halten.

Als ich im vorigen Jahre an dieser Stelle über akademische Ereignisse der vorangegangenen Zeit berichtete, gedachte ich auch unseres an den damals versammelten Landtag gerichteten Antrages, der Akademie ein Capital von etwa 500 000 ℳ oder einen jährlichen Zuschuss von 20 000 ℳ zu bewilligen, um damit wissenschaftliche Unternehmungen der drei Classen unserer Akademie zu ermöglichen. Regierung und Landtag haben in dankenswerther Weise wenigstens einen Theil dieses Antrages sich angeeignet und einen auf 20 Jahre berechneten jährlichen Zuschuss von 5000 ℳ bewilligt, um damit die Kosten der von unserer Akademie im Bunde mit den anderen grossen wissenschaftlichen Körperschaften Deutschlands und Oesterreichs geplanten und bereits begonnenen Bearbeitung eines neuen grossen lateinischen Wörterbuches (Thesaurus linguae latinae) zu bestreiten. Seither haben die hiefür verbundenen fünf Körperschaften eine eigene Commission für dieses Unternehmen gebildet, zu deren thätigsten Mitgliedern eines der Mitglieder unserer philosophisch-philologischen Classe, Prof. Dr. v. Wölfflin, gehört.

Wir erneuern den Ausdruck unseres lebhaften Wunsches, dass insbesondere den naturwissenschaftlichen Disciplinen weitere hochherzige Spenden des künftigen Budgetlandtages zu Hülfe kommen möchten.

Der neu begründete Verband wissenschaftlicher Körperschaften hat seither zwei weitere Delegirten-Versammlungen gehalten, die erste im Mai dieses Jahres in Göttingen, die andere im September in Innsbruck. Auf beiden wurde

namentlich der Plan eines weiteren gemeinsamen wissenschaftlichen Unternehmens, gleichartig organisirte Untersuchungen über den Zusammenhang der Erdschwere mit den tektonischen Verhältnissen der Erdrinde, berathen. In Göttingen wurde beschlossen, zu diesem Zwecke mit der seit Jahren bestehenden internationalen Commission für Erdmessung, an der auch unsere Akademie durch eine eigene ständige Commission betheiligt ist, in Verbindung zu treten. Das ist nun auch in Innsbruck geschehen und hat dahin geführt, dass die vom 5. bis 12. September dort tagende permanente Commission der internationalen Erdmessung sich bereit erklärte, dahin zu wirken, dass aus ihrem Schoosse eine eigene Section für das Studium der Schwere sowohl nach ihrer Intensität, wie auch nach ihrer Richtung gebildet werde, von welcher Section durch Beiziehung von Geologen auch die einschlägigen geologischen und geophysischen Probleme bearbeitet werden könnten.

Von den vom bayerischen Landtag für die Zwecke der Akademie und der mit ihr verbundenen wissenschaftlichen Sammlungen des Staates weiterhin neubewilligten Summen sind besonders hervorzuheben: der Betrag von 168000 ℳ für den vollständigen Umbau der Gewächshäuser im Botanischen Garten und für die neue Einrichtung des Botanischen Instituts, weiter die für den Neubau des Physiologischen Hörsaales und den Umbau des Physiologischen Instituts bewilligte Summe von 162000 ℳ.

Kleinere Beträge, zusammen etwa 9400 ℳ, wurden für Einrichtung oder Ausstattung des Botanischen Instituts, dann der mathematisch-physikalischen, der geologischen und der mineralogischen Sammlung im ausserordentlichen Etat bewilligt. Der ordentliche Etat der zoologischen Sammlung wurde um jährlich 1714 ℳ erhöht.

Mit Bedauern muss ich erwähnen, dass der Conservator der mathematisch-physikalischen Sammlung, Geheimrath

Professor Dr. v. Boltzmann, schon nach einer Wirksamkeit von drei Jahren uns wieder verlassen hat, um einem höchst ehrenvollen Ruf in seine Heimath, nach Wien, zu folgen. Die Akademie kann, gleich der mit ihr zu einträchtigem Wirken verbundenen Ludwigs-Maximilians-Universität, nur den Wunsch und die Hoffnung aussprechen, dass recht bald ein dieses Vorgängers würdiger Nachfolger sich finden möge.

Eine wesentliche Aenderung ist auch bei dem bis in die jüngste Zeit mit dem k. Münzcabinet durch eine Art von Personalunion verbundenen Museum von Abgüssen classischer Bildwerke erfolgt, indem nach dem Rücktritt des inzwischen verstorbenen Conservators der beiden Sammlungen, des Geheimen Raths Professor Dr. v. Brunn, das von ihm begründete Museum von Gypsabgüssen unter dem neuen Professor der Archäologie an der Universität München, Professor Dr. Furtwängler, zum Range eines selbständigen Conservatoriums erhoben und damit einem von seinem Gründer seit langen Jahren gehegten Wunsch entsprochen wurde.

Aus dem der Akademie gehörenden, hauptsächlich der Vermehrung unserer wissenschaftlichen Sammlungen dienenden, leider nur allzu kleinen sogen. Mannheimer Reservefonds haben seit meinem letzten Bericht die paläontologische Sammlung, das Botanische Institut, das Antiquarium und die mathematisch-physikalische Sammlung bescheidene Zuschüsse erhalten, theils zur Vermehrung der Sammlungen, theils zur Anschaffung von Instrumenten. Sollte der nächste Landtag unserer Bitte um Gründung eines neuen akademischen Fonds Gehör schenken, so würde uns damit die Möglichkeit geboten, diese und andere ebensosehr der allgemeinen Volksbildung wie dem strengen wissenschaftlichen Studium dienende Sammlungen auf eine Stufe zu heben, welche den verwandten Instituten anderer Staaten entspricht.

Inzwischen freuen wir uns, wenn hin und wieder — und geschähe es nur in zehnfach höherem Maassstab! — der patriotische und wissenschaftliche Eifer von einzelnen Privaten unsere Staatssammlungen bedenkt. Von dem, was im letzten Jahre auf diese Weise denselben zugekommen ist, gedenke ich dankbar der Geschenke, welche unsere Landsleute, der kaiserliche Gouverneur von Kamerun, Eugen v. Zimmerer, dann Herr Hofrath Dr. Martin in Sumatra, weiter der Afrikareisende Dr. Holub in Wien dem ethnographischen Museum und der zoologischen Sammlung gemacht haben. — Hochwillkommen waren auch schöne Geschenke, mit welchen die HH. Apotheker Burger und Zeichnungslehrer Heinrich Morin dahier, sodann Professor Selenka in Erlangen und Apotheker Wispauer in Singapore die zoologische Sammlung bedacht haben.

Die zoologische Sammlung hat ihrerseits gern zur weiteren Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse im Lande beigetragen dadurch, dass sie entbehrliche Doubletten verschiedenen Gymnasien und anderen Mittelschulen zutheilte.

Auf ihrem engeren Arbeitsgebiet hat die Akademie auch im vergangenen Jahre besonders nach zwei Richtungen hin sich thätig erwiesen: einerseits durch eigene wissenschaftliche Publicationen philosophisch-philologischer, mathematisch-physikalischer und historischer Art, andererseits durch Pflege eines sehr ausgedehnten Schriftentausches mit zahlreichen anderen wissenschaftlichen Instituten und Körperschaften — ein Tausch, welcher insbesondere der kgl. Hof- und Staatsbibliothek zu gute kommt, der wir nach altem Herkommen alle uns nicht doppelt zugehenden Publicationen überreichen.

Von den speciellen Unternehmungen unserer Akademie gedenke ich heute auch noch des seit einer Reihe von Jahren theils durch Geldmittel, theils durch Arbeitskräfte der Aka-

demie geförderten Werkes, der Herstellung einer hydrographischen Karte des Bodensees, eines Unternehmens, zu dem sich die fünf Uferstaaten verbunden hatten und welches nun Anfangs dieses Jahres zu einem gewissen Abschluss gelangt ist. Die gemeinsamen Kosten beliefen sich bis dahin auf etwa 56 000 Francs; auf Bayern, d. h. auf unsere Akademie, trafen davon etwa 7300 Francs oder 5800 ℳ, ungerechnet die von uns besonders gedeckten Reisekosten einzelner Mitarbeiter an dem schönen Unternehmen. Wenn wir uns dabei erinnern, wie schwer es uns manchmal gewesen ist, einen an sich so kleinen Betrag an unsern laufenden jährlichen Ausgaben gleichsam abzusparen, so müssen wir immer wieder mit einem gewissen Neid unserer Genossinnen zu Berlin und Wien gedenken, welche für sich allein zehnmal grössere wissenschaftliche Unternehmungen in die Hand nehmen und zu Ende führen können.

Ich möchte desshalb schliesslich hier noch beifügen, dass die reichen Mittel, welche anderen Akademien zu Gebote stehen, nicht allein vom Staate kommen, sondern dass ansehnliche Theile auch aus Schenkungen von Personen stammen, welche unaufgefordert wissenschaftliche Forschungen und Werke grossmüthig zu unterstützen streben. So besitzt z. B. die Wiener Akademie durch mehrere testamentarische Verfügungen ein Capital von nahezu 200 000 Gulden österreichischer Währung, d. i. gegen 400 000 ℳ, dessen Zinsen sie im Sinne der Stifter für verschiedene wissenschaftliche Zwecke verwenden kann. Unsere Akademie hat nur ein einziges Mal einen reichen Geber gefunden, der aber kein Münchener, auch kein Bayer, noch aus einem anderen Theile von Deutschland ist. Im Jahre 1877 schenkte uns ein Grieche, der Bankier Hr. Christakis Zographos, zur Förderung des Studiums der griechischen Sprache und Literatur ein Capital im Betrage von 25 000 Francs oder 20 000 ℳ. Mit den Zinsen von diesem Capitale konnten Preisaufgaben

gestellt und die rühmlichst gelösten honorirt werden. Zwei der Preisträger, die HH. Oberhummer und Krumbacher, wurden dadurch veranlasst, Reisen nach Griechenland und in den Orient zu unternehmen und seltene Handschriften in auswärtigen Bibliotheken zu untersuchen. Der Zographos-Fonds gehört ausschliesslich unserer philosophisch-philologischen Classe zur Verwendung; aber auch die historische Classe und namentlich die mathematisch-physikalische hätte viele Wünsche und Aufgaben, die weder durch den Zographos-Fonds, noch durch den Thesaurus linguae latinae gefördert werden können.

Wahlen.

Der Classensekretär, Herr C. v. Voit, giebt sodann die von der Akademie vorgenommenen und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigten Wahlen bekannt. Es wurden in der mathematisch-physikalischen Classe gewählt:

zum ordentlichen Mitgliede:

Herr Generalmajor a. D. Dr. Carl v. Orff, bisher ausserordentliches Mitglied;

zu ausserordentlichen Mitgliedern:

Herr Dr. Ferdinand Lindemann, o. Professor der Mathematik an der Universität München;

Herr Dr. Alfred Pringsheim, a. o. Professor der Mathematik an der Universität München.

Sitzung vom 1. Dezember 1894.

1. Herr H. SEELIGER legt eine Abhandlung: „über den Schatten eines Planeten“ vor.

2. Herr FERD. LINDEMANN spricht: „über die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird.“

3. Herr A. v. BAEYER hält einen Vortrag: „über die Natur der Terpentinöle und verwandter Substanzen.“

Die Resultate dieser Untersuchungen werden an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

Ueber die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 1. Dezember.)

Schon 1869 hatte Schwarz gelehrt, wie man das Innere einer Parabel und das Innere einer Ellipse auf das Innere eines Kreises (oder auf die Halbebene) conform abbilden kann; bald darauf fügte er die Abbildung des Aeusseren einer Parabel oder Ellipse hinzu.[2]) Auch für ein Flächenstück, das durch eine endliche Anzahl von geradlinigen Strecken oder Kreisbögen begrenzt wird, kann man die Abbildung nach Schwarz leisten,[3]) d. h. auf die Lösung einer gewissen Differentialgleichung (dritter Ordnung) zurückführen. Sanio hat dann in seiner Dissertation[4]) einen Ansatz zur Lösung für den Fall gegeben, dass es sich um ein Polygon

---

1) Borchardt's Journal Bd. 70 und Annali di matematica II. Serie t. 3. Vgl. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 77 und 102.

2) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 15. Jahrg. 1870. Gesammelte Abhandlungen Bd. II, p. 141.

3) Borchardt's Journal Bd. 70 und 75; vgl. für geradlinig begrenzte Flächen Christoffel, Annali di matematica, II. Serie Bd. 1, 1867, und Bd. 4.

4) Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogenpolygons auf eine Kreisfläche. Königsberg, 1885.

handelt, das von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkte begrenzt wird; doch lässt dieser Ansatz nicht die Richtung erkennen, in welcher eine Verallgemeinerung zu erwarten sei.

Andere Beispiele, in denen die Fläche durch einen stetig gekrümmten Curvenzug begrenzt wird, waren nicht bekannt. Kürzlich habe ich nun eine Methode angegeben,[1]) nach der das fragliche Problem gelöst werden kann, wenn sich eine rationale Function von x und y mit reellen Coëfficienten derartig bestimmen lässt, dass eine passende Potenz des Quotienten (wo Φ eine rationale Function bezeichnet)

$$\frac{\Phi(z, z_1)}{\frac{\partial f}{\partial z_1}}$$

eine rationale Function von z wird, vorausgesetzt, dass die Gleichung der begrenzenden Curve in der Form

$$f(z, z_1) = 0 \tag{1}$$

gegeben ward, und dass $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ gesetzt wird, wobei x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten. Dieser Fall liegt in den von Schwarz behandelten Beispielen (Ellipse und Parabel) vor, ferner bei der Hyperbel, bei jeder Curve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgeht, bei jeder Curve vierter Ordnung, welche in jedem der imaginären Kreispunkte einen Doppelpunkt hat, und bei vielen Curven $n$ter Ordnung, z. B. allen, deren Gleichung in der Form

$$a z^n z_1^n + b z^n + b_1 z_1^n + c = 0$$ [2])

---

1) Sitzungsberichte der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr., 7. Juni 1894.

2) Früher hatte ich nur den Fall $a = 0$ erwähnt; Herr A. Löwy machte mich darauf aufmerksam, dass man das Beispiel in der jetzt gegebenen Weise verallgemeinern kann.

geschrieben werden kann, wo a und c reell, b und b_1 zu einander conjugirt sind.

Wird dagegen der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine beliebige algebraische Curve gebildet, so soll durch die folgenden Ueberlegungen ein Ansatz für das betreffende Problem gegeben werden.

1. Wir setzen $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$, wo x und y die orthogonalen Coordinaten eines Punktes des Randes seien, und schreiben die Gleichung der begrenzenden Curve $n$ter Ordnung wieder in der Form (1); dieselbe möge keine singulären Punkte besitzen.

Wir benutzen im Folgenden vielfach diejenige Function η, durch welche sich die Coordinaten eines Punktes der Curve nach Schottky, Poincaré und Klein als eindeutige Functionen darstellen lassen. Es werde allgemein

$$\{\varphi, z\} = \frac{d^2 \log \varphi'}{d z^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \varphi'}{d z}\right)^2 \tag{2}$$

gesetzt, wo $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$; dann ist bekanntlich nach Schottky und Cayley[1]), wenn z als Function von Z gedacht wird:

$$\{\varphi, Z\} = \{z, Z\} + \{\varphi, z\}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2. \tag{3}$$

Ersetzt man hierin φ und z durch z_1, so wird

$$\{z, z_1\}\left(\frac{dz_1}{dX}\right)^2 = -\{z_1, z\}\left(\frac{dz}{dX}\right)^2. \tag{4}$$

Durch die complexe Variable $Z = X + iY$ werde ein Punkt der Halbebene $Y > 0$ dargestellt, auf welche das von der Curve (1) umschlossene Oval abgebildet werden soll. Auf dem Rande ist dann $Z = X$ reell, während $z = x + iy$

1) Vgl. z. B. Schwarz, Gesammelte math. Abhandlungen, Bd. II, p. 362.

und $z_1 = x - iy$ einander conjugirt sind. Man erkennt demnach aus (4), dass die linke Seite nur ihr Zeichen wechselt, wenn man i mit $-i$ vertauscht; diese linke Seite ist also auf dem Rande rein imaginär.[1]

2. Vermöge der Gleichung (1) fassen wir z_1 als Function von z auf. Ueber der z-Ebene haben wir dann eine Riemann'sche Fläche, deren Verzweigungspunkte mit den Brennpunkten der Curve $f = 0$ zusammenfallen.[2] Die Ausdehnung der Abbildungs-Aufgabe auf diese ganze Fläche führte mich in den eben bezeichneten einfachen Fällen zur Lösung und wird uns auch jetzt zum Ziele führen.

Das auf die Halbebene abzubildende Flächenstück wird durch ein Oval der Curve $f = 0$ begrenzt. Das Blatt der Fläche, in welchem das Oval liegt, bezeichnen wir als erstes Blatt. Dasselbe ist in der Regel durch mindestens zwei Brennpunkte, die im Innern des Ovals liegen, mit einem zweiten Blatte verbunden (wie man durch Grenzübergang erkennt, wenn man einen Doppelpunkt auflöst). Ausserdem hängt das erste oder zweite Blatt vielleicht durch andere Brennpunkte mit noch weiteren Blättern der Fläche zusammen. Alle Brennpunkte, zu denen man von einem im

---

1) Man zeigt leicht, dass sie gleich $4i\frac{dk}{dX}\cdot\frac{ds}{dX}$ ist, wenn k das Krümmungsmaass, und ds das Bogenelement der Curve bezeichnen.

2) Bei Construction dieser Fläche ist es nützlich, sich derjenigen Vorstellungen zu bedienen, welche ich in den „Vorlesungen über Geometrie" (Bd. II, Theil 1, p. 621 ff., 1891) über die Interpretation der complexen Zahl z entwickelt habe, und welche den Zusammenhang mit den imaginären Kreispunkten und sonach mit den Brennpunkten sofort erkennen lassen. Klein erwähnt neuerdings in einem Berichte über seine Vorlesungen (1891—92), dass er sich derselben Art Riemann'scher Flächen bedient habe (Math. Annalen Bd. 45, p. 143); es sei bemerkt, dass ich die oben erwähnten Beispiele der Abbildungsaufgabe schon 1892 vorgetragen habe, vgl. auch Sitzungsbericht der phys.-ökon. Ges. zu Königsberg i. Pr. vom 6. Oktober 1892.

ersten Blatte und innerhalb des Ovals gewählten Punkte gelangen kann, ohne das Oval oder eine in anderen Blättern über dem Oval liegende Curve zu überschreiten, bezeichnen wir als innere Brennpunkte, alle anderen als äussere Brennpunkte. Ein Verzweigungspunkt, der zwar im Innern des Ovals liegt, aber nicht in einem Blatte, in das man ohne das Oval zu überschreiten aus dem Innern des Ovals (im ersten Blatte genommen) gelangen könnte, ist also auch ein äusserer Brennpunkt.

Betrachten wir eine Function, welche von dem Punkte z, z_1 innerhalb dieser untereinander verzweigten Blätter eindeutig abhängt (wobei z, z_1 weder den Rand des Ovals noch eine darüber liegende Curve überschreitet), als Function von $Z = X + iY$ (wo $Y > 0$ die als Bild dienende Halbebene definirt), so erhalten wir über der Z-Ebene eine Riemann'sche Fläche, in welcher jedem „inneren" Brennpunkte der Curve $f = 0$ ein Verzweigungspunkt der oberen Halbebene entspricht, und bei der vermöge dieser Verzweigungspunkte ebenso viele Blätter zusammenhängen als bei der gegebenen Fläche im Innern des Ovals. Es fragt sich nun, wie ist diese Riemann'sche Fläche über die reelle X-Axe hinaus in jedem der fraglichen Blätter fortzusetzen, wenn der Punkt z, z_1 den Rand des Ovals in einem der über der z-Ebene liegenden Blätter überschreitet?

Geschieht dies im ersten Blatte, so ist klar (da die betrachtete Function für reelle Werthe von X im ersten Blatte reell sein muss, um für das Abbildungsproblem verwandt werden zu können), dass sich über die untere Halbebene eine symmetrische Riemann'sche Fläche als Fortsetzung des zuerst betrachteten Theiles ausbreiten wird; dieselbe besteht aus einer gleichen Anzahl von Blättern, und in ihnen nimmt die betrachtete Function Werthe an, welche denjenigen conjugirt sind, die ihr in den entsprechenden Punkten der

Blätter über der oberen Halbebene zukommen. Wie sich aber die so über der unteren Halbebene ausgebreiteten Blätter nun wieder in die obere Halbebene fortsetzen, bleibt zu erörtern.[1])

3. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Curve $f = 0$ aus $p + 1$ reellen Zügen besteht, wenn p das Geschlecht der Curve bezeichnet. Nach Schottky[2]) kann man die vom Punkte z, z_1 gebildete Riemann'sche Fläche auf einen durch $2p$ Kreise (von denen etwa einer die übrigen umschliesst) begrenzten Theil der Ebene conform und eindeutig abbilden. Ist ein Punkt der letzteren durch die complexe Zahl η bestimmt, so geschieht die Abbildung durch Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\{\eta, z\} = \varphi(z, z_1), \tag{5}$$

wo φ eine gewisse rationale Function von z und z_1 bezeichnet; es wird η als Quotient der beiden particulären Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coëfficienten gefunden.

Die $2p$ Kreise sind einander paarweise zugeordnet, so dass der Punkt η von dem einen Kreise eines Paares zu dem zugeordneten springt, wenn der Punkt z, z_1 einen bestimmten von den $p + 1$ reellen Zügen der Curve überschreitet. Jedem reellen Zuge (einen zunächst ausgenommen) entspricht so ein Paar von Kreisen; jedes Paar besteht aus

---

1) Bei den früher von mir behandelten Beispielen geschah dies einfach, indem die über $Y > 0$ liegenden Halbblätter sich sämmtlich direct in die über $Y < 0$ liegenden Halbblätter fortsetzten. Im Allgemeinen geschieht dies indessen nur im ersten Blatte.

2) Vgl. Borchardt's Journal Bd. 83, 1877 (und die 1875 erschienene Dissertation). Schottky und Klein machen darauf aufmerksam (Math. Annalen Bd. 20, p. 300 und Bd. 21, p. 143), dass sich in dem 1876 veröffentlichten Riemann'schen Nachlasse (Ges. Werke, p. 413) bereits ähnliche Untersuchungen finden.

zwei Kreisen, die einander in Bezug auf einen und denselben $(2p+1)$ten Kreis zugeordnet sind und durch eine solche lineare Transformation von η (eigentlich durch eine „Spiegelung") aus einander entstehen, welche diesen $(2p+1)$ten Kreis ungeändert lässt. Der letztere geht aus dem $(p+1)$ten reellen Zuge der Curve bei der Abbildung hervor. Die Function η kann über jeden Kreis hinaus durch den bekannten Process der „Spiegelung" fortgesetzt werden; dadurch wird die Unsymmetrie beseitigt, welche in Bezug auf den $(p+1)$ten reellen Zug nach der soeben gegebenen Darlegung zu bestehen scheinen würde. Auf jedem Kreise, also auch auf jedem reellen Zuge der Curve $f=0$, nimmt eine gewisse lineare Function von η reelle Werthe an.

4. Denjenigen Kreis, welcher dem Rande des gegebenen Ovals entspricht, denken wir uns als reelle Axe einer H-Ebene, auf welche wir die η-Ebene mittelst einer linearen Transformation abbilden. Die anderen $2p$ Kreise liegen dann paarweise symmetrisch zu dieser Axe.

Die Function $\{H, Z\}$ ist hiernach reell auf dem Rande des Ovals; für sie denken wir uns über der Z-Ebene die in Nr. 2 erwähnte mehrblättrige Fläche construirt.

Die reellen Coordinaten x, y eines reellen Punktes der Curve lassen sich nach Schottky als eindeutige automorphe Functionen von H darstellen:

$$x = \varphi(H), \quad y = \psi(H),$$

welche für reelle Werthe von H reell sind, also für conjugirte Werthe von H auch einander conjugirte Werthe annehmen. In den Veränderlichen z und z_1 haben wir die Parameter-Darstellung

$$(6) \qquad z = \varphi(H) + i\psi(H), \quad z_1 = \varphi(H) - i\psi(H).$$

Es sei nun $u_r + i v_r = \varphi(H_r)$, $w_r + i\omega_r = \psi(H_r)$; und es

mögen H_1, H_2, $\ldots H_\mu$ (wo $\mu \leqq n$ bei einer n-blättrigen Fläche) einen und denselben Werth von z (also über einander liegende Punkte der Fläche) ergeben, so dass:

$$u_1 - \omega_1 = u_2 - \omega_2 = \ldots\ldots = u_\mu - \omega_\mu,$$
$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2 = \ldots\ldots = v_\mu + w_\mu.$$

Wir behaupten, dass dann die den conjugirten Werthen von $H_1, \ldots H_\mu$ zugeordneten Punkte der Fläche nicht ebenfalls über einander liegen können, falls $\mu > 2$ ist. In der That, sollte dieses der Fall sein, so hätten wir für zwei verschiedene Werthe der Indices r und s

$$u_r - i\,v_r + i\,(w_r - i\,\omega_r) = u_s - i\,v_s + i\,(w_s - i\,\omega_s),$$

also:

$$u_1 + \omega_1 = u_2 + \omega_2 = \ldots\ldots = u_n + \omega_\mu,$$
$$v_1 - w_1 = v_2 - w_2 = \ldots\ldots = v_n - w_\mu;$$

und es würde sich ergeben

$$u_1 = u_2 = \ldots\ldots = u_\mu,\ v_1 = v_2 = \ldots\ldots = v_\mu,$$
$$w_1 = w_2 = \ldots\ldots = w_\mu,\ \omega_1 = \omega_2 = \ldots\ldots = \omega_\mu.$$

Es würden also auch die zugehörigen Werthe von z_1 (nemlich $u_r - \omega_r + i\,(v_r + w_r)$) sämmtlich einander gleich, und der fragliche Punkt wäre ein $(\mu-1)$-facher Verzweigungspunkt der Curve $f = 0$; das Auftreten eines solchen aber können wir, falls $\mu > 2$, vorläufig ausschliessen. Der Fall $\mu = n = 2$ ist durch die früher von mir behandelten Beispiele schon vollständig erledigt.

5. Kehren wir jetzt zu dem Probleme der Fortsetzung unserer über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche zurück. Mit dem ersten Blatte der ursprünglichen Fläche (in dem das gegebene Oval liegt) mögen μ Blätter in der geschilderten Weise zusammenhängen; wir denken sie uns durch Ränder r_1, r_2, $\ldots r_\mu$ begrenzt, die über dem Ovale liegen, während

r_1 mit dem Ovale zusammenfällt. Letzteren entsprechen μ geradlinige Ränder über der reellen X-Axe: $R_1, R_2, \ldots R_\mu$, welche ebenso viele Halbebenen ($Y > 0$) begrenzen. Die conjugirten Halbebenen ($Y < 0$) werden durch die Ränder $R'_1, R'_2, \ldots R'_\mu$ begrenzt, die ebenfalls über der X-Axe liegen, und von denen R_1 mit R'_1 identisch ist. Diesen neuen Randcurven entsprechen wieder in der ursprünglichen Fläche geschlossene Curven $r'_2, r'_3, \ldots r'_\mu$, die zu den Curven $r_2, r_3, \ldots r_\mu$ conjugirt sind, deren Bilder in der H-Ebene daher leicht zu bestimmen sind; sie können, wie soeben in Nr. 4 gezeigt wurde, nicht übereinander liegen. Wir wählen diejenige Curve r' aus, welche am weitesten über die anderen Curven r' hinübergreift;[1]) in dem ganzen durch sie begrenzten Gebiete ist dann z als Function von Z definirt, also auch jede algebraische Function von z, und zwar letztere zugleich in allen darüber oder darunter liegenden Theilen von Blättern der ursprünglichen Riemann'schen Fläche. Diese Curve r' und die $\mu - 1$ über oder unter ihr in den anderen Blättern der Fläche liegenden Curven geben neue Ränder, welche das ursprünglich für die Variable z gegebene Gebiet wesentlich erweitern. In entsprechender Weise ist damit auch über der Z-Ebene das Gebiet der Variabeln Z und der zur Darstellung von $\{H, Z\}$ dienenden Fläche bis an neue Ränder R''_2, $R''_3, \ldots R''_\mu$ über die Ränder $R'_2, R'_3, \ldots R'_\mu$ hinaus fortgesetzt. Dasselbe gilt von den conjugirt imaginären Gebieten der Fläche; sie sind über die Ränder $R_2, R_3, \ldots R_\mu$ hinaus in die untere Halbebene bis an neue Ränder $P_2, P_3, \ldots P_\mu$ fortgesetzt; vielleicht haben einige dieser Ränder dabei bereits die ganze untere Halbebene überstrichen und befinden sich in neuen Blättern über der oberen Halbebene, in welchem Falle die entsprechenden (conjugirten) Ränder R'' in

1) Statt dessen könnte man eine neue Curve construiren, welche sich aus möglichst günstig gewählten Theilen der verschiedenen Curven $r'_2, r'_3, \ldots$ zusammensetzt.

der unteren Halbebene verlaufen. Den Rändern P_2, P_3, $\ldots P_\mu$ entsprechen über der z-Ebene in der ursprünglichen Fläche Curven ϱ_2, ϱ_3, $\ldots \varrho_\mu$, welche der Curve r' und den direct über oder unter ihr liegenden Curven conjugirt sind (immer in dem Sinne, dass einander entsprechende Punkte durch conjugirte Werthe von H gemäss (6) dargestellt werden), und welche daher selbst nach Nr. 4 nicht übereinander liegen können. Mit ihnen kann man in gleicher Weise die gemachten Schlüsse fortsetzen. Jedem von z beschriebenen Wege entspricht gemäss diesen Ueberlegungen ein angebbarer Weg der Variabeln Z und umgekehrt.

6. Es fragt sich zunächst, ob die Variable z sich vielleicht einer Grenzcurve nähern kann, über die hinaus eine Fortsetzung nicht mehr möglich ist. Sollte dies geschehen, so müsste der zum conjugirten Werthe von H gehörige Punkt z' sich ebenfalls einer natürlichen Grenze nähern; und dasselbe müsste für alle zugehörigen $\mu - 1$ Punkte in der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche der Fall sein. In jedem Blatte hätte man eine solche Grenzcurve über derjenigen, welche in einem Blatte als natürliche Grenze von z auftritt; die conjugirten Punkte müssten dann in den verschiedenen Blättern die conjugirten Grenzcurven bilden, also alle übereinander liegen, was nach Nr. 4 nicht möglich ist.

Das Gebiet der Variabeln z ist also, wenn z als Function von Z betrachtet wird, in keiner Weise durch eine natürliche Grenze beschränkt.

7. In analoger Weise zeigt man, dass z als Function von Z keinen wesentlich singulären Punkt haben kann, wenn die Variable η auf das in Nr. 3 geschilderte, von $2p$ Kreisen begrenzte Gebiet beschränkt bleibt.

Sollte nemlich an irgend einer Stelle z die Function Z

wesentlich singulär sein, so müsste auch $\{\eta, Z\}$ dort eine wesentliche Singularität haben, und es müsste dasselbe für alle über z gelegenen Stellen der zur Darstellung von $\{\eta, z\}$ dienenden Fläche gelten, ebenso für alle conjugirten Stellen. Die letzteren aber liegen nicht übereinander, jede von ihnen gibt also zu weiteren Punkten der zuletzt erwähnten Riemann'schen Fläche Veranlassung, die ebenfalls wesentlich singulär sind, u. s. f. Einer der so erhaltenen singulären Punkte müsste dann in das Innere des ursprünglichen Ovals fallen, wie folgende Schlussweise lehrt.

Nehmen wir z. B. an, ein solcher Punkt Z_0 läge im Innern eines durch die in Nr. 5 benutzten Ränder P_1, P_2, $\ldots P_\mu$ und R_1, R_2, $\ldots R_\mu$ begrenzten Gebietes; der entsprechende Punkt z_0 liegt dann innerhalb des durch die Curve r' begrenzten Gebietes, und zwar als wesentlich singulär in allen übereinanderliegenden Blättern; die gleiche Singularität muss dann in den conjugirten Gebieten, d. h. auch innerhalb des ursprünglichen Ovals vorkommen, was nicht möglich ist. Liegt der Punkt Z_0 ausserhalb der Ränder P, so hat man die frühere Schlussweise in gleicher Weise rückwärts fortzusetzen. Wesentliche Singularitäten sind also bei der Abhängigkeit der Grössen Z und z von einander ausgeschlossen, soweit solche nicht schon bei der Abhängigkeit der Function η von z vorkommen, d. h. so lange η (oder H) keinen der früher besprochenen $2p$ Kreise überschreitet.

8. Wir untersuchen noch, wie sich die reellen Züge der gegebenen Curve über der Z-Ebene abbilden, d. h. wie sich Z ändert, wenn H einen der $2p$ Kreise überschreitet.

Geht H von einem Punkte der reellen Axe aus in der oberen Halbebene zu einem Punkte des Kreises K, so läuft gleichzeitig der conjugirte Punkt H_1 in der unteren Halb-

ebene dem entsprechenden Punkte des conjugirten Kreises K_1 zu. Diesen beiden Wegen entsprechen zwei Wege in der ursprünglichen (über der z-Ebene ausgebreiteten) Riemann'schen Fläche, welche vom Punkte z, z_1 der Randcurve des ersten Ovals zum Punkte z', z_1' eines zweiten reellen Zuges hinführen, und ebenso zwei Wege in der über der Z-Ebene ausgebreiteten Fläche, welche vom ursprünglichen Punkte der reellen X-Axe aus zu einem (in einem anderen Blatte gelegenen) Punkte Z' bezw. zu dem Punkte Z_1' im conjugirten Blatte führen. Dabei ist Z' eine Function von z', und umgekehrt; ebenso ist z_1' eine Function von Z_1', also auch (da z_1' eine Function von z' ist) von Z', und nach Gleichung (3) haben wir identisch:

$$[\{z', Z'\} - \{z_1', Z'\}] \left(\frac{d\,Z'}{d\,t}\right)^2 = \{z', z_1'\} \left(\frac{d\,z_1'}{d\,t}\right)^2.$$

Bedeutet t einen reellen Parameter, so ist die rechte Seite rein imaginär (vgl. oben Nr. 1); es ist folglich $\{z', Z'\}\,(d\,Z')^2$ conjugirt zu $\{z_1', Z'\}\,(d\,Z')^2$; andererseits ist derselbe Ausdruck conjugirt zu $\{z_1', Z_1'\}\,(d\,Z_1')^2$; es folgt also

$$\{z_1', Z'\}\,(d\,Z')^2 - \{z_1', Z_1'\}\,(d\,Z_1')^2 = 0.$$

Ferner ist nach (3) die linke Seite der letzten Gleichung identisch gleich $-\{Z', Z_1'\}\,(d\,Z_1')^2$; es ist somit $\{Z', Z_1'\} = 0$, d. h. es besteht eine Relation der Form

$$(7) \qquad \alpha\,Z'\,Z_1' + \beta\,Z' + \gamma\,Z_1' + \delta = 0.$$

Dieses aber ist die Gleichung eines Kreises. Auf der über der Z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche entspricht daher jedem reellen Zuge der Curve $f = 0$ ein Paar von einander zugeordneten Kreisen. Entweder muss das Innere oder das Aeussere eines solchen Kreises als durch ihn begrenzt betrachtet werden.

Ueber diese Kreise hinaus kann man den Verlauf der

Function Z durch den Process der „Spiegelung" verfolgen, genau wie es mit der Function H durch Spiegelung an den $2p$ Kreisen der H-Ebene geschieht. Bei wiederholter Anwendung des Processes wird man schliesslich eine Fläche mit unendlich vielen Blättern und unendlich vielen Verzweigungen construiren. Nähert sich der Punkt Z einer Stelle, wo sich diese Verzweigungen unendlich häufen, so wird der Punkt z unendlich oft die reellen Züge der Curve $f = 0$ überschreiten, also einen unendlich langen Weg beschreiben. Durch dieses Verhalten ist die Abhängigkeit der Grössen z und Z von einander als eine im Allgemeinen transscendente charakterisirt.

9. Es erübrigt noch, die Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche näher zu untersuchen. Als solche treten, wie wir bereits wissen (Nr. 2), die den inneren Brennpunkten von $f = 0$ entsprechenden Punkte und die ihnen conjugirten Punkte auf. Um die Frage allgemein in Angriff zu nehmen, setzen wir wie in Nr. 4

$$z = u + iv + i(w + i\omega) = u - \omega + i(v + w),$$
$$z_1 = u + iv - i(w + i\omega) = u + \omega + i(v - w).$$

Der conjugirte Punkt hat dann die Coordinaten

$$z' = u - iv + i(w - i\omega) = u + \omega - i(v - w),$$
$$z_1' = u - iv - i(w - i\omega) = u - \omega - i(v + w).$$

Seien nun $z = a$, $z_1 = a_1$ die Coordinaten eines Punktes der ursprünglichen Fläche und

$$(8) \qquad z = a + (Z - A)^{\lambda}\,\mathfrak{P}, \quad z_1 = a_1 + (Z - A)^{\mu}\,\mathfrak{P}^0,$$

wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^0$ Potenzreihen bedeuten. Dann wird, da z_1' zu z, z' zu z_1 conjugirt imaginär ist

$$(9) \qquad z' = a_1' + (Z_1 - A_1)^{\mu}\,\mathfrak{P}_1^0, \quad z_1' = a' + (Z_1 - A_1)^{\lambda}\,\mathfrak{P}_1,$$

wenn a', a_1', $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1^0$ bezw. zu a, a_1, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^0$ conjugirt imaginär sind.

Für einen Punkt, dem derselbe Werth von z, aber ein anderer von z_1 zukommt, sei

$$\zeta = u' - \omega' + i(v' + w') = z = u - \omega + i(v + w)$$
$$\zeta_1 = u' + \omega' + i(v' + w').$$

Ihm ist dann der Punkt

$$\zeta' = u' + \omega' - i(v' - w'),\quad \zeta_1' = u' - \omega' - i(v' + w')$$

conjugirt; es ist also, da $u' - \omega' = u - \omega$ und $v' + w' = v + w$ war, ζ_1' identisch mit z_1'. Werde $\zeta' = \alpha$ für $Z_1 = A_1$, so haben wir

$$(10)\quad \zeta' = \alpha + (Z_1 - A_1)^{\nu}\mathfrak{P}_2,\quad \zeta_1' = a' + (Z_1 - A_1)^{\lambda}\mathfrak{P}_1.$$

Sei nun erstens der Punkt a, a_1 kein ausgezeichneter Punkt der Fläche $f = 0$, so ist $\lambda = \mu$. Ist der Punkt ζ', ζ_1' ebenfalls nicht ausgezeichnet, so ist auch $\nu = \lambda = \mu$. Sei λ von 1 verschieden, so haben wir nach (8) und (9) sowohl in A als in A_1 einen Verzweigungspunkt, nach (10) aber auch in jedem Punkte, welcher in der ursprünglichen Fläche über einem zu a, a_1 conjugirten Punkte liegt; das aber ist unmöglich, wie die in Nr. 7 angewandte Schlussweise sofort erkennen lässt. Wäre der Punkt α, a' zufällig ein Brennpunkt, so ist in der folgenden Betrachtung nur ζ, ζ_1 durch a, a_1 zu ersetzen.

Sei zweitens a, a_1 ein Brennpunkt von $f = 0$. Dann haben wir $\lambda = 2\mu$. Ist auch $\nu = \lambda = 2\mu$, so ergibt sich für $\lambda \gtrless 1$ dieselbe Unmöglichkeit, wie vorhin. Für $\lambda = 1$ folgt aus (9)

$$z_1' - a' = (z' - a_1')^2\,\mathfrak{P}_3;$$

diese Gleichung sagt aus, dass der zum Brennpunkte conjugirte Punkt der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ genügt, wie es auch direct einleuchtet. Aus (10) ergibt sich kein Widerspruch;

$\lambda = 1$ ist also die einzig mögliche Annahme. Wäre ν von λ verschieden, so wäre der Punkt α, α' zufällig selbst auch ein Brennpunkt oder ein Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$; dann wird man einen anderen über z, z_1 liegenden Punkt benutzen können, dessen conjugirter kein Brennpunkt ist, und analoge Schlüsse wiederholen.

Nicht nur die „inneren", sondern auch die „äusseren" Brennpunkte der Curve $f = 0$ gehen also bei unserer Abbildung in Verzweigungspunkte der für $\{H, Z\}$ construirten Fläche über. Letztere hat ausserdem nur in den conjugirten Punkten Verzweigungspunkte.

10. Wir haben jetzt alle Mittel bereit, um die Lösung unseres Abbildungsproblems auszuführen. Die Function $\{H, Z\}$ ist in der ursprünglichen Riemann'schen Fläche überall holomorph, so lange der Punkt z, z_1 keinen der $p+1$ reellen Curvenzüge überschreitet.

Beim Uebergange über einen solchen Zug aber springt H auf den conjugirten Werth H_1, gleichzeitig Z auf den conjugirten Werth Z_1 über; dabei ist nach (7)

$$Z_1 = \frac{a\,Z + b}{c\,Z + d} \text{ und ebenso } H_1 = \frac{a'\,Z + b'}{c'\,Z + d'}$$

also nach (3) in bekannter Weise

$$\{H_1, Z_1\} = \{H, Z_1\} = \{H, Z\} \left(\frac{d\,Z}{d\,Z_1}\right)^2.$$

Die Function $\{H, Z\}$ ist ferner reell auf dem Rande des abzubildenden Ovals. Auf demselben Rande ist die Function

$$i\,\frac{d\,z}{d\,Z}\,\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = -\,i\,\frac{d\,z_1}{d\,Z}\cdot\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

reell. Das Quadrat der letzteren Function, dividirt durch

$\{H, Z\}$, gibt daher einen Quotienten, der ungeändert bleibt, wenn der Punkt z, z_1 einen reellen Zug von $f=0$ auf der Riemann'schen Fläche überschreitet, und welcher auf dem Rande des abzubildenden Ovals reell ist. Auch $\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$ ist überall holomorph, so lange die reellen Züge nicht überschritten werden. Es besteht daher eine Gleichung der Form

$$\{H, Z\} = \Phi(z, z_1) \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2} \left(\frac{dz}{dZ}\right)^2 \tag{11}$$

wo Φ eine rationale Function von z und z_1 bedeutet, die auf dem Rande des abzubildenden Ovals reelle Werthe annimmt, sich also als rationale Function von x und y mit reellen Coëfficenten darstellt.

Die nähere Bestimmung der Function Φ wird von transscendenten Bedingungen abhängen, deren Aufstellung in explicirter Form grosse Schwierigkeiten bereitet, wie dies ja auch für die entsprechende Function φ in der Differentialgleichung (5) eintritt[1]). Wir können aber das Verhalten der Function Φ an den singulären Stellen angeben.

Für einen Brennpunkt a, a_1 ist nach Nr. 9

$$z_1 - a_1 = \sqrt{z-a}\,\mathfrak{P}, \qquad z - a = (Z - A)\,\mathfrak{P}_1,$$
$$H - H_0 = \sqrt{z-a}\,\mathfrak{P}_2,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-A)^2} + \cdots = \frac{C}{(z-a)^2} + \cdots,$$

wenn C eine Constante bedeutet. Ferner ist

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = C'(z_1 - a_1) + \cdots;$$

1) Vgl. Poincaré, Acta matematica Bd. 4, p. 292 ff. und (für das Verhalten von φ an den singulären Stellen) Bd. 1, p. 278.

die Function Φ muss daher der Bedingung genügen:

$$\lim_{z=a} \Phi \cdot (z - a) = \text{Const.} \tag{12}$$

Handelt es sich um einen Punkt α, α_1, welcher zu einem Brennpunkte conjugirt ist (d. h. einen Nullpunkt der Function $\frac{\partial f}{\partial z}$), so haben wir nach Nr. 9:

$$z_1 - \alpha_1 = (z - \alpha)^2 \mathfrak{P}_3, \qquad z - \alpha = \sqrt{Z - A_1}\, \mathfrak{P}_4,$$
$$H - H_0' = (z - \alpha)\, \mathfrak{P}_5,$$

also

$$\{H, Z\} = \frac{3}{8} \frac{1}{(Z - A_1)^2} + \cdots = \frac{\text{Const.}}{(z - \alpha)^4} + \cdots;$$

ferner $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \text{Const.}$; für Φ ergibt sich also die Bedingung:

$$\lim_{z=a} \Phi \cdot (z_1 - \alpha_1) = \text{Const.}$$

Dieselbe entspricht genau der Bedingung (12); in der That hätte sie auch aus der Realität der Function Φ direct geschlossen werden können.

Die Gleichung (11) können wir noch in bemerkenswerther Weise umformen. Ersetzen wir nemlich in (3) φ durch H, so ergibt sich mit Hülfe von (11) unter Benutzung von (4):

$$\{Z, z\} = \varphi(z, z_1) - \frac{\Phi(z, z_1)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2}. \tag{13}$$

Auf diese Differentialgleichung dritter Ordnung, in der φ und Φ die in (5) und (11) vorkommenden rationalen Functionen von z und z_1 bedeuten, ist hiernach das Problem zurückgeführt, ein durch ein Oval einer algebraischen Curve $f = 0$ (die keine Doppelpunkte hat) begrenztes einfach zusammen-

hängendes Flächenstück auf die Halbebene abzubilden.

11. Insbesondere kann es vorkommen, dass die Kreise, welche nach Nr. 8 in der Z-Ebene den reellen Zügen der Curve $f = 0$ entsprechen, paarweise mit einander und mit der reellen Axe zusammenfallen. Dann schliesst sich die für $\{H, Z\}$ construirte mehrblättrige Fläche, und $\{H, Z\}$ wird eine algebraische Function von Z. Die Gleichung (13) wird dann von der Form

$$\psi \left(\frac{d\,z}{d\,Z}\right)^2 = \Psi,$$

wo ψ eine algebraische Function von z, Ψ eine algebraische Function von Z bedeutet.

Von dieser Form war die Lösung in den früher von mir behandelten Fällen. Bei denselben tritt noch die weitere Besonderheit ein, dass die Riemann'sche Fläche über der z-Ebene mehrfach von dem Bilde der über der Z-Ebene construirten Fläche überdeckt wird. Es liegt dies daran, dass die ursprüngliche Riemann'sche Fläche in jenen Beispielen nicht nur in Bezug auf den reellen, gegebenen Curvenzug, sondern auch in Bezug auf die über demselben in den anderen Blättern gelegenen Curvenzüge, gewisse Symmetrie-Verhältnisse zeigt. Aehnliche Besonderheiten werden immer auftreten, wenn die zu der Curve $f = 0$ gehörige Fläche solche besondere Symmetrieverhältnisse aufweist.

In dem einfachsten Falle, der Abbildung des Innern einer Ellipse auf die Halbebene, gestalten sich die Verhältnisse z. B. folgendermassen: Ueber der z-Ebene haben wir eine zweiblättrige Fläche vom Geschlechte Null, deren beide Verzweigungspunkte mit den Brennpunkten der Ellipse zusammenfallen, über der Z-Ebene eine ebenfalls zweiblättrige Fläche mit vier Verzweigungen (also vom Geschlechte Eins).

Zwei von diesen liegen in der Halbebene $Y > 0$, die beiden anderen sind die conjugirten Punkte der Halbebene $Y < 0$. Den beiden Blättern der oberen Halbebene entsprechen die beiden Blätter des Innern der Ellipse, begrenzt durch die Ellipse selbst und durch die darüber liegende Curve. Den conjugirten Blättern der unteren Halbebene ($Y < 0$) entspricht über der z-Ebene ein Streifen, der von der gegebenen Ellipse und einer zu ihr confocalen Ellipse E_1 begrenzt wird; überschreitet man die letztere, so kommt man wieder in die beiden über der Halbebene $Y > 0$ gelegenen Blätter, denen nun in der z-Ebene ein weiterer, von der Ellipse E_1 und einer zu ihr confocalen Ellipse E_2 begrenzter Streifen entspricht; u. s. f. Sowohl im oberen, als im unteren Blatte erhält man so unendlich viele, von confocalen Ellipsen begrenzte, ringförmige Streifen, deren jeder auf zwei über einander liegende Halbblätter derjenigen Fläche abgebildet wird, welche über der Z-Ebene construirt wurde.

Auf diese und andere Einzelheiten werde ich bei anderer Gelegenheit näher eingehen. Es mögen hier nur noch folgende Bemerkungen Platz finden.

12. Wir setzten bei unserer Ableitung voraus, dass die Curve $f = 0$ das Maximum von reellen Zügen besitze. Hat sie weniger als $p + 1$ reelle Züge, so hat man statt der Schottky'schen Untersuchungen diejenigen allgemeineren Hülfsmittel anzuwenden, die wir Poincaré verdanken;[1]) man wird dann ganz analoge Schlüsse durchführen können.

Ist das Geschlecht $p = 1$, so hat man statt $\{\eta, Z\}$ die Function $\frac{d \log \eta'}{d Z}$ zu untersuchen, wo η das zugehörige elliptische Integral erster Gattung bezeichnet. Die in Nr. 8 auftretenden Kreise sind dann durch gerade Linien zu ersetzen.

1) Vgl. Acta Matematica, a. a. O.

Das Auftreten von Doppelpunkten muss vorläufig ausgeschlossen bleiben; es scheint, dass man es nicht einfach durch Grenzübergang (d. h. durch Zusammenfallen von Brennpunkten) erledigen kann. Man würde dann weiter zum Zerfallen der Curve $f = 0$ fortschreiten können und dadurch zu Abbildungsfunctionen mit sehr bemerkenswerthen Eigenschaften geführt werden. Ich hoffe, hierauf bald zurückkommen zu können. Erledigt habe ich zunächst nur den Fall, wo der Rand des abzubildenden Flächenstückes durch eine endliche Anzahl von Kegelschnitten gebildet wird, denen die Brennpunkte gemeinsam sind. Auf diese Aufgaben soll hier nicht mehr eingegangen werden.

Ueber den Schatten eines Planeten.

Von H. Seeliger.

(*Eingelaufen 1. December.*)

Für einen leuchtenden Punkt ist die Schattenfläche eines Planeten, der als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid angesehen werden darf, ein Kegel zweiter Ordnung. Infolge der Ausdehnung der kugelförmigen Sonne entsteht das Phänomen des Halbschattens. Die Schattenfläche giebt in diesem Falle die Grenze des Kern- bezw. des Halbschattens an und ist die Einhüllende aller gemeinschaftlichen Tangentialebenen an die Kugel und das Ellipsoid. Die Gleichung dieser Fläche, welche vom 8. Grade ist, ist bekannt und u. A. in dem verbreiteten Lehrbuche der analytischen Geometrie von Salmon gegeben, auch besitzt man Modelle, welche ihre wesentlichen Gestaltungsverhältnisse zur Anschauung bringen. Zu Verwendungen auf astronomische Aufgaben, bei denen es sich um wirkliche numerische Ausrechnungen handelt, wird indessen diese Gleichung nicht sehr geeignet sein. Laplace hat in der Méc. cél.[1]) angegeben, wie man die Gleichung der Schattenfläche als das Resultat der Elimination eines Parameters aus 2 Gleichungen erhält und es ist bei vielen Anwendungen bequemer an diesen Gleichungen die erlaubten

1) Livre VIII, Chap. VIII.

und erwünschten Vereinfachungen auszuführen. Laplace hat nur einen verhältnissmässig einfachen Fall, der sich bei den Verfinsterungen der Jupitertrabanten darbietet, wirklich im Einzelnen verfolgt. Es blieb hier demnach noch manche Lücke auszufüllen und dies ist zum Theil durch die Arbeiten von Hall[1]), Souillart[2]), Bruns[3]) geschehen. Die folgenden Zeilen verfolgen auf anderer Grundlage dasselbe Ziel, nämlich die Vorschriften für die Berechnung von einigen Phänomenen, die mit der Schattenfläche zusammenhängen, möglichst einfach zu gestalten und die bereits bekannten auf einfachem Wege zu begründen. —

Es werde in den Mittelpunkt der Sonne der Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystemes gelegt. Seine xy-Ebene sei parallel zum Aequator des Planeten, dessen Mittelpunkt in der xz Ebene liegen und die Coordinaten A und C haben möge. Es sei ferner R der Radius der Sonne, R' der äquatoreale und R'_1 der polare Radius des Planeten. Nennt man noch e die Ellipticität $e = \frac{R' - R'_1}{R'_1}$, so wird die Gleichung der Sonnen- bezw. der Planetenoberfläche:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$$
$$(x - A)^2 + y^2 + (1 + e)^2 [(z - C)^2 - R_1'^2] = 0 \qquad (1)$$

Eine gemeinsame Tangentialebene an Sonne und Planet wird offenbar ausgedrückt durch

$$x\gamma - y\alpha - z\beta - R = 0$$

wo $\gamma, -\alpha, -\beta$ die Richtungscosinus der Normale der Tangentenebene sind, welche parallel sein muss zur Normalen des Ellipsoides.

1) Astron. Nachr. Band 90 S. 305 ff.

2) Astron. Nachr. Band 91 S. 129.

3) Vergl. J. Hartmann, die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Abhandlungen der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Leipzig 1891 S. 13. (375).

Man hat also

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= N(x-A); \quad \alpha = -N.y;\\ \beta &= -N(1+e)^2(z-C)\\ \frac{1}{N^2} &= (x-A)^2+y^2+(1+e)^4(z-C)^2\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Schreibt man die Ebenengleichung so:

$$\gamma(x-A)-\alpha y-\beta(z-C)=R-\gamma A+\beta C,$$

so ergiebt sich mit Hülfe von (2):

$$\frac{1}{N}\left\{\gamma^2+\alpha^2+\frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\}=R-\gamma A+\beta C$$

Setzt man andererseits (2) in die Ellipsoidgleichung (1) ein, so wird:

$$\frac{1}{N^2}\left\{\gamma^2+\alpha^2+\frac{\beta^2}{(1+e)^2}\right\}=R'^2$$

Man kommt also zu den zwei Gleichungen

$$\gamma^2+\alpha^2+\frac{\beta^2}{(1+e)^2}=\frac{(R-\gamma A+\beta C)^2}{R'^2}$$

$$\gamma^2+\alpha^2+\beta^2=1$$

und man kann demnach α und γ durch β ausdrücken.

Behält man β als einen Parameter bei, so wird die Schattenfläche, d. i. die Einhüllende aller Tangentenebenen, sich ergeben durch Elimination von β aus den Gleichungen:

$$\gamma x-\alpha y-\beta z-R=0$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}x-\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}y-z=0$$

oder, was dasselbe ist, durch Elimination von β aus:

$$F=(\gamma x-\beta z-R)^2-\alpha^2y^2=0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial\beta}=0 \qquad (3)$$

Indem man nun γ und α durch β ausgedrückt in (3) einsetzt, ist es vortheilhaft die Grösse

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{(1+e)^2}$$

einzuführen. Es ist auch ε oder das Quadrat der Excentricität $= 2\alpha_1 - \alpha_1^2$, wo α_1 die Abplattung im gewöhnlichen Sinne bedeutet. Die obigen Gleichungen geben nun:

$$R - A\gamma + \beta C = R'\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}$$

$$\alpha^2 = \left[1 - \frac{R^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\right] - 2\beta\frac{RC}{A^2} - \beta^2\left[1 + \frac{C^2}{A^2} - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon\right]$$
$$+ 2\frac{RR'}{A^2}\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} + 2\frac{CR'}{A^2}\beta\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}$$

Führt man nun die Hülfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
m &= \frac{R^2}{A^2}(x-A)^2 + \frac{R'^2 x^2}{A^2} - y^2\left[1 - \frac{R^2+R'^2}{A^2}\right] \\
n &= 2\frac{R}{A}\left\{(x-A)\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\} \\
p &= \left(\frac{C}{A}x - z\right)^2 + y^2\left(1 + \frac{C^2}{A^2}\right) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2+y^2) \\
\mu &= \frac{2RR'}{A^2}[x(x-A) + y^2] \\
\nu &= 2\frac{R'}{A}\left\{x\left(\frac{C}{A}x - z\right) + \frac{C}{A}y^2\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

so werden die Gleichungen (3) sich so darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
m + n\beta + p\beta^2 &= (\mu + \beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon} \\
n + 2p\beta &= \frac{d}{d\beta}\left\{(\mu+\beta\nu)\sqrt{1-\beta^2\varepsilon}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Elimination von β macht nun keine Schwierigkeit und man könnte das Resultat in Form einer Determinante, welche die Gleichung der gesuchten Schattenfläche darstellt, sofort hinschreiben. Diese Gleichung hat aber einen viel zu hohen Grad und die Absonderung der unnöthigen Factoren ist verwickelt. In mathematischer Beziehung ist demnach die Form (5) nicht befriedigend. Für die zur Anwendung kommenden Fälle aber ist sie, wie aus dem Folgenden hervorgehen dürfte, recht geeignet. Wenigstens gelangt man durch verhältnissmässig nicht sehr complicirte Rechnungen zu den Resultaten, welche abgeleitet werden sollen.

Die Schattenfläche wird gebraucht, wenn man die Verfinsterungen der Trabanten in unserem Sonnensystem genauer zu verfolgen hat. Suchen wir die speciellen Erfordernisse auf, welche hier auftreten. Bei der Verfinsterung des Erdmondes ist eine ziemlich weit gehende Genauigkeit in den Angaben über den Verlauf der Schattenfläche erwünscht. Hier ist aber ε rund $\frac{1}{150}$, also eine sehr kleine Grösse und man wird demzufolge mit Vortheil nach Potenzen von ε entwickeln und wie sich leicht ergiebt mit der Mitnahme nur der ersten Potenz ausreichen. Unter diesen Voraussetzungen ist die Aufgabe von den Herren Hall, Souillart und besonders im Anschluss an Herrn Bruns von Herrn Hartmann vollständig gelöst worden. Im Folgenden wird das Resultat des Herrn Hartmann ebenfalls auftreten.

Bei den Jupitertrabanten ist ε nicht so klein, dass man hier ohne Weiteres ε^2 vernachlässigen kann. Hier tritt aber der Fall ein, dass die Trabanten sich sehr nahe in der Aequatorebene bewegen und demzufolge der Verlauf der Schattenfläche nur in der Nähe dieser Ebene gebraucht wird. Die Aufgabe ist von Laplace a. a. O. behandelt worden und die dort gegebene Lösung wird wohl den Anforderungen der Praxis genügen.

Es bleibt noch die Schattenfläche des Saturn zu be-

trachten übrig. ε ist hier (rund $\frac{1}{8}$) durchaus nicht klein; eine Entwicklung nach Potenzen von ε ist jedenfalls nicht einwurfsfrei, wenn man schon die zweiten Potenzen fortlassen will. Thut man Letzteres aber nicht, so werden die Entwicklungen äusserst complicirt, wenn sie auch durchführbar sind. Es finden bei den Saturntrabanten aber andere Umstände statt, die sehr weitgehende Vernachlässigungen gestatten, besonders da hier eine grosse Genauigkeit der Formeln für die Praxis ziemlich bedeutungslos sein dürfte.

Nach dem Gesagten werden also die Verfinsterungen des Erdmondes und der Saturntrabanten zu behandeln sein.

Zuerst soll die Entwicklung von (5) nach Potenzen von ε vorgenommen werden.

Setzt man

$$\Phi(\beta) = -(\mu + \nu\beta)\left(\tfrac{1}{2}\beta^2\varepsilon + \tfrac{1}{8}\beta^4\varepsilon^2 + \ldots\right)$$

so wird (5):

$$(m - \mu) + (n - \nu)\beta + p\beta^2 = \Phi(\beta)$$

$$(n - \nu) + 2p\beta = \frac{d\Phi}{d\beta}$$

Wird nun noch gesetzt:

$$\beta_0 = -\frac{n - \nu}{2p}; \quad \beta = \beta_0 + \Delta\beta$$

so ist $\Delta\beta$ eine Grösse vom Range ε. Nimmt man zunächst überall noch ε^2 mit, so erhält man

$$4p(m - \mu) - (n - \nu)^2 = 4p\left\{\Phi(\beta_0) + \Phi'(\beta_0)\Delta\beta - p\Delta\beta^2\right\}$$

und da bis auf Glieder vom Range ε

$$\Delta\beta = \frac{1}{2p}\Phi'(\beta_0)$$

ist, so wird die Gleichung der Schattenfläche

$$4p(m - \mu) - (n - \nu)^2 = 4p\Phi(\beta_0) + [\Phi'(\beta_0)]^2 \qquad (6)$$

Wenn man nun die Glieder vom Range ε^2 fortlässt, so ist das zweite Glied rechts zu streichen und zu setzen

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}(\mu + \nu\beta_0)\beta_0^2 \varepsilon$$

Den Grössen μ und ν kann man auch durchweg das negative Vorzeichen vorsetzen.

Dieses doppelte Vorzeichen bezieht sich, wie leicht zu sehen, auf die beiden Schalen der Schattenfläche, welche den Kern- und Halbschatten begrenzen. Man braucht nur das eine Vorzeichen zu berücksichtigen und dann im Resultat R' mit $-R'$ zu vertauschen. Für die Anwendung auf Mondfinsternisse ist es am zweckmässigsten, wenn man den Durchschnitt der Schattenfläche mit einer Ebene aufsucht, die senkrecht auf der Verbindungslinie Sonne-Erde steht und nicht weit vom Mondmittelpunkte entfernt ist. Nennt man die Entfernung Sonne-Erde D, lässt in diese Richtung die ξ-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems fallen, dessen Anfang im Erdmittelpunkte sich befindet, dessen y-Axe zu der früheren parallel läuft und dessen ζ-Axe senkrecht darauf nach Norden zeigt, so hat man:

$$x = A + \xi\frac{A}{D} - \zeta\frac{C}{D}$$

$$z = C + \xi\frac{C}{D} + \zeta\frac{A}{D}$$

Wird noch zur Abkürzung gesetzt

$$\sigma = \frac{R - R'}{A}; \ \chi = x\sigma - R$$

so wird

$$m - \mu = \chi^2 - y^2(1 - \sigma^2)$$

$$n - \nu = -2\chi\zeta\frac{D}{A} + 2\frac{C}{A}y^2\sigma$$

$$\nu = 2\frac{R'}{A}\left[\frac{C}{A}y^2 - x\zeta\frac{D}{A}\right]$$

$$p = \frac{D^2}{A^2}(y^2 + \zeta^2) - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

Die Gleichung (6) wird jetzt:

$$4p(m-\mu)-(n-\nu)^2=-4\varepsilon\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)(m-\mu)$$
$$+4y^2\left[\left(\chi\frac{D}{A}+\zeta\frac{C}{A}\sigma\right)^2-(y^2+\zeta^2)\left(\frac{D^2}{A^2}-\sigma^2\right)\right]$$
$$=-(\mu+\nu\beta_0)\cdot 2p\beta_0^2\varepsilon$$

In den mit ε multiplicirten Gliedern darf aber angenommen werden:

$$\beta_0^2=\frac{(n-\nu)^2}{4p^2}=\frac{m-\mu}{p}$$

und es wird also, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer für den Augenblick mit I bezeichnet wird,

$$4y^2I=\varepsilon p\beta_0^2\left\{4\frac{R'^2}{A^2}(x^2+y^2)-2(\mu+\nu\beta_0)\right\},$$

was man nach leichter Zwischenrechnung und mit Vernachlässigung von ε^2 schreiben kann:

$$I=\frac{D^2}{A^2}\cdot\frac{R'}{A}\left\{-\zeta^2\sigma-x^2\sigma+Rx-\frac{A^2}{D^2}y^2\sigma-2x\sigma\frac{C}{D}\zeta+R\frac{C}{D}\zeta\right\}\cdot\beta_0^2\varepsilon \tag{7}$$

In dem Ausdrucke I ist aber weiter

$$\chi+\zeta\frac{C}{D}\sigma=\xi\frac{R-R'}{D}-R'=-\varrho_0, \tag{8}$$

wenn man mit ϱ_0 den Radius der Kugel bezeichnet, die mit dem Mittelpunkt in ξ den im Falle $\varepsilon=0$ entstehenden Schattenkegel berührt; ferner ist in (7) einzusetzen:

$$\beta_0^2=\frac{m-\mu}{p}=\frac{\left(\varrho_0+\zeta\frac{C}{D}\sigma\right)^2-y^2(1-\sigma^2)}{\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2}$$

Man kann sich nun überaus leicht davon überzeugen, dass man von der Erde gesehen die Schattenfläche in der Entfernung des Mondes nur um einige hundertstel Secunden verschieben kann, wenn man einfach setzt

$$\beta_0^2 = \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2},$$

ferner in der Klammer der Formel (7) als unmerklich fortstreicht das erste, vierte und sechste Glied, schliesslich σ^2 gegen $\frac{D^2}{A^2}$ im Ausdrucke von I vernachlässigt. Auf diese Weise wird

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon \left\{ Rx - x^2\sigma - 2x\sigma \frac{C}{D} \zeta \right\}$$

Mit Hülfe der im Vorigen enthaltenen Gleichungen kann man dies auch schreiben

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \cdot \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \cdot \varepsilon x \varrho_0 \cdot \left\{ 1 - \frac{\zeta}{\varrho_0} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{R - R'}{A} \right\}$$

oder auch, ohne Fehler zu begehen, die mehr als wie die Hundertstel der Secunde alteriren können,

$$\varrho_0^2 - (y^2 + \zeta^2) = \frac{R'}{A} \cdot \frac{A^2}{D^2} \frac{\zeta^2}{\varrho_0^2} \varepsilon x \varrho_0 \qquad (9)$$

und für x kann man für alle Fälle genügend genau

$$x = A + \xi \frac{A}{D}$$

setzen. Die Gleichungen (8) und (9) geben nunmehr die Schattenfläche bei Mondfinsternissen in der Nähe des Mondes mit fast vollkommener Strenge.

Der Durchschnitt derselben mit der Ebene $\xi = \text{const.}$ ist, wie man sofort sieht, eine Ellipse. Die beiden Halbaxen $\mathcal{A}$ und B liegen in der Richtung der y bezw. der ζ. Und es ergiebt sich sofort

$$\left.\begin{aligned} A = \varrho_0 &= R' - \xi \frac{R - R'}{D} \\ B = \varrho_0 &\left\{ 1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{R'}{\varrho_0} \frac{A^2}{D^2} \frac{\xi + D}{D} \right\} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Diese Formeln stimmen vollständig überein mit den von Herrn Hartmann gegebenen, die in der That die denkbar grösste Einfachheit bei wirklichen Ausrechnungen darbieten.

Wenn man nun die zweite oben erwähnte Aufgabe, die Schattenfläche des Saturn, wie sie bei den Verfinsterungen seiner Trabanten gebraucht wird, zu entwickeln, dadurch in Angriff nehmen wollte, dass man in der begonnenen nach Potenzen von ε fortschreitenden Entwicklung weiter geht, so wäre dieser Weg durchaus beschreitbar, aber äusserst umständlich; auch ist nur schwer auf diese Weise zu übersehen, welche Vernachlässigungen begangen werden. Dagegen stellt sich eine einfachere Lösung der Aufgabe dar, die den praktischen Erfordernissen genügen dürfte, wenn man berücksichtigt, dass an den Stellen, an welchen die Saturntrabanten in die Schattenfläche des Planeten treten, diese sich nicht weit von dem Tangentialkegel entfernt, den man vom Sonnenmittelpunkt aus an Saturn legen kann.

Man wird demnach von diesem Kegel als erster Näherung ausgehen können und die nöthigen Correctionen aufzusuchen haben. Den genannten Tangentialkegel erhält man, wenn man in den Gleichungen (5) $R = 0$ annimmt. Setzt man:

$$m_0 = \frac{R'^2}{A^2}(x^2 + y^2) - y^2; \quad m_1 = \frac{R^2}{A^2}[(x - A)^2 + y^2]$$

$$\lambda(\beta) = \mu \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon} - m_1 - n\beta$$

so kann man (5) schreiben

$$\left.\begin{aligned} m_0 + p\beta^2 &= \beta\nu\sqrt{1 - \beta^2\varepsilon} + \lambda(\beta) \\ 2p\beta &= \frac{\nu(1 - 2\beta^2\varepsilon)}{\sqrt{1 - \beta^2\varepsilon}} + \lambda'(\beta) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Wenn $\lambda = \lambda' = 0$ angenommen wird, so ergiebt die Elimination von β aus diesen Gleichungen den erwähnten Tangentialkegel. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\Phi = m_0 + p\beta^2 - \beta\nu\sqrt{1-\beta^2\varepsilon},$$

so wird man leicht die Correctionen bestimmen können, welche an die den Tangentialkegel bestimmenden Coordinaten angebracht werden müssen, um den Bedingungen der Schattenfläche zu genügen. Denkt man sich Polarcoordinaten in einer zur ξ-Axe des oben benutzten Coordinatensystems senkrechten Ebene eingeführt und setzt demgemäss

$$y = \varrho\cos\varphi; \quad \zeta = \varrho\sin\varphi; \quad \xi = \text{const.}$$

so kann Φ als Function von ϱ und φ angesehen werden. Einem bestimmten Werthe von φ entspricht in der Schattenfläche ein Werth $\varrho = \varrho_0 + \Delta\varrho$, wo ϱ_0 das demselben Werthe von φ entsprechende ϱ für den Tangentialkegel ist. Aber zu gleicher Zeit muss auch $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ gesetzt werden, wenn β_0 der Werth von β für $\lambda = 0$ ist. Entwickelt man nun die Gleichungen (11), welche sich so schreiben lassen

$$\Phi(\beta, \varrho) = \lambda(\beta, \varrho)$$
$$\Phi'(\beta) = \lambda'(\beta)$$

und bedenkt man, dass $\Phi(\beta_0 . \varrho_0) = 0$, $\dfrac{\partial\Phi(\beta_0, \varrho_0)}{\partial\beta_0} = 0$, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\varrho_0}\Delta\varrho + \ldots &= \lambda(\beta) \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varrho_0\,\partial\beta_0}\Delta\varrho + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta_0^2}\Delta\beta + \ldots &= \frac{\partial\lambda(\beta)}{\partial\beta} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

So wird man durch successive Näherungen zu den richtigen Werthen von $\Delta\varrho$ und $\Delta\beta$ gelangen können. In erster Näherung ist aber

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho_0}\Delta\varrho = \lambda(\beta_0) \tag{13}$$

und da man bei den Saturntrabanten hierdurch den Verlauf der Schattenfläche (vom Saturn aus gesehen) auf einige Secunden genau erhält, so wird man, wie noch erörtert werden soll, dabei stehen bleiben können. Es soll nur diese Näherungsformel entwickelt werden.

Die ϱ_0 und β_0 werden aus den beiden Gleichungen bestimmt:

$$m_0 + p\beta_0^2 = \beta_0 \nu \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon}$$

$$2p\beta_0 = \frac{\nu(1 - 2\beta^2\varepsilon)}{\sqrt{1 - \beta_0^2\varepsilon}}$$

Hieraus folgt:

$$\beta_0^2 = \frac{2\, m_0^2}{\nu^2 - 2 m_0 p} = \frac{\nu^2 - 2\, m_0 p}{2(\nu^2 \varepsilon + p^2)}$$

Die Gleichung des Tangentialkegels ist hiernach

$$\nu^2 = 4\, m_0 (p + m_0 \varepsilon) \tag{14}$$

Für die weiteren Reductionen sind noch von Werth die Relationen:

$$\beta_0^2 = \frac{m_0}{p + 2\, m_0 \varepsilon};\ \sqrt{1 - \beta_0^2 \varepsilon} = \frac{\nu}{2 m_0} \beta_0;\ 1 - \beta_0^2 \varepsilon = \frac{p + m_0 \varepsilon}{p + 2 m_0 \varepsilon}$$

Will man (14) vollständig entwickelt hinschreiben, so muss man die Hülfsgrössen m_0, m_1, n etc. nach (4) einführen. Man kann diese aber so schreiben:

$$m_0 = \frac{R'^2}{A^2}(x^2 + y^2) - y^2;\ m_1 = \frac{R^2}{A^2}\left\{(x - A)^2 + y^2\right\}$$

$$n = \frac{2\, R}{A}\left(\frac{C}{A}\varrho^2 - \xi\zeta\right);\ p = \frac{D^2}{A^2}\varrho^2 - \frac{R'^2}{A^2}\varepsilon(x^2 + y^2)$$

$$\mu = \frac{2\, RR'}{A^2} \cdot \left\{y^2 + x\xi\frac{A}{D} - x\zeta\frac{C}{D}\right\};$$

$$\nu = \frac{2\, R'}{A} \cdot \left\{\frac{C}{A}\varrho^2 - \zeta D - \xi\zeta\right\}$$

Die Gleichung (14) gestaltet sich jetzt so:

$$\left(1-\frac{R'^2}{A^2}\right)\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2-\varepsilon y^2=$$

$$\frac{R'^2}{A^2}\left\{\left(\frac{D^2}{A^2}-\varepsilon\right)x^2-\varepsilon y^2-\frac{C^2}{A^2}y^2+2\frac{C}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta\right\}$$

Wenn man aber bedenkt, dass für Saturn $\frac{R'}{A}$ sehr klein ist ($<\frac{1}{20000}$) und y sowohl als auch ζ gegen x ebenfalls, so wird man mit hinreichender Genauigkeit setzen dürfen

$$\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2-\varepsilon y^2=\frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2}-\varepsilon\right)x^2 \tag{15}$$

Hierdurch ist nun ϱ_0 bestimmt. Um auch (13) vollständig zu entwickeln, wäre jetzt eine etwas umständlichere Rechnung auszuführen. Man vereinfacht aber die Sachlage durch weitere Vernachlässigungen, welche die Schattenfläche in dem betrachteten Falle, wo es sich um die Verfinsterung der Saturntrabanten handelt, ebenfalls höchstens um einige Bogensecunden verschieben können. Diese Vernachlässigungen und deren Berechtigung ergeben sich aus den folgenden Werthen, die man den Hülfsgrössen m_0, m_1 etc. geben kann:

$$\left.\begin{array}{c} m_0=\frac{R'^2}{A^2}x^2-y^2;\quad m_1=0;\quad n=-2\frac{R}{A}\cdot\xi\zeta \\ p=\frac{D^2}{A^2}\varrho^2-\frac{R'^2}{A^2}\varepsilon x^2;\quad \mu=\frac{2RR'}{A^2}x\xi\frac{A}{D}; \\ \nu=-\frac{2R'}{A}\cdot\frac{D}{A}x\zeta \end{array}\right\} \tag{16}$$

Hierdurch wird, weil auch x in den vorstehenden Gleichungen nahezu unabhängig von ϱ_0 ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = \frac{1}{\varrho_0} \cdot \left\{ -2y^2 + 2\frac{D^2}{A^2}\varrho_0^2\beta_0^2 - \nu\beta_0\sqrt{1-\beta_0^2\varepsilon} \right\}$$

Man kann aber die rechte Seite mit Hülfe der oben angegebenen Relationen so darstellen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_0} = -\frac{2y^2}{\varrho_0} \cdot \frac{\frac{R'^2}{A^2}\left(\frac{D^2}{A^2} - \varepsilon\right)x^2}{\frac{R'^2}{A^2} \cdot \frac{D^2}{A^2}x^2 - \varepsilon y^2}$$

Für die rechte Seite von (13) ergiebt sich zunächst:

$$\lambda(\beta_0) = \frac{\beta_0}{2m_0} \cdot (\mu\nu - 2nm_0)$$

und wenn man (16) benutzt, so wird schliesslich mit ausreichender Genauigkeit

$$\Delta\varrho = \pm\frac{R}{D}\xi\frac{\varrho_0}{R'}\sqrt{\frac{D^2R'^2 - \varepsilon A^2y^2}{R'^2(D^2 - A^2\varepsilon)}} \tag{17}$$

Diese Formel lässt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig. Wollte man auch noch die zweiten Potenzen von ε fortlassen, so ergäbe sich einfach $\Delta\varrho = \pm\frac{R}{D}\xi$, was eigentlich auch schon der Genauigkeit, welche die hier in Frage kommenden Beobachtungen verlangen, voraussichtlich genügen dürfte.

Was den letzteren Punkt betrifft, so ist vor allem zu bemerken, dass die Grenze sowohl des Kernschattens als auch des Halbschattens eine rein mathematische Fiction ist, welche in den Beobachtungen nicht klar hervortreten kann. Wie der Halbschatten in unmerklichen Abstufungen in die volle Helligkeit übergeht, so bedeutet die Grenze des Kernschattens nichts anderes, als den Ort, wo der Halbschatten

anfängt, sich in stetiger Weise aufzuhellen. Ich habe die Verhältnisse, wie sie sich in Folge dieser Umstände bei Mondfinsternissen darstellen, an einem anderen Orte[1]) besprochen und gezeigt, dass sich die Grenze des Kernschattens in Folge physiologischer Einwirkungen für das beobachtende Auge in den Halbschatten hinaus scheinbar verschieben muss. Es entsteht so das bekannte Phänomen der scheinbaren Vergrösserung des Erdschattens. Ich habe dort einen Ausdruck abgeleitet für das Verhältniss der Helligkeit J, welche in der scheinbaren Entfernung x (hier gesehen von Saturn aus) von der Grenze des Kernschattens stattfindet, zu der ungeschwächten Helligkeit J_0 und den Ausdruck gefunden:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{5\lambda + 1}{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} \cdot \left(\frac{Dx}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

worin $\lambda = \frac{R'}{R} \cdot \frac{D}{\xi}$. Nimmt man, was in runden Zahlen ungefähr den Verhältnissen entspricht, wie sie bei den Verfinsterungen des Japetus durch Saturn stattfinden, $\frac{\xi}{R'} = 60$, $\frac{R}{D} = \frac{1}{1800}$, so wird $\lambda = 30$ und wenn x'' den Werth von x in Bogensecunden bedeutet:

$$\frac{J}{J_0} = [6 \cdot 672 - 10]\,(x'')^{\frac{3}{2}}$$

Hieraus folgt für $x'' = 5$: $\frac{J}{J_0} = 0.005$ und für $x'' = 10$: $\frac{J}{J_0} = 0.015$.

Mit Hülfe dieser Zahlen wird man leicht ermessen können, dass die Beobachtung des Eintritts nicht sehr sicher sein kann — bei Japetus entspricht einer Zeitminute ein

---

1) Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrgang 27. S. 197 ff.

Bogen von 11″ vom Saturn aus gesehen — und dass es auf die Feststellung der Schattengrenze auf einige Bogensecunden auch dann nicht ankommen kann, wenn sehr grosse Fernrohre zur Verfügung stehen. Wesentlicher Einfluss kommt hierbei auch noch dem Umstande zu, dass die Trabanten keine Punkte, sondern ausgedehnte Massen sind. Doch ist hier nicht der Ort, auf diese Gegenstände näher einzugehen.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1894.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XVIII for 1893/94. 1894. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel I, No. 3.
Afd. Natuurkunde. Deel II, No. 1—6. 8.
„ III, No. 1—14. 1893. 8⁰.
Zittingsverlagen. Natuurkunde. Jahrg. 1893/94. 1894. 8⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Letterkunde. 3e Reeks. Deel 10. 1894. 8⁰.
Jaarboek 1893. 8⁰.
Prijsvers Phidyle. 1894. 8⁰.

Universität Athen:

Vorlesungsverzeichniss 1893/94 und 5 Schriften in griech. Sprache. 1885/93. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

27. annual Report. June 1, 1894. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIII, No. 113. 114. 1894. 4⁰.
American Chemical Journal. Vol. 15, No. 8. Vol. 16, No. 1—6. 1893/94. 8⁰.
The American Journal of Philology. Vol. 14, No. 4. Vol. 15, No. 1. 1893/94. 8⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XVI, No. 1—3. 1894. 4⁰.
Studies in historical and political science. XI. Series, No. 11. 12. XII. Ser., No. 1—7. 1893/94. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Verhandelingen. Deel 47, 2. Stuk. Deel 48, 1. Stuk. 1893. 4⁰.
Tijdschrift. Deel 37, afl. 1. 2. 3. 1893/94. 8⁰.
Notulen. Deel 31, afl. 3. 4. 1893/94. 8⁰.

Koninkl. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 53. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte von Oberfranken. Band 19. Heft 1. 1893. 8⁰.

Serbische Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Godischnjak. V—VII. 1891—93. 1892—94. 8⁰.
Glas. No. 43. 44. 1894. 8⁰.
Spomenik. No. 23. 24. 1894. 4⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1894. No. 1—38. 1894. gr. 8⁰.
Acta Borussica. Band I der Behördenorganisation. 1894. 8⁰.
Abhandlungen aus dem Jahre 1893. 1893. 4⁰.
Politische Korrespondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXI. 1894. 8⁰.
Corpus inscriptionum latinarum. Tom. VIII. pars II. Suppl. 1894. fol. Tom. VI, pars 4, fasc. 1. 1894. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen zur geologischen Spezialkarte von Preussen. Band X, Heft 6 u. 7. 1894. 4⁰.

Permanente Commission der internationalen Erdmessung in Berlin:

Verhandlungen der 1893 in Genf abgehaltenen Conferenz. Berlin 1894. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 27. Jahrg., No. 12—18. 1894. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 45, Heft 4. Bd. 46, Heft 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VIII, No. 7—19. 1894. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1893/94, No. 11—18. 1894. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band IX, Heft 2. 3. 1894. 4⁰.

K. Geodätisches Institut in Berlin:

Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.
Feier des 100 jährigen Geburtstages des Generallieutenants Dr. J. J. Baeyer. 1894. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung. 1894, Heft I.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam in den Jahren 1890 u. 1891. 1894. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXIII, Heft 3. 1894. 8⁰.

Curatorium der Savigny-Stiftung in Berlin:

Vocabularium jurisprudentiae Romanae jussu instituti Savigniani. Fasc. I. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:
Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band VII, 2. Hälfte. Leipzig 1894. 8°.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:
Wochenschrift. Bd. IX, Heft 7—10. Juli bis Oktober. Berlin 1894. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:
XIV. Jahrgang 1894. Heft 7—11. 4°.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:
Quellen zur Schweizer Geschichte. Band XIV. Basel 1894. 8°.

Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Bern:
Verhandlungen. 76. Jahresversammlung in Lausanne 1893. Nebst französischer Uebersetzung. Lausanne 1893. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:
Mittheilungen. Jahrg. 1893. 1894. 8°.

Schweizerische geologische Kommission in Bern:
Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lief. VIII, Suppl. I. Lief. XXIV, Theil 3. 1893/94. 4°.

Historischer Verein des Cantons Bern:
Archiv. Band XIV, 2. 1894. 8°.

Gewerbeschule in Bistritz:
XIX. Jahresbericht für 1893/94. 1894. 8°.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:
Atti e Memorie. III. Serie. Vol. XII, fasc. 1—3. 1894. 8°.

Universität in Bonn:
Schriften aus d. J. 1893/94 in 4° u. 8°.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande zu Bonn:
Jahrbücher. Heft 95. 1894. 4°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1894. No. 11—22. 8°.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:
71. Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 8°.

Historisch-statistische Sektion der mährischen Ackerbau-Gesellschaft in Brünn:
Schriften. Band 28. 1894. 8°.
Notizenblatt 1893. No. 1—12. 4°.
Kunstarchäologische Aufnahmen aus Mähren von Alois Franz. 1894. 4°.

Académie Royale de Médecine in Brüssel:
Bulletin. IV. Série. Tome 8, No. 6—10. 1894. 8°.
Mémoires couronnés. Collection in 8°. Tome XIII. 1894. 8°.

Académie Royale des Sciences in Brüssel:
Bulletin. 3e Sér. Tome 27, No. 6. Tome 28, No. 7—11. 1894. 8°.

Société des Bollandistes in Brüssel:
Analecta Bollandiana. Tom. XIII, fasc. 3, 4. 1894. 8°.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 37. 1893. 8⁰.
Mémoires II. E. Brenske, Die Melolonthiden. 1894. 8⁰.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Mathematische u. naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XI, 2. Berlin 1894. 8⁰.
Ungarische Revue. 1894. Heft 5—8. 8⁰.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Földtani Közlöny. Band XXIV, Heft 6—10. 1894. 8⁰.
Evkönyo. Band X, 6. XI, 1. 2. 1894. 8⁰.
Mittheilungen aus den Jahrbüchern. Band X, 6. 1894. 8⁰.

Statistisches Bureau der Hauptstadt Budapest:

Publikationen. XIX. XXV, 1. 1894. 4⁰.
Gust. Thirring, Geschichte des statistischen Bureaus von Budapest. Berlin 1894. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg:

Verslag over het jaar 1893. 1894. 4⁰.
Mededeelingen uit'slands Plantentuin. No. XI—XIII. 1894. 4⁰.

Institut Météorologique de Roumanie in Bukarest:

Analele. Tom 8, anul 1892. 1894. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Mémoires. Vol. 18, fasc. 1. 1894. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. February—June. 1894. fol.
Meteorolog. Observations. February—June. 1894. fol.
Memorandum on the snowfall in the mountain districts. Simla 1894. fol.
India Weather Review. Annual Summary 1893. 1894. fol.
Report on the Administration 1893—94. 1894. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. N. Ser. No. 834—846. 1893/94. 8⁰.
Proceedings. 1894. No. II—VII. 1894. 8⁰.
Journal. New Series. No. 333—337. 1894. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 27, part 2. Vol. XXVIII, part 3. 1894. 8⁰.
Memoirs. Palaeontologia Indica. Series IX, Vol. II, part 1. 1893. fol.
Manual of the Geology by R. D. Oldham. 2. Edition. 1893. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VIII, part 3. 1894. 8⁰.

Museum of comparative zoology in Cambridge, Mass:

Bulletin. Vol. 25, No. 7—11. 1894. 8⁰.

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1893. Abtheilung I u. II. 1894. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Guide. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. VIII, No. 356—363, 365—381. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. IV, No. 4. Vol. V, No. 1. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania:

Forhandlinger for 1893. No. 1—21. 1894. 8⁰.
Oversigt i 1893. 1894. 8⁰.

Norwegische Commission der Europäischen Gradmessung in Christiania:

O. E. Schlötz, Resultate der 1893 ausgeführten Pendelbeobachtungen. 1894. 8⁰.

Universität in Christiania:

Aarsberetning 1891—92. 1892 93. 1893—94. 8⁰.
Jahrbuch des meteorolog. Instituts für 1891. 1893. 4⁰.
Archiv for Mathematik. Band XV, 4. XVI, 1—4. 1892—93. 8⁰.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Vol. 33, Heft 1—5. Vol. 34, Heft 1 u. 2. 1892—93. 8⁰.
Annaler 1892, 1893. 8⁰.
Th. Kjerulf, En Raekke norske Bergarter. 1892. 4⁰.
A. Chr. Bang, Dokumenter og Studier, den lutherske Katekismus' historie. I. 1893. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Chur:

23. Jahresbericht. 1893. 8.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. N. F. 37. Band. 1894. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1894. 48. 49. 52. 58—75. 78—101. fol.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Rep. Argentina):

Boletin. Tom XII, 1. 3. 4. XIII, 1—4. Buenos Aires. 1890. 1892/93. 8⁰.

Oficina meteorologica Argentina in Córdoba (Rep. Argent.):

Anales. Tom IX. parte 1. 2. Buenos Aires 1893/94. 4⁰.

Universität Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. W. S. 1894/95. 1894. 8⁰.
Uebersicht der akadem. Behörden im Studienjahre 1894/95. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Schriften. N. F. Bd. VIII, Heft 3. 4. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. N. F. Band I, Heft 2. 1894. 8⁰.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tome VIII, livre 1. 2. Leide 1894. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver:

R. C. Hills, Ore deposits of Camp Floyd District, Tooele County, Utah 1894. 8⁰.

F. C. Knight, A suspected new mineral from Cripple Creek. 1894. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band VII, 1. 1894. 8⁰.

Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Turjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Bd. X, 2. 1893. 1894. 8⁰.

Archiv für die Naturkunde Liv-, Esth- und Kurlands. Bd. X, 3. 4. 1893—94. 8⁰.

Universität Turjew (Dorpat):

Schriften aus dem Jahre 1893/94. 4⁰ u. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome XV. trimestre 1. 2. 1894. 8⁰.

K. Sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1893/94. 1894. 8⁰.

Neues Archiv für sächsische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. XV. 1894. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:

XXIV. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

K. norske Videnskabers Selskab in Drontheim:

Skrifter. 1892. 1893. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

The Transactions. Vol. 30, part 13. 14. 1894. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein Pollichia in Dürkheim:

Mittheilungen. 51. Jahrgang, No. 7. 1893. 8⁰.

Der Drachenfels bei Dürkheim a. d. H. von C. Mehlis. Neustadt 1891. 8⁰.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports. Vol. V. 1894. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 20, pag. 161—304. 1894. 8⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VII, 1. 1894. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1893—94. 1894. 8⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1892—93 u. 1893—94. 1893/94. 8⁰.

Lehr- und Erziehungsanstalt in Maria-Einsiedeln:

Jahresbericht für das Jahr 1893/94. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthümer der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:

Mansfelder Blätter. 8. Jahrg. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:

78. Jahresbericht pro 1892/93. 1894. 8⁰.

Universität Erlangen:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1893—94 in 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. IV. Ser. Vol. 17, disp. 1. 2. 1894. 8⁰.

Biblioteca nazionale centrale in Florenz:

Catalogo dei manoscritti 'gianici della Biblioteca nazionale centrale di Firenze per Franc. L. Pullé. No. 1—4. 1894. 4⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Bericht. 1894. 8⁰.

Abhandlungen. Band XVIII, 3. 1894. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.:

Inventare des Frankfurter Stadtarchivs. Band IV. 1894. gr. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:

Jahresbericht für das Jahr 1892/93. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 1894. No. 1—6. 8⁰.

Societatum Literae. 1894. No. 4—9. 8⁰.

Universität Freiburg i. Br.:

Schriften der Universität. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau in's Land in Freiburg:

Schau in's Land. 20. Jahrlauf, Heft 1. 2. 1894. fol.

Institut National Genévois in Genf:

Bulletin. Tome 32. 1894. 8⁰.

Observatoire in Genf:

Résumé météorologique de l'année 1893 pour Genève et le Grand Saint-Bernard. 1894. 8⁰.

Universität in Genf:

Schriften aus dem Jahre 1893/94.

Botanischer Garten in Gent:

Botanisch Jaarboek. VI. Jaargang. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Giessen:

Schriften der Universität Giessen aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 70, Heft 1. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Abhandlungen. Band 39.
 a) Historisch-philologische Classe.
 b) Mathem.-phys. Classe. 1894. 4⁰.

Gelehrte Anzeigen. 1894. No. 7—12. Juli bis Dezember. 1894. 4⁰.

Nachrichten. Mathem.-phys. Classe. 1894. No. 3. 4⁰.

" Philol.-hist. Classe. 1894. No. 2. 3. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothenburg:

Handlingar. Heft 26—29. 1891—94. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (Ohio):

The Journal. Vol. IV, p. 73—192. 1894. 8⁰.

Steiermärkischer Landesausschuss in Graz:

82. Jahresbericht des Steiermärk. Landesmuseums Joanneum. 1894. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Heft 42. 1894. 8⁰.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 26. Jahrg. 1894. 8⁰.

Uebersicht der in den periodischen Schriften des historischen Vereins für Steiermark bis 1892 veröffentlichten Aufsätze. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1893. (Heft 30.) 1894. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:

Pommersche Genealogien. Bd. 4. Herausg. von Th. Pyl. 1895. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

A. Weinbold, Bemerkungen zu Platons Gorgias als Schullektüre. (Programm.) 1894. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indie im Haag:

Bijdragen. V. Reeks. Deel X, afl. 3, 4. 1894. 8⁰.

Naamlijst der leden op 1. Juni. 1894. 8⁰.

Alb. C. Kruyt, Woordenlijst van de Bareë-Taal. 1894. 8⁰.

Ministerie van Kolonien im Haag:

Pithecanthropus erectus: Eine menschenähnliche Uebergangsform aus Java. Von Eug. Dubois. Batavia 1894. 4⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. II. Series. Vol. I, part 3. 1893. 8⁰.

Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 30, No. 11—20. 1894. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 48, Heft 2. 3. Leipzig 1894. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften der Universität a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Verein für Erforschung des vaterländischen Alterthums in Halle:

Neue Mittheilungen. Band XVIII, der II. Hälfte Schlussheft. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 66. Heft 5. 6. Band 67, Heft 1—4. Leipzig. 1894. 8⁰.

Stadt-Bibliothek in Hamburg:

Von den Hamburger wissenschaftlichen Anstalten im J. 1893 herausgegebene Schriften in 4⁰ und 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Zeitschrift. Band IX, 3. 1894. 8⁰.

Geschichtsverein in Hanau:

Festschrift zu seiner 50 jährigen Jubelfeier. 1894. 4°.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:

42. und 43. Jahresbericht. 1894. 8°.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1894. 8°.

Teylers tweede Genootschap in Harlem:

Verhandelingen. N. R. deel III, stuk 3 in 8° und Atlas, 5e stuk in fol. 1894.

Musée Teyler in Harlem:

Archives. Ser. II. Vol. IV, Partie 2. 1894. 4°.

Société Hollandaise des Sciences in Harlem:

Archives Néerlandaises. Tome 28, livre 2—4. 1894. 8°.

Universitäts-Bibliothek in Heidelberg:

Schriften der Universität a. d. J. 1893/94 in 8°.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. IV, Heft 2. 1894. 8°.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Carte géologique de la Finlande. Livr. 25. 26. avec 2 cartes. 1894. 8°.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum fennicae. Tom. XIX. 1893. 4°.
Oefversigt af Förhandlingar. XXXV. 1892—93. 1893. 8°.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 52. 53. 1893. 8°.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia. IX. XI. 1894. 8°.

Astrophysikalisches Observatorium zu Herény (Ungarn):

Meteorologische Beobachtungen im Jahr 1891. Budapest 1894. 4°.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Jahresbericht für das Jahr 1893/94. 1894. 8°.
Archiv des Vereins. N. F. Band XXVI, 1. 2. 1894. 8°.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. 43. Jahrgang. 1894. 8°.

Vogtländischer Alterthumsforschender Verein in Hohenleuben:

61.—64. Jahresbericht. 1894. 8°.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 21. Jahrgang. 1894. 8°.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Heft 38. 1893. 8°.

Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. XXI. Jahrg. 1892/93. 1894. 8°.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 28, Heft 4. Bd. 29, Heft 1. 1894. 8°.

Centralbureau für Meteorologie in Baden zu Karlsruhe:

Jahresbericht für das Jahr 1893. 1894. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. 2e Serie. Tom. IV, No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Universität in Kasan:

Jubiläumsschrift zu der hundertjährigen Geburtstagsfeier N. Lobatschewski's. 1894. 4⁰.

Utschenia Sapiski. Tom. 61, Heft 4—6. 1894. 8⁰.

2 Dissertationen (von Troizky und Goluben) in russischer Sprache. 1894. 8⁰.

Universität in Kiel:

Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Universität in Kiew:

Iswestija. Tom. 34. No. 6—10. 1894. 8⁰.

Université Imperiale in Kharkow:

Annales. Tome 3. 1894. 8⁰.

Annales. 1894. Heft 2. Nebst 2 Abhandlungen in russ. Sprache. 1894. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnthen in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1893. 1894. 8⁰.

Archiv für vaterländische Geschichte. 17. Jahrg. 1894. 8⁰.

Carinthia. I. 84. Jahrg., No. 1—6. 1894. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg.

Ertesitö. II. Abth. Band 19, Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:

Mittheilungen. Heft 25. 1894. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:

Schriften. 34. Jahrgang. 1893. 4⁰.

Universität Königsberg:

Schriften der Universität aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1894. No. 2. 8⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke. 9. Band, 2. Hälfte. 1894. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

L. H. F. de Fine Olivarius, Stamtavler over Slaegterne Olivarius og de Fine. 1894. 4⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Monumenta medii aevi historica. Tom. XIII. 1894. 4⁰.

Sprawozd. komisyi fizyograf. Tom. 28. 1893. 8⁰.

Rozprawy wydz. matemat. Tom. 26. 1893. 8⁰.

Zbior wiad. do Antropologii. Tom. 17. 1893. 8⁰.

Anzeiger. 1894. Juni, Juli, Oktober, November. 8⁰.

Biblioteka pisarzów polskich. Tom. 28. 1893. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. Band 30. 1894. 8⁰.

Société d'histoire de la Suisse Romande in Lausanne:

Mémoires et Documents Tome 38. 1894. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. XIII. Deel, Aflev. 3, 4. und Register zu Deel I—XII. 1894. 8⁰.

Handelingen en Mededeelingen 1893—1894. 1894. 8⁰.

Levensberichten der afgestorven medeleden. 1894. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil XIII, Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. Jahrgang 29, Heft 2. 1894. 8⁰.

Katalog der astronom. Gesellschaft. I. Abth., 6 Stück. 1894. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft zur Erforschung vaterländischer Sprache und Alterthümer in Leipzig:

Mittheilungen. Band IX, Heft 1. 1894. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen: a) Philol.-hist. Classe. Band XIV, 6. 7. XV, 1.
b) math.-phys. Classe. Band XXI, 2. 1894. 4⁰.

Berichte der philol.-hist. Classe. 1894. I. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. Folge. Band 49, Heft 10—12. Band 50, Heft 1—12. 1894. 8⁰.

K. K. Bergakademie in Leoben:

Programm für das Jahr 1894/95. 1894. 8⁰.

Agricultural-Experiment Station, University of Nebraska in Lincoln:

7th annual Report for 1893. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome X, 2. 1894. 4⁰.

The Agent-general for New South-Wales in London:

An Australian Language as spoken by the Awabakal, by L. E. Threlkeld. Sydney 1892. 8⁰.

British Association for the Advancement of Science in London:

Report on the 63th Meeting. 1894. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Histor. Review. Vol. IX, No. 35, 36. July and October 1894. 8⁰.

Royal Society in London:

Philosophical Transactions. Vol. 184. A. B. 1894. 4⁰.

List of Fellows. 30. Novbr. 1893. 4⁰.

Catalogue of Scientific Papers. Vol. X. 1894. 4⁰.

Proceedings. Vol. 55, No. 334, 335. Vol. 56, No. 336—339. 1894. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 54, No. 89 Vol. 55, No. 1. 1894. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 380—385. July—December 1894. 8⁰.
Proceedings. No. 141. 142. Session 1893—94 and 1894—95. 8⁰.

Linnean Society in London:

The Journal: a) Zoology, No. 155—157.
b) Botany, No. 177 und 205—208. 1894. 8⁰.
The Transactions: II^d Serie:
a) Zoology. Vol. V, part 9—11. Vol. VI, part 1. 2.
b) Botany. Vol. III, part 9—11. Vol. IV, part 1. 1893—94. 4⁰.
Proceedings. October 1893, May 1894. 1893/94. 8⁰.
List 1893/94. 8⁰.
Catalogue of the Library. Part II. Periodicals. 1893. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:

Medico-Chirurgical Transactions. Vol. 76. 77. 1893/94. 8⁰.
Catalogue of the Library. Supplement VII. 1893. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1894. part 4. 5. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1894. Part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIII, 9. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „Nature“ in London:

Nature. Vol. 50, No. 1285—1308. 1894. 4⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 21, livr. 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. 49. Band. Stans 1894. 8⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Real Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 25, cuad. 1—6. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:

Jahresbericht und Abhandlungen. 1893/94. I. Halbjahr. 1894. 8⁰.
Festschrift zur Feier des 25jähr. Stiftungstages des Vereins. 1894. 8⁰.

Fondazione scientifica Cagnola in Mailand:

Atti. Vol. XI, 1891/92. 1893. 8⁰.

Reale Istituto Lombardo di Scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II. Vol. 25. 1892. 8⁰.
Memorie: a) Classe di scienze storiche. Vol. 19, fasc. 1.
b) Classe di scienze matematiche. Vol. 17, fasc. 2. 1892. 4⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio storico Lombardo. Ser. III. Anno XXI, fasc. 2. 3. 1894. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. IV. Ser. Vol. 8, No. 3. 1894. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Mannheim:

56.—60. Jahresbericht. 1894. 8⁰.

Universitäts-Bibliothek in Marburg:

Schriften der Universität Marburg a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Hennebergischer alterthumsforschender Verein in Meiningen:

Neue Beiträge. Lieferung XIII. 1894. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Band 3, Heft 2. 3. 1893. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. 73ᵉ année 1891/92. 1894. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 5. Jahrgang, 2. Hälfte. 1894. 4⁰.

Observatorio meteorologico central in Mexico:

Boletin. Mensual. Tomo III, No. 5. 1894. 4⁰.

Sociedad cientifica Antonio Alzate in Mexico:

Memorias. Tomo VII, No. 11—12. 1894. 8⁰.

Sociedad de geografia y estadistica in Mexico:

Boletin. IVᵃ época. Tomo 2, No. 11. 12. Tomo 3, No. 1. 2. 1894. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Ser. III. Vol. XII, Anno 27, fasc. 3. 1894. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. 1894. No. 2. 8⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:

Die Büchersammlung der städtischen Kollegien Münchens. 1894. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie und Urgeschichte in Berlin und München.

Correspondenzblatt. 1894. No. 6 - 8. München. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:

Programm für das Studienjahr 1894/95. 1894. 8⁰.
Bericht für das Studienjahr 1893/94. 1894. 4⁰.
Personalstand. Winter.-Sem. 1894/95. 1894. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiöcese München und Freising. No. 15—23. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Geognostische Jahreshefte. Jahrg. VI. 1893. Cassel 1894. gr. 8⁰.
5. Bericht über die Thätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt. Berlin 1894. 8⁰.

Universität in München:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1894 in 4⁰ u. 8⁰.

Aerztlicher Verein München:

Sitzungsberichte. III. 1893. 1894. 8⁰.

Bayerischer Dampfkessel-Revisions-Verein in München:

24. Jahresbericht 1893. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Monatsschrift. 1894. No. 7—12. Juli—Dezember. 8⁰.
Oberbayerisches Archiv. Band 48, Heft 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Westfälischer Provinzialverein in Münster:

21. Jahresbericht für 1892/93. 1893. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche in Neapel:

Rendiconto. Serie II. Vol. VIII, fasc. 8—10. 1894. 4⁰.

Società Reale in Neapel:

Atti della R. Accademia di scienze morali e politiche. Vol. 26. 1893/94. 8⁰.
Rendiconto dell' Accademia di scienze morali e politiche. Anno 31. 32. 1892/93. 8⁰.
Atti della R. Accademia delle scienze fisiche. Ser. II. Vol. 6. 1894. 4⁰.
Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche. Ser. II. Vol. 8, fasc. 6 e 7. 1894. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. XI, 3. Berlin 1894. 8⁰.

American Journal in New-Haven:

The American Journal of Science. Vol. 48, No. 283—288. July—December. 1894. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:

Report for the year 1893/94. 1894. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:

Proceedings at New-York. March 29—31. 1894. 8⁰.

North of England Institute of Mining and Mechanical Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 43, No. 5. 6. Vol. 44. No. 1. 1893/94. 8⁰.
Annual Report of the Council for 1893/94. 1894. 8⁰.
Report of the Proceedings of the flameless explosives Committee. Part I. 1894. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:

Annals. Vol. VIII, No. 4. 1894. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Annual Report for the year 1893. 1894. 8⁰.

State Museum in New-York:

45th and 46th annual Report for the year 1891 and 1892. Albany. 1892/93. 8⁰.
Bulletin. Vol. 3, No. 11. Albany 1893. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. XVI, No. 6—12. Easton 1894. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 26, No. 2, 3. 1894. 8⁰.

Nederlandsch Botanische Vereeniging in Nijmegen:

Nederlandsch kruidkundig Archief. II. Ser. Deel VI, Stuk 3. 1894. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Band X, Heft 2. 1894. 8⁰.

Komité für die Hans-Sachs-Feier in Nürnberg:

Hans Sachs zum 400 jährigen Geburtsjubiläum des Dichters. Von Ernst Mumenhoff. 1894. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XVIII, 2. 1894. 8⁰.

Organisation de l'étude climaterique de la Russie par Klossovsky. 1894. 4⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. Vol. XI, for the year 1893. 1894. 4⁰.

The Radcliffè Observatory in Oxford:

Radcliffe Catalogue of Stars 1890. 1894. 4⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Ser. II. Vol. 2, fasc. 1. 1895. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. VIII, 5. 6. 1894. gr. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Annata 17. 1894. Gennaio—Aprile. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1894, No. 27—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 119, No. 1—25. 1894. 4⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome XXII, No. 5—8. 1894. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Bulletin. VII. Sér. Tom. 15. 1er et 2e trimestre. 1894. 8⁰.

Comptes rendus 1894, No. 14—17. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. 4e Sér. Tome VIII, 2e partie, livre 631—636. Juillet—Déc. 1894. 4⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:

L'Électricien. 2e Sér. Tome VIII, No. 184—208. Paris 1894. 4⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. Nouv. Sér. Tome IV, No. 1. 2. 1894. 4⁰.

Bulletin. Ve Série. Tome I, No. 1—3. 1894. 4⁰.

Mémoires. Tom. 39. 41, No. 6—9. 42, No. 1—11. 1893/94. 4⁰.

Byzantina Chronika. Tom. 1, Heft 1. 1894. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XII, No. 3—7 et Supplement au T. XII. 1893. 8⁰.

Mémoires. Vol. IV, No. 3. 1893. 4⁰.

Kais. russ. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Band XIII. 1893. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:
Schurnal. Tom. XXVI, 4—7. 1894. 8⁰.

Société des naturalistes in St. Petersburg:
Travaux. Section de Botanique. Vol. XXIV. 1893/94. 8⁰.
Chemitscheskaja Laboratoria. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:
Sapiski. Tom. 34. 1894. 8⁰.
Uebersicht der Wirksamkeit der naturwissenschaftlichen Gesellschaft in St. Petersburg 1868—1893. (In russ. Sprache.) 1893. 8⁰.
Oboscenie. (Vorlesungskatalog 1894/95.) 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:
Proceedings. 1894, part I. 1894. 8⁰.

The Oriental Club of Philadelphia:
Oriental Studies. 1888—1894. Boston 1894. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:
The Pennsylvania Magazine. Vol. 18, No. 1. 1894. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:
Proceedings. Vol. 33, No. 144. 145. 1894. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:
Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 63—132. 1894. 4⁰.

Alterthums-Verein in Plauen:
Mittheilungen. 10. Jahresschrift auf die Jahre 1893/94. 1893. 8⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:
Polhöhenbestimmungen im Harzgebiet. 1887—1891. Berlin 1894. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz Josefs Akademie in Prag:
Rozprawy. Třida II. Ročnik III, číslo 1. 2. 1894. 4⁰.
„ III. „ III. „ 2.
Historický Archiv. Číslo 4. 5. 1894. 4⁰.
Bulletin international. Cl. des sciences mathém. I. 1894. 4⁰.
Věstník. Ročník III. číslo 6. 1894. 4⁰.
Sbïrka pramenůo etc. Skupina I. Rada 2. Číslo 1. 1894. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen in Prag:
Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens im Jahre 1892. 1894. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:
Časopis. Band 23, Heft 3—5. 1894. 8⁰.

K. böhmisches Museum in Prag:
Památky archaeologické a místopisné. Bd. XVI, 3—6. 1893. 4⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:
Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1893. 54. Jahrg. 1894. 4⁰.

K. K. deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:
Ordnung der Vorlesungen. Winter-Sem. 1894/95. 8⁰.
Personalstand. Studienjahr 1894/95. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. Jahrg. 32. No. 1—4. 1893. 8°.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Bd. 46. 1894. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. IV. Heft. 1894. 8°.

Instituto historico e geographico in Rio de Janeiro:

Revista trimensal. Tomo 56, parte I. 1893. 8°.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. 5. 1894. 8°.

Reale Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. II, parte 2. Notizie degli scavi. Gennaio—Agosto. 1894. 4°.

Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. III. Semestre 1, fasc. 12, Semestre 2, fasc. 1—8. 1894. 4°.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol 3, fasc. 5—9. 1894. 8°.

Rendiconti dell' adunanza solenne del 3 Giugno. 1894. 4°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 47. Sessione I. II. III. 1894. 4°.

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studi e documenti di storia e diritto. Anno XIV, fasc. 1—4. 1893. 4°.

Codices manuscripti graeci Ottoboniani Bibliothecae Vaticanae, recensuerunt E. Feron et F. Battaglini. 1893. 4°.

Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1894, No. 2. 3. 8°.

Kais. deutsches archäologisches Institut in Rom:

Mittheilungen. Römische Abtheilung. Band IX, 2. 3. 1894. 8°.

Società Italiana delle scienze in Rom:

Memorie di Matematica. Serie III. Vol. 8. 9. Napoli 1892/93. 4°.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XVII, fasc. 1. 2. 1894. 8°.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Vol. XXII, parte 1. 1890. Vol. XIV, p. 1. 1892. Vol XV, p. 1. 1893. 1894. 4°.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1893/94 in 4° u. 8°.

Lick Observatory of the University of California in Sacramento:

Publications. Vol. II. 1894. 4°.

Academy of Science in St. Louis:

Transactions. Vol. VI, No. 9—17. 1893/94. 8°.

Essex Institute in Salem:

Bulletin. Vol. 26. 1894. 8°.

K. K. Staats-Gymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 34. Vereinsjahr. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

Mittheilungen zur vaterländischen Geschichte. XXV. 1894. 8⁰.
Urkundenbuch der Abtei St. Gallen. Theil IV, 3. 1894. 4⁰.
Abt Berchtold von Falkenstein von Placid Bütler. 1894. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Almanaque náutico para 1895. Madrid 1894. 8⁰.

Geographical Society of California in San Francisco:

Bulletin. Vol. II. 1894. May. 8⁰.

Observatorio astronómico in San Salvador:

Observaciones meteorologicas. Oct.—Dez. 1892. 1894. 8⁰.

Société scientifique du Chili in Santiago:

Actes. Tome 3, livr. 4. 5. Tome 4, livr. 1. 2. 1894. 4⁰.

Commissão geographica e geologica i São Paulo (Brasilien):

Boletin. Dados climatologicos. 1890—1892. 3 Hefte. 1893. 8.

Contribuções para a archeologia. Heft 1. 1893. 8⁰.

Histor. Verein für das Württembergische Franken in Schwäbisch-Hall:

Württembergisch Franken. Neue Folge V. 1894. 8⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher. 59. Jahrgang. 1894. 8⁰.

China Branch of the Royal Asiatic Society in Shanghai:

Journal. N. S. Vol. 26. 1891/92. 1894. 8⁰.

Meteorologische Centralstation in Sophia (Bulgarien):

Bulletin mensuel météorologique de Bulgarie. 1894. Jan.—Sept. 4⁰.

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Die prähistorischen Fundstätten von V. Radimský. 1891. 4⁰.
Römische Strassen in Bosnien und der Hercegovina von Ph. Ballif. Th. I. Wien 1893. fol.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di archeologia. Anno 17. 1894. No. 5—7. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speier:

Mittheilungen. XVIII. 1894. 8⁰.

Schwedische Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Handlingar. Band 25, Heft 1. 2. 1892—94. 4⁰.
Bihang till Handlingar. Band XIX in 4 Abtheil. 1894. 8⁰.
Meteorologiska iakttagelser. Bd. 32. (1890.) 1894. 4⁰.
Lefnadstockningar. Band III, 2. 1894. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:

Sveriges offentliga bibliotek Accessions-Katalog VIII. 1893. 1894. 8⁰.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tome 28, fasc. 5. 6. 1894. 8⁰.

Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Australasian Association for the Advancement of Science in Sydney:

Report. Vol. V. Adelaide Session. 1893. 8⁰.

Department of Mines in Sydney:

Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. IV, part 1. 1894. 4⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. IV, part 2. 1894. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya (Mexico):

Boletin. Tom. I, No. 17—19. 1894. 4⁰.
Anuario. Año XV. México. 1894. 4⁰.

College of Science, Imperial University, Japan, Tokio.

The Journal. Vol. VI, 4. VII, 1. VIII, 1. 1894. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Mittheilungen. Band VI. Suppl. Heft 1. Heft 54. 1894. fol.

Tufts College Mass.:

Tufts College Studies No. III. 1894. 4⁰.

Universitäts-Bibliothek in Tübingen:

Schriften der Universität Tübingen a. d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 29, disp. 11—15. 1894. 8⁰.
Memorie. Ser. II, tom. 44. 1894. 4⁰.

Comité météorologique international in Upsala:

Extrait des procès-verbaux de la Ire réunion à Upsal en Août 1894. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. XVI. 1893. 4⁰.

Universität in Upsala:

Schriften aus d. J. 1893/94 in 4⁰ u. 8⁰.

Société provinciale des Arts et Sciences in Utrecht:

Verslag. 1893. 8⁰.
Aanteckeningen van Sectie-vergaderingen. 1893. 8⁰.
L. A. van Langeraad, De Nederlandsche Ambassade-Kapel te Parijs. 2. Voll. s'Gravenhage. 1893. 8⁰.

American Historical Association in Washington:

Annual Report for the year 1892 and 1893. 1893/94. 8⁰.

Bureau of Ethnology in Washington:

Tenth annual Report 1888—89, by J. W. Powell. 1893. 4⁰.
The Maya Year, by Cyrus Thomas. 1894. 8⁰.
Bibliography of the Wakashan Languages, by F. C. Pilling. 1894. 8⁰.
The Pamunkey Indians of Virginia, by J. H. Pollard. 1894. 8.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report, to July 1892. 1893. 8⁰.

Surgeon General, U. S. Army in Washington:

Index Catalogue. Vol. XV. 1894. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. 27. Jahrg. 1894. 8⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Mittheilungen aus dem Vatikanischen Archive. Band II. 1894. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1894. No. 5—9. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1894. No. 27—52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 24, Heft 3—5. 1894. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Jahrg. 1894. Band 44, I. u. II. Quartal. 8⁰.

Oesterreichische Gradmessungs-Kommission in Wien:

Verhandlungen über die am 11. und 13. April 1894 abgehaltenen Sitzungen. 1894. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band IX, No. 2. 1894. 4⁰.

v. Kuffnerische Sternwarte Wien:

Publikationen. Band III. 1894. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Jahrbuch für das Studienjahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1894/95. 1894. 8⁰.

Oeffentliche Vorlesungen. Sommer-Sem. 1894. Winter-Sem. 1894/95. 1894. 8⁰.

Die feierliche Inauguration des Rektors am 8. Nov. 1894. 8⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 34. Bd. Jahrg. 1893/94. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein an der Universität Wien:

Mittheilungen für das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 1847. 1894. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 39, Heft 2. 1894. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Franz Ludwig Baumann in Donaueschingen:

Geschichte des Algäus. Band III Kempten 1894. 8⁰.

A. Brill in Tübingen:

Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen. Berlin 1893. 8⁰.

Franz Bücheler in Bonn:

Anthologia latina. Pars II, fasc. 1. Leipzig 1895. 8⁰.

Hartmann Caviezel in Chur:

Litteratura veglia (rhaeto-romanscha). 1894. 8⁰.

Carlo Cipolla in Turin:

Ricerche sull' antica biblioteca del monastero della Novalesa. 1894. 8⁰.

Salvatore de Crescenzo in Neapel:

Saggio di una scala normale del pensiero astratto. 1893. 8⁰.

R. Fresenius in Wiesbaden:

Ueber die Schwankungen im Gehalte der Mineralwasser. 1894. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Systematische Phylogenie der Protisten und Pflanzen. Th. I. Berlin 1894. 8⁰.

L. Harperath in Córdoba. (Rep. Argent.):

Die Weltbildung. Köln 1894. 8⁰.

P. de Heen in Brüssel:

5 Separatabdrücke aus dem Bulletin de l'Acad. R. des Sciences, physikalischen Inhalts. 1894. 8⁰.

Professor Hegewald in Meiningen:

Introduction au discours sur l'unité de l'éspèce humaine. 1894. 8⁰.

W. J. Hoffmann in Philadelphia:

Gshicht fun dă altă Tsaitä in Pensilfani. By W. J. Hofmann. 1894. 8⁰.

J. B. Jack in Konstanz:

Hepaticae in insulis Vitiensibus et Samoanis lectae. Sep.-Abdruck. 1894. 8⁰.

James E. Keeler in London:

On the Spectra of the Orion Nebula. s. l. 1893. 8⁰.

Friedrich Keinz in München:

Hans Sachsens Zeitgenossen und Nachfolger im Meistergesang. Nürnberg 1894. 8⁰.

Albert von Kölliker in Würzburg:

Der feinere Bau des sympathischen Nervensystems. Würzburg 1894. 8⁰.

Ueber den Fornix longus von Foral und die Riechstrahlungen im Gehirn des Kaninchens. Strassburg 1894. 8⁰.

Ueber die feinere Anatomie des sympathischen Nervensystems. Wien 1894. 8⁰.

M. E. Lemoine in Paris:

4 Abhandlungen über Geometrie. 1894. 8⁰.

G. Lorentzen in Bamberg:

Ueber die Untersuchung der Scalen eines Heliometers. 1894. 8°.

Se. Hoheit Prinz Albert von Monaco in Monaco:

Résultats des Campagnes scientifiques. fasc. VII. 1894. gr. 4°.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 56, No. 1. 2. Paris 1894. 8°.

Gifford Pinchot in New-York:

Biltmore Forest, the property of Mr. George W. Vanderbilt. Chicago 1893. 8°.

S. Riefler in München:

Die Präcisions-Uhren. 1894. gr. 8°.

Andreas Schmid in München:

Geschichte des Georgianums in München. Regensburg 1894. 8°.
Festbericht über die IV. Centenarfeier des Georgianums Augsburg 1894. 8°.

August Tischner in Leipzig:

Le pouvoir grossissant de l'atmosphère. 1892. 8°.

Albrecht Weber in Berlin:

Vedische Beiträge. 1894. 4°.

Henry Wilde in London:

Ueber den Ursprung der elementaren Körper und über einige neue Beziehungen ihrer Atomgewichte. London 1892. 4°.

A. Wolfer in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. No. 84. 1894. 8°.

Namen-Register.

v. **Baeyer** Adolf 51, 61, 296, 402.
Bauer Gustav 343.
Bauschinger Johann (Nekrolog) 114.
van **Beneden** Peter J. (Nekrolog) 151.
Boltzmann Ludwig 207, 211.
Brunn Hermann 93.

de **Candolle** Alphonse (Nekrolog) 153.

Döhlemann Karl 41.

Fomm L. 189.

Graetz L. 189.

Hartig Robert 385.
Hertz Heinrich Rudolf (Nekrolog) 146.

Kummer Ernst Eduard (Nekrolog) 140.
v. **Kupffer** Carl 51.

Lindemann Ferdinand (Wahl) 401, 403.

Maurer Ludwig 297.
v. **Middendorff** Alexander Theodor (Nekrolog) 148.

v. **Orff** Karl (Wahl) 401.

v. **Pettenkofer** Max 395.
Planck Max 391.
Pringsheim Alfred (Wahl) 401.

Richarz F. 3.
Rüdinger Nikolaus 249.

v. **S**andberger F. 231.
Scacchi Arcangelo (Nekrolog) 156.
Schütz Ignaz 273.
Seeliger Hugo 161, 257, 423.
Sohncke Leonhard 61.
Stankewitsch B. W. 63.
Steinheil Adolf (Nekrolog) 120.
Stern Moritz Abraham (Nekrolog) 142.

Tyndall John (Nekrolog) 143.

v. **V**oit Carl 113.

Wassmuth A. 219.
Weinschenk Ernst 383.

Sach-Register.

Ansprache in der öffentlichen Sitzung 395.

Diffusionsgleichung, Integration bei variabeln Diffusionscoefficienten 211.
Dispersion elektrischer Wellen 189.
Druckschriften eingelaufene 361, 439.

Eichenholz, Verschiedenheiten im Bau desselben 385.
Elektrodynamik, Anwendung des Princips des kleinsten Zwanges auf dieselbe 219.
Erzlagerstätte von Goldkronach 231.

Gehirne verschiedener Hunderacen 249.
Geschwindigkeitsvertheilungsgesetz Maxwells 207, 391.
Gewitterstudien auf Grund von Ballonfahrten 61.

Halbebene, conforme Abbildung derselben 403.

Kräfte, elektrische und magnetische der Atome 3.
Kümmelöl 61, 296.

Monorhinie und Amphirhinie 51.

Ovale, Theorie derselben 93.

Polarisation, dielektrische in Flüssigkeiten 63.
Polynome, Legendre'sche 343.

Raumtransformation dritter Ordnung 41.

Saturnring, Constitution desselben 161.
Schatten eines Planeten 423.
Stern ζ Cancri 257.

Terpentinöl 51, 402.
Theorie der continuirlichen, homogenen und linearen Gruppen 297.

Wahlen 401.
Wirbel-Integrale, Helmholtz'sche 273.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 3. November 1894.

Seite

R. Hartig: Ueber die Verschiedenheiten im Bau des Eichenholzes 385

M. Planck: Ueber den Beweis des Maxwellschen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes unter Gasmolekülen 391

*E. Weinschenk: Beiträge zur Petrographie der östlichen Centralalpen, speciell des Gross-Venedigerstockes . . . 383

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinz-Regenten am 15. November 1894.

M. v. Pettenkofer: Eröffnungsrede 395

Wahlen 401

Sitzung vom 1. Dezember 1894.

H. Seeliger: Ueber den Schatten eines Planeten 423

F. Lindemann: Ueber die conforme Abbildung der Halbebene auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, das von einer algebraischen Curve begrenzt wird 403

*A. v. Baeyer: Ueber die Natur der Terpentinöle und verwandter Substanzen 402

Einsendung von Druckschriften 489

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

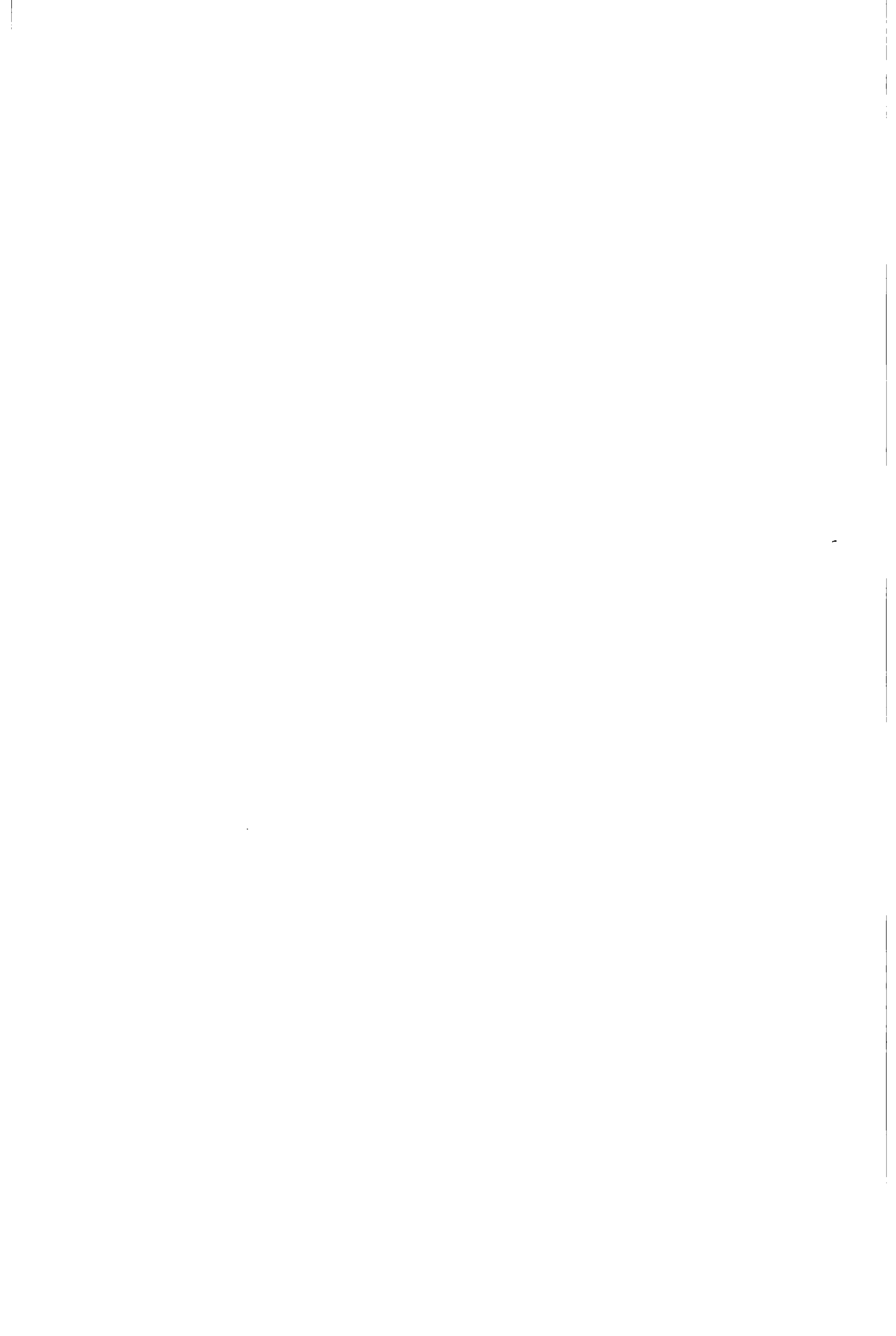
Band XXV. Jahrgang 1895.

München.

Verlag der K. Akademie.

1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Uebersicht
des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXV Jahrgang 1895.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 136. Stiftungstages am 28. März 1895.

Seite

v. Pettenkofer: Nekrologe 155

v. Voit: Nekrologe 161

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1895.

v. Pettenkofer: Eröffnungsrede 365

Wahlen 370

Sitzung vom 5. Januar 1895.

*Walter Dyck: Ueber die Bestimmung der Anzahl der einem System von n-Gleichungen mit n-Variabeln gemeinsamen Wurzeln und über die Berechnung der Summe der Werthe, welche eine weitere Funktion dieser Variabeln in diesen Nullstellen annimmt 1

Joh. Ranke: Zur Anthropologie der Halswirbelsäule; Beitrag zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform 3

L. Boltzmann: Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten 25

Joh. Rückert: Zur Kenntniss des Befruchtungsvorganges . . 27

*H. Seeliger: Vorzeigung astronomischer Photographien des Herrn Professor Wolf in Heidelberg 2

Alfred Pringsheim: Ueber den Cauchy'schen Integralsatz 39

Sitzung vom 9. Februar 1895.

Seite

*K. Göbel: Ueber directe Anpassung 73

Alfred Pringsheim: Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen 75

M. Nöther: Die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung gehen 93

Ed. v. Weber: Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. O. mit drei Variabeln 101

F. v. Sandberger: Ueber Blei- und Fahlerzgänge in der Gegend von Weilmünster und Runkel in Nassau 115

N. Rüdinger: Ueber Leucocytenwanderung in den Schleimhäuten des Darmkanals 125

Sitzung vom 2. März 1895.

*C. v. Kupffer: Ueber die Entwicklung der Kiemenknorpel. bei Petromyzon Planeri 197

*Ad. v. Baeyer: Ueber das Caron 197

Sitzung vom 4. Mai 1895.

R. Hartig: Ueber den Drehwuchs der Kiefer 199

F. Lindemann: Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird . 219

J. Bauschinger: Ueber eine neue Bestimmung der Refractionsconstante auf astronomischem Wege 239

W. Dyck: Beiträge zur Potentialtheorie. I. Ueber die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristiken eines Functionensystems durch bestimmte Integrale 261

Sitzung vom 15. Juni 1895.

R. Hartig: Ueber den Nadelschüttepilz der Lärche, Sphaerella laricina n. sp. 279

A. Pringsheim: Zum Cauchy'schen Integralsatz 295

*F. Lindemann: Ueber die conforme Abbildung eines Flächenstückes, das durch Parabeln mit gemeinsamer Axe begrenzt wird 278

Seite

*F. Lindemann: Vorlage eines aus Vorder-Asien stammenden antiken Modelles (Bronze-Guss) eines Archimedischen Körpers (Rhomben-Triakontaëder) 278
*A. v. Baeyer: Ueber das Kümmelöl 278

Sitzung vom 6. Juli 1895.

*A. Schmidt: Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials 305
*W. Dyck: Beiträge zur Potentialtheorie. II. Die Gauss'sche Formel für die gegenseitige Umschlingung zweier Raumcurven und ihre Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten. Darstellung als Kronecker'sche Charakteristik eines Funktionensystems 305

Sitzung vom 2. November 1895.

*L. Radlkofer: Monographie der Sapindaceen-Gattung Paullinia 329
K. Goebel: Ueber die Abhängigkeit der Blattform von Campanula rotundifolia von der Lichtintensität 331
Alfr. Pringsheim: Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen 337

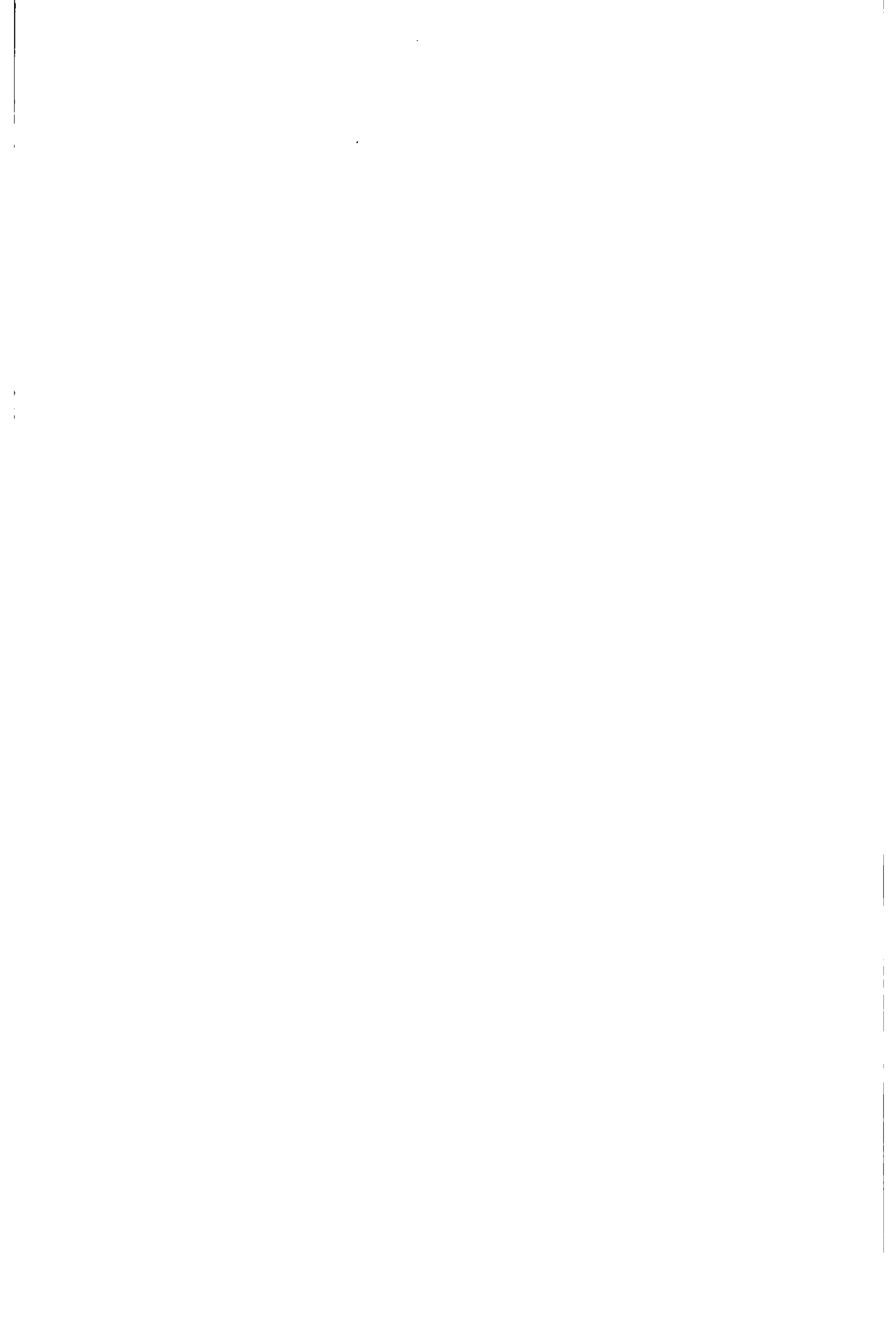
Sitzung vom 7. Dezember 1895.

R. Lehmann-Filhés: Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft 371
Ed. v. Weber: Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen 423
C. v. Voit: Ueber den Eiweissumsatz bei Zufuhr von Antipepton 443

Nachtrag zur Sitzung vom 6. Juli 1895.

W. Dyck: Beiträge zur Potentialtheorie. II. 447

Einsendungen von Druckschriften 307, 501



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. November 1895.

1. Herr L. Radlkofer legt eine Monographie der Sapindaceen-Gattung Paullinia vor. Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

2. Herr K. Goebel macht eine Mittheilung: „Ueber die Abhängigkeit der Blattformen von Campanula rotundifolia von der Lichtintensität.“

3. Herr Alf. Pringsheim spricht: „Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen.“

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1895. Heft I.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. Januar 1895.

1. Herr Walter Dyck trägt vor: „Ueber die Bestimmung der Anzahl der einem System von n-Gleichungen mit n-Variabeln gemeinsamen Wurzeln und über die Berechnung der Summe der Werthe, welche eine weitere Funktion dieser Variabeln in diesen Nullstellen annimmt."

Er bespricht die Stellung der hierauf bezüglichen Arbeiten von Kronecker zu den anschliessenden von Picard, und gibt die Weiterführung dieser Untersuchungen im Sinne der ursprünglichen Cauchy'schen Theoreme.

Die Resultate sind in einem Schreiben an Picard (veröffentlicht in den Comptes rendus de l'Acad. francaise vom 31. Dezember 1894 und 7. Januar 1895) niedergelegt und werden später in ausgeführter Form veröffentlicht.

2. Herr Johannes Ranke macht eine Mittheilung: „Zur Anthropologie der Halswirbelsäule; Beitrag zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform."

3. Herr E. v. LOMMEL legt eine Notiz des auswärtigen Mitgliedes der Classe, Herrn Ludwig Boltzmann in Wien, vor: „Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten."

4. Herr JOHANNES RÜCKERT bespricht seine Untersuchungen: „Zur Kenntniss des Befruchtungsvorganges." Ein Auszug daraus folgt in den Sitzungsberichten.

5. Herr HUGO SEELIGER zeigt eine Anzahl astronomischer Photographien von Herrn Prof. Wolf in Heidelberg vor. Genaue Zeichnungen von 5 dieser Photographien erscheinen mit dem erläuternden Text in den Denkschriften.

6. Herr ALFRED PRINGSHEIM spricht: „Ueber den Cauchy'schen Integralsatz."

Zur Anthropologie der Halswirbelsäule.

Beitrag zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform.

Von **Johannes Ranke.**

(Eingelaufen 5. Januar.)

Bei der Fortsetzung der Studien zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform wurde ich von der Untersuchung der anthropologischen Bauverhältnisse der Schädelbasis[1]) zu jenen der Halswirbelsäule geführt.

Hier fesselt zunächst die Bildung des Atlasgelenkes die Aufmerksamkeit. So ähnlich der Bau dieses Gelenkes bei dem Menschen und den menschenähnlichen Affen auch ist, so zeigt sich doch ein mechanisch wichtiger Unterschied in der Stellung der im Gelenk vereinigten Knochenflächen. Die beiden Gelenkhöcker des Hinterhauptbeins, die Condylen, welche sich mit dem Atlas in einem zweifachen Gelenke vereinigen, sind bei dem Menschen bei normaler aufrechter Kopfhaltung direkt nach unten gerichtet, während ihre Richtung bei den menschenähnlichen Affen, wie bei allen Wirbelthieren, mehr oder weniger nach hinten geht.

Bei dem Menschen steht daher der Hauptkrümmungsradius der Gelenkfläche der Condylen auf dem Scheitel ihrer

---

[1]) über welche Herr Professor Dr. von Kupffer in der Sitzung der k. b. Akademie d. W. vom 8. Juli 1893 berichtete unter Vorlage meines Buches: Ueber einige gesetzmässige Beziehungen zwischen Schädelgrund, Gehirn und Gesichtsschädel. 4⁰. 132 S. Mit 30 Tafeln. München 1892. Fr. Bassermann.

Convexität senkrecht, sodass der nach vorn und der nach hinten gewendete Abschnitt des von der Gelenkfläche gebildeten Bogens gleich gross ist. Bei dem Gorilla bildet der Krümmungsradius der Gelenkfläche unter denselben Verhältnissen einen Winkel von ca. 45° mit der Horizontalen und $^4/_5$ des Bogens sind nach hinten gewendet. Dabei sind die Gelenkflächen der Condylen bei dem Gorilla viel stärker gekrümmt, bei dem Menschen entsprechend flacher. Bei beiden hat der von der Gelenkfläche gebildete Bogen eine Länge von circa 28—30 mm. Der Krümmungsradius[1]) beträgt aber bei dem Gorilla nur 10, bei dem Menschen dagegen 18 mm, also fast das Doppelte. Ganz entsprechend verhalten sich die Gelenkgruben des Atlas, sie sind bei dem Gorilla entsprechend tiefer und umgreifen die Condylen in weiterer Ausdehnung als bei dem Menschen, das Gelenk ist bei dem Gorilla daher fester und weniger frei.

Der eben beschriebenen Stellung der Gelenkflächen der Condylen entspricht die Stellung der für ihre Aufnahme im Schädelatlasgelenke bestimmten Gelenkgruben des Atlas. Der Vorder- und Hinterrand dieser Gelenkgruben ist bei dem Menschen bei horizontaler Stellung des Wirbels etwa gleich hoch. Bei dem Atlas des Gorilla erhebt sich der Hinterrand wie die Lehne eines Stuhles, während der Vorderrand niedrig ist. Durch diese Lehnenbildung wird für die nach hinten gewendeten Gelenkfortsätze des Schädels ein Widerlager geschaffen.

Auch die seitlichen Gelenke zwischen Atlas und zweitem Halswirbel sind bei dem Gorilla weniger frei als bei dem Menschen. Bei letzterem gleiten fast ebene Flächen an einander hin, während die betreffenden Gelenkflächen bei dem Gorilla ausgesprochen gewölbt sind mit einem Radius von etwa 65 mm.

[1]) Durch Abnahme der Krümmungen mittelst Blechdraht gemessen.

Der ganze Bau der Halswirbelsäule überhaupt ist bei den menschenähnlichen Affen weit mehr auf Festigkeit und Stabilität gerichtet als bei dem Menschen. Auf Festigkeit zielt schon die tiefe zapfenförmige oder gelenkkopfartige Einsenkung der einzelnen Körper der Halswirbel in einander bei dem Gorilla wie bei allen Affen. Bei der menschlichen Halswirbelsäule ist eine solche Einsenkung der einzelnen Wirbelkörper in einander viel geringer, worauf z. Th. die hohe Beweglichkeit des Menschenhalses im Ganzen beruht. Die untere convexe Randcurve des menschlichen 2. Halswirbels hat in der Mitte einen Krümmungsradius von circa 11 mm und flacht sich nach beiden Seiten zu noch weiter etwas ab; die Krümmungscurve bildet im Ganzen, einschliesslich jener seitlichen Abflachung, ziemlich genau einen Halbkreis[1]) mit dem Radius von 11 mm. Bei dem männlichen Gorilla misst der Krümmungsradius nur ca. 6 mm, die Krümmungscurve ist eine sehr gestreckte Ellipse[2]); der Bogen beträgt mehr als einen Halbkreis, sodass der obere Wirbelkörper zapfenartig in den unteren eingesenkt ist.

Der gesteigerten Festigkeit der Halswirbelsäule entspricht auch das im Ganzen beträchtlichere Volumen der einzelnen Halswirbel bei den grossen menschenähnlichen Affen (Gorilla), während bei dem Menschen gerade die Halswirbel besonders wenig voluminös sind. Dieses höhere Volumen der Gorillahalswirbel spricht sich für die äussere Betrachtung vor Allem in den extrem lang- und starkentwickelten Dornfortsätzen aus, welche annähernd senkrecht auf die Längsachse des Halses gerichtet sind. Ganz entsprechend sind die Verhältnisse bei allen Anthropoiden. Während bei dem Menschen die Halswirbel und namentlich ihre Dornfortsätze (mit Ausnahme des 7.) besonders schwach, die Dornfortsätze gabelförmig ausgeschnitten sind, sind die Dornfortsätze der Halswirbel bei den grossen Anthro-

---

1) In Wahrheit eine Parabel.

2) Resp. Parabel.

poiden besonders stark. Der 4. Halswirbel des Menschen hat oft einen besonders schwachen gewöhnlich gabelig ausgeschnittenen nach abwärts gebogenen Dornfortsatz, der sich nur etwa 10 mm oder wenig mehr über die Hinterfläche des Wirbels in senkrechter Projection erhebt; bei dem Gorilla ragt er dagegen ca. 80—90 mm hoch über den Bogen hervor.

Der erste Halswirbel hat, soviel ich sehe, bei keinem menschenähnlichen Affen einen längeren Dornfortsatz; beim Gorillamännchen ist auch der zweite relativ kurz, da die Hinterfläche des Schädels bei vorwärts gewendetem Gesichte direkt auf dessen Spitze aufruht, sodass er sich schon aus diesem Grunde nicht höher entwickeln kann. Bei allen, welche ich untersuchen konnte, ist der Dornfortsatz des 4. Halswirbels am grössten und endigt, wie das beim Gorilla alle Halsdornfortsätze zeigen, in eine Art von Knopf. Huxley[1]) hebt als eine menschenähnliche Bildung des Schimpanse (Troglodytes) den gabeligen Ausschnitt seines 2. Halswirbeldornfortsatzes hervor, indem er sagt: „Aber dieser menschliche Charakter fehlt den übrigen Anthropoiden.“ Die Sache verhält sich doch etwas anders. Bei dem von mir untersuchten Schimpanse umgreift die gabelig ausgeschnittene Spitze des Dornfortsatzes des zweiten Halswirbels zangenartig die Spitze des dritten, sodass beide zusammen eine einheitliche breite und hohe Stützfläche für Band- und Muskelansatz bilden. Aehnlich zeigt sich eine Einrichtung bei dem zu den Halbaffen, Lemuren, gezählten grossköpfigen und namentlich extrem grossäugigen „plumpen oder faulen Lori“, Stenops (Ill.) oder Nycticebus tardigradus (Geoffr.). Bei diesem umgreift der ebenfalls gabelförmig oder besser gesagt zangenartig ausgeschnittene Dornfortsatz des zweiten Halswirbels sogar die Spitzen der Dornfortsätze des dritten und vierten Halswirbels, offenbar um die Festigkeit und Tragfähigkeit der Halswirbelsäule zu

---

1) Handbuch der Anatomie der Wirbelthiere. Uebersetzt von F. Ratzel. S. 399.

steigern. Auch bei niederen Säugethieren kommen ähnliche und mechanisch ähnlich wirkende Bildungen an der Halswirbelsäule vor. So bilden die Dornfortsätze des 2.—5. Halswirbels bei einigen geschickt kletternden mittel- und südamerikanischen Beutelratten (Didelphis cancrivora und Azarae) eine in gewissem Sinne gemeinschaftliche Bildung, indem die Halsdornfortsätze vom 2. Halswirbel an eine relative hohe und dicke, convexgewölbte, annähernd geschlossene, gegen Kopf und Brust zu abfallende Leiste bilden.

Diese besondere Festigkeit bedarf die Halswirbelsäule der grossen anthropoiden Affen zum Tragen und Halten ihres schweren Kopfes und zwar in ihrer der menschlichen aufrechten Körperhaltung angenäherten, wie man gewöhnlich sagt, halbrechten Stellung.

Die moderne Zoologie erkennt als ein den Menschen von den menschenähnlichen, sowie den niederen Affen unterscheidendes systematisches Merkmal den aufrechten Gang[1]) an, aber es wäre ein Missverständniss, wenn man annehmen wollte, nur der Mensch sei zu dem „aufrechten Gang" befähigt. Auch die anthropoiden Affen haben diese Fähigkeit in ausgesprochener Weise und benützen sie gelegentlich, am besten verstehen diese Kunst die, eine Mittelstellung zwischen höheren und niederen catarrhinen Affen (den Anthropoiden und Cynomorphen) einnehmenden Gibbonarten, die Langarmaffen. Gelegentlich aus Bedürfniss oder durch Dressur dazu gezwungen, sehen wir viele der Säugethiere den aufrechten Gang annehmen.[2])

Die speciellen Skeleteinrichtungen, welche soeben von den grossen anthropoiden Affen geschildert worden sind, beziehen sich, wie die nähere Untersuchung ergibt, speciell auf das Bedürfniss, den grossen und schweren, an der Wirbelsäule

---

[1]) R. Hertwig, Lehrbuch der Zoologie. II. Aufl. S. 566 f.

[2]) Wie die auf den beiden Hinterfüssen, die Vorderfüsse in der Luft, zweibeinig einherschreitenden Elephanten Hagenbeck's u. a.

seitlich befestigten Kopf in der mehr oder weniger aufrechten Körperstellung zu halten.

Bei den wirklich vierfüssig gehenden Thieren sind die Halteeinrichtungen für den Schädel am Skelet anders als bei den menschenähnlichen Affen. Den betreffenden niederen Säugethieren fehlen die mächtig entwickelten Dornfortsätze der Halswirbel der Anthropoiden, ebenso wie dem Menschen. Dagegen ragen bei den eigentlichen „Vierfüsslern“ die Dornfortsätze der ersten Brustwirbel, welche bei dem Menschen wie bei den menschenähnlichen Affen dachziegeltörmig nach abwärts geneigt sind, mächtig in die Höhe, um den starken elastischen und muskulösen Haltorganen des Kopfes, dem Nackenband und der Nackenmuskulatur als feste Angriffs- und Stützpunkte zu dienen. Von diesen Nackendornen aus spannt sich das elastische Nackenband zur Hinterfläche des (2. Halswirbels und) Kopfes. Der letztere wird dadurch, wie der Querbalken eines Galgens oder eines Krahns seitlich an der Spitze der, vom Nacken vielfach annähernd senkrecht sich aufrichtenden Halswirbelsäule gehalten. Je schwerer der Kopf ist, desto mächtiger sind auch die Nackendornen; bei dem Skelet eines erwachsenen Bison[1]) fand ich die Dornfortsätze der ersten Brustwirbel, der Nackenwirbel, länger als irgend einen der langen Extremitätenknochen, speziell der Dornfortsatz des 4. Brustwirbels hat eine Länge von 470 mm.

Dass diese auffallende Bildung der Nackendornen wirklich mit dem Tragen eines schweren Kopfes correspondirt, ergibt sich bekanntlich daraus, dass bei den Geweih- oder Hörner-tragenden Säugethieren ihre Höhe und Stärke im Allgemeinen bedeutender erscheint, und dass sie einerseits bei den hornlosen Weibchen der Schafe, der Hirsche u. a. schwach bleiben, während andererseits die gehörnten Männchen, der weit schwerern Last des Schädels entsprechend, besonders hoch und stark

[1]) Münchener zoologische Sammlung.

ausgebildete Nackendornen aufweisen. Die Dornfortsätze der Halswirbel sind dagegen bei all den eigentlich vierfüssiggehenden Säugethieren [1]) auffallend klein und in diesem Sinne menschenähnlich, nur der zweite Halswirbel hat entwickeltere Ansatzflächen für die elastisch-muskulösen Haltapparate des Kopfs.

Schon ohne nähere Untersuchung erweckt die Betrachtung der mächtigen Halsdornen des Gorilla und der andern grossen menschenähnlichen Affen, Orangutan und Schimpanse, den Eindruck, dass man es hier mit einem den eben geschilderten Nackendornen entsprechenden Halteapparat für den schweren, ebenfalls seitlich an der Spitze der Wirbelsäule, befestigten Kopf zu thun habe. Entsprechend der halbrechten Stellung dieser Affen könnte ja der Halteapparat von dem Nacken auf die Halswirbelsäule verlegt sein: das ist die Frage.

Wie gesagt sind die Dornfortsätze der Rückenwirbel bei den Anthropoiden relativ schwach und menschenähnlich, dagegen bieten die Dornfortsätze der Halswirbel die nöthigen Angriffsflächen für Ansatz oder Ursprung der mächtigen Band- und Muskelmassen, welche nothwendig sind, um den gewaltigen Kopf, trotz seines, wie wir sahen, seitlichen Ansatzes an der Spitze der Wirbelsäule bei der halbrechten oder aufrechten Körperhaltung des Thieres beim Gehen und Klettern mit parallel zur Bodenfläche gerichteten Augenachsen geradeaus vor sich hinsehen zu lassen, ganz ähnlich wie letzteres beim Menschen der Fall ist.

Um die eben gestellte Frage nach der mechanischen Bedeutung des Halsdornenapparates der Anthropoiden zu lösen, gibt es eine einfache Betrachtung. Ist die besondere Grössenausbildung der Halsdornen bei den menschenähnlichen Affen wirklich eine mechanische Bedingung für die halbrechte oder mehr weniger aufrechte Körperhaltung, so muss

---

[1]) Ausnahmen s. oben S. 7 und unten S. 11, Anmerkung.

sie sich bei allen Thieren finden, die sich darin den menschenähnlichen Affen ähnlich verhalten, dagegen denen fehlen, welchen die mehr weniger aufrechte Körperhaltung fehlt.

Das Charakteristische der Halsdornenbildung der Anthropoiden besteht darin, dass im Gegensatz gegen das bei dem Menschen, wie bei der übergrossen Mehrzahl aller Säugethiere, bestehende Verhältniss, dass die Dornfortsätze der Halswirbel kürzer sind als die Dornfortsätze der Brustwirbel, bei den Anthropoiden dagegen die Brustwirbeldornfortsätze kürzer sind als die Halswirbeldornfortsätze.

Bei den relativ kleinköpfigen Gibbons und der Mehrzahl der niederen Affen der alten und neuen Welt besteht insofern eine Annäherung an die Halsdornenbildung der Anthropoiden, als die Dornfortsätze der Hals- und der Brustwirbel wenig an Grösse unterschieden sind, vielfach sind sogar die Halsdornen etwas länger. Es stimmt das in dem fraglichen Sinne mit der Lebensgewohnheit der niederen Affen gut überein.

Unter den Lemuren[1]) gibt es aber ein Thier, welches vielleicht in noch höherem Grade als irgend ein menschenähnlicher Affe es liebt, eine ganz oder halb aufrechte Rumpfhaltung anzunehmen. Es ist das der Lichanotus Indri Geoff., der Madagassische Jagdaffe, welcher gern und gut aufrecht geht und, namentlich in Hinblick auf die Längenproportionen der Beine und Arme, eine auffallende Menschenähnlichkeit zeigt, nur der kleine Kopf mit der thierischen Schnauze u. n. a. passt nicht zu diesem Eindruck. Abgesehen vom Kopf sieht das wunderliche Thier ganz wie eine menschliche Puppe in Pelzkleidern aus. Obwohl nun der Kopf für die Körpergrösse verhältnissmässig klein und wenig voluminös ist, sind bei dem Indri doch die Halsdornen länger und breiter als die Nackendornen, und entsprechen in der Form

---

[1]) Ueber den faulen Lori s. oben S. 6.

weitgehend den Dornfortsätzen der Lendenwirbel. Vom dritten Halswirbel an nimmt die Höhe und sagittale Breite seiner Halsdornen bis zum siebenten Halswirbel zu, von da, vom ersten Nackenwirbel an, wieder ab, sodass der erste Nackenwirbeldornfortsatz in Grösse und Form etwa dem vierten, der zweite und dritte dem dritten Halswirbel entsprechen; vom vierten Nackenwirbel an beginnt die typische dachziegelförmige Abwärtsneigung der Brustwirbeldornfortsätze.[1])

Unter den Vögeln gibt es eine Anzahl aufrecht sitzender und gehender Formen: die Pinguine (Aptenodytes), Eistaucher- (Colymbus) und Steissfuss- (Podiceps) Arten, auch bei diesen findet sich eine entsprechende Bildung an den Halswirbeln. Namentlich die Pinguine besitzen im Gegensatz gegen die mit horizontaler Rumpfhaltung gehenden und sitzenden Vögel wie z. B. die Hühner und Gänse u. v. a. an den oberen Halswirbeln starke Dornfortsätze neben noch anderen seitlichen knöchernen Halteinrichtungen, welche der weit überwiegenden Mehrzahl der Vögel fehlen. Eine Andeutung davon zeigt sich sonst nur noch bei solchen Arten, bei welchen der Hals einen ganz besonders schweren und grossen Kopf auch annähernd aufrecht zu tragen hat, wie Buceros, Alcedo, grosse Vultur-Arten.

Aus dieser Umschau ergibt es sich, dass die oben gestellte Frage im bejahenden Sinne beantwortet werden darf: die mächtig entwickelten Halsdornen der grossen Anthropoiden sind ein den Nackendornen der eigentlich vierfüssig gehenden Säugethiere entsprechender Halteapparat für den schweren Kopf, welcher im mechanischen Zusammenhang mit der

[1]) Merkwürdigerweise findet sich auch bei den niedrigsten Säugethieren, dem Schnabelthier und dem Ameisenigel, das Verhältniss, dass die Halsdornfortsätze länger sind als die Brustdornfortsätze, offenbar auch, wie bei einigen der oben erwähnten Vögel: Buceros etc., zur Haltung und Bewegung ihres relativ schweren Kopfes.

mehr oder weniger aufrechten Rumpfhaltung der höchsten Affen auf die Halswirbelsäule verlegt ist. Hier findet sich eine entsprechende Skeleteinrichtung bei allen sich aufrecht haltenden Wirbelthieren. Die grossen Halswirbeldornen ergänzen sonach die zuerst geschilderten knöchernen Einrichtungen zur Kopfhaltung am Hals der Anthropoiden, wofür am Schädel selbst die mächtig entwickelten Ansatzflächen am Hinterhaupt mit dem Hinterhauptkamm an der oberen Grenze der Hinterhauptschuppe u. a. zählen.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die mehr oder weniger aufrechte Körperhaltung der Anthropoiden, in welcher man in älterer Zeit manchmal eine Art von Uebergang zu der typisch menschlichen Körperhaltung finden wollte, mechanisch auf principiell verschiedenen Ursachen wie letztere beruht.

Der schwere seitlich an der Wirbelsäulenspitze befestigte Kopf der Anthropoiden wird durch elastische und Muskelkräfte in seiner bei der halbrechten Körperstellung horizontalen Lage gehalten, die aufrechte Körperhaltung wird bei ihnen mechanisch ermöglicht durch eine namentlich zwischen Hinterkopf und den Dornfortsätzen der Halswirbel specifisch entwickelte Haltevorrichtung für den Schädel, für welche, abgesehen von den elastisch-muskulösen Apparaten, specielle Skeleteinrichtungen (am Schädel und der Halswirbelsäule) vorhanden sind. Die aufrechte Körperhaltung der anthropoiden Affen beruht sonach zum grossen Theil auf Muskelarbeit.

Bekanntlich ist das mechanische Verhältniss der Kopfhaltung bei dem Menschen ein anderes.

Die Verbindungsstelle des Kopfes mit der Wirbelsäule ist bekanntlich an allen Schädeln dort, wo das Rückenmark aus der Schädelhöhle durch das grosse Hinterhauptsloch, Foramen magnum, aus- und in die Rückgratshöhle eintritt. Zu beiden Seiten der Vorderhälfte des Hinterhauptsloches befinden sich

die beiden oben besprochenen convexen Gelenkhöcker, die Condylen, zur Verbindung des Schädels mit dem ersten Halswirbel, dem Atlas. Bei dem Menschen sehen nun, wie gesagt (S. 3), die Gelenkflächen der Condylen bei normaler, horizontaler, Kopfhaltung direkt nach unten, während sie, wie wir oben sahen, auch bei dem Gorilla, dem menschenähnlichsten Affen, wie bei allen anderen Wirbelthieren bei der normalen, d. h. für die Anthropoiden auch horizontalen Kopfhaltung nach hinten gewendet sind. Ist der Menschenschädel an dieser Stelle unterstützt, so genügt nachweislich ein Minimum von Kraftaufwand, um ihn in seiner für den lebenden Menschen normalen Ruhestellung zu erhalten, während ein Gorillaschädel dabei nach vorne herabsinkt. Der mechanische Grund dafür ist bekanntlich der, dass das Foramen magnum mit den Condylen bei dem Menschen sehr annähernd in die Mitte der Unterfläche des Schädels gerückt ist, sodass bei senkrechter Unterstützung der Condylen der Schädel auf diesen, wie ein Wagbalken auf seinem Hypomochleon, im Gleichgewicht zu ruhen vermag. Ein Minimum von Muskel- und elastischer Spannung genügt, um diese Gleichgewichtsstellung zu erhalten. Daher kann die Halswirbelsäule des Menschen trotz des mächtigen Kopfes, den sie zu tragen und zu halten hat, so schwach sein, dass dieses Verhältniss als ein besonderes typisches für den Menschen schon den alten Anatomen, z. B. Eustachius, auffallen musste.

Bei den menschenähnlichen Affen, wie bei allen anderen Säugethieren ist dagegen, wie ich wiederhole, der Kopf an der Spitze der Wirbelsäule nicht balancirt, sondern an ihr seitlich aufgehängt. Bei alleiniger senkrechter Unterstützung der Gelenkflächen der Condylen fällt daher der Kopf, bei horizontaler Haltung, wie sie der normalen Körperhaltung der Anthropoiden bei ihrer typischen Körperstellung entspricht, nach vorne herab, wenn er nicht durch eine Kraft gehalten wird, welche der Schwere des Kopfes, einschliesslich der bei solcher Stellung

sich geltend machenden Hebelwirkung, gleichkommt. Die Ursache für die seitliche Befestigung des Schädels an der Wirbelsäule liegt darin, dass das Hinterhauptsloch mit den Condylen bei den Anthropoiden an das hintere Ende der Schädelbasis, bei der Mehrzahl der Wirbelthiere auf die Hinterseite des Schädels, gerückt ist. Dieser Stellung der Condylen entspricht dann die oben beschriebene, von der menschlichen Einrichtung sich so auffallend unterscheidende, Rückwärtswendung ihrer Gelenkflächen.

Bei dem Menschen beansprucht sonach die Aufrechthaltung des Kopfes so gut wie keine Muskelarbeit, sie ist die aufrechte Ruhestellung des Kopfes, und durch diese ist dann, was hier keines weiteren Beweises bedarf, die aufrechte Körperhaltung des Menschen im Ganzen und Einzelnen, als eine Ruhestellung, zu deren Erhaltung ein Minimum von Muskelarbeit gehört, bedingt. In dieser Hinsicht ist die aufrechte Körperhaltung des Menschen in ihrem mechanischen Zustandekommen etwas Besonderes. Während doch auch der menschenähnlichste Affe eine wirklich aufrechte Körperhaltung, die er ja relativ leicht anzunehmen vermag, durch, auf die Dauer ermüdende, Muskelanstrengung erzwingt, ist bei derselben Stellung der ganze Körper des Menschen in all seinen Theilen sehr annähernd im (labilen) Gleichgewicht balancirt. Die aufrechte Stellung ist, wie gesagt, eine Ruhestellung des Menschenkörpers, zu deren Erhaltung das geringste Mass von Muskelanstrengung erforderlich ist, ganz entsprechend der vierfüssigen Stellung der meisten Säugethiere oder der typisch halbrechten Haltung der Menschenaffen, bei welchen auch sie sich auf ihr vorderes Extremitätenpaar stützen. Für Maximaldauerleistungen nehmen Thier und Mensch diejenige Körperhaltung an, welche auf die Dauer für sich selbst am wenigsten Muskelleistungen in Anspruch nimmt, sodass, z. B. für rasche Flucht, von der im Ganzen dem Körper zur Ortsbewegung und Körperhaltung zu

Gebote stehenden Summe von Muskelkraft noch möglichst viel übrig bleibt. Bei raschester Flucht richtet sich der Mensch auf, aber auch der menschenähnliche Affe benützt dazu, wie die niederen Vierfüssler, seine vier Extremitäten. In dem dargelegten Sinne muss der Mensch aufrecht gehen, kein Säugethier muss das. Der Grund dafür liegt, wie wir gesehen haben, in der verschiedenen Art der Befestigung des Kopfes auf der Wirbelsäule.

Dafür ist nun die Lage des Hinterhauptsloches resp. der beiden zu seinen Seiten gelegenen Gelenkhöcker für das Atlasgelenk das entscheidende Moment: die typische mühelose menschliche Kopfhaltung und damit die gesammte mühelose aufrechte Körperhaltung wird durch die centrale Lage der Schädelcondylen an der Schädelbasis bedingt, die bei den menschenähnlichen Affen weit nach hinten rücken.

Für ein kausales mechanisches Verständniss dieses entscheidenden Unterschiedes im Skeletbau haben wir sonach die mechanische Ursache zu erforschen für die centrale Lage des Hinterhauptsloches (resp. der Condylen) bei dem Menschen einerseits und die Ursache der Verschiebung desselben auf die Hinterseite der Schädelbasis (resp. des Schädels) bei den anthropoiden Affen sowie bei allen anderen Wirbelthieren andererseits.

Die Frage nach der Kausalität der aufrechten Körperhaltung des Menschen spitzt sich sonach zu zu der Frage nach der mechanischen Ursache für die typische Stellung des Hinterhauptsloches am Schädelgrund.

In der schon oben (S. 3) erwähnten Untersuchung: Ueber einige gesetzmässige Beziehungen zwischen Schädelgrund, Gehirn und Gesichtsschädel ist mir der so lange vergeblich gesuchte Nachweis gelungen, dass die besondere Gestaltung des Schädelgrundes bei Mensch und Thier von dem relativen Grössenverhältniss des Gehirns zum Gesammtschädel ursächlich bedingt ist.

Bei der Formausgestaltung des Schädels der Vertebraten sind wesentlich die zwei Organsysteme betheiligt, welche überhaupt die gesammte Körperausgestaltung beherrschen: das Nervensystem und das Darmsystem, von ersterem zunächst, und für den Menschen immer überwiegend, das Gehirn, von dem zweiten die Kauwerkzeuge. In gegenseitiger Beeinflussung gestalten einerseits das Gehirn mit Sinnesorganen und andererseits die Kauwerkzeuge die specifische Schädelform.

Bei der ersten Anlage der definitiven Schädelform ist bei allen Säugern, wie eigentlich bei allen Vertebraten, das formgestaltende Prinzip das Gehirn, während der Einfluss der Organe des Darmsystems am Kopfe, der Kauwerkzeuge, sehr zurücktritt. Bei der ersten embryonalen Ausgestaltung des Kopfes, so lange dieselbe noch nicht stärker durch die Kauwerkzeuge beeinflusst wird, sind bei allen Säugethieren die Bildungsverhältnisse des Kopfes und seines Schädelgrundes in so hohem Grade menschenähnlich, dass man für manche Fälle sogar fast von Identität reden konnte. Bei allen Säugethieren geht die nähere Ausgestaltung der Kopfform von einem Stadium aus, welches man als anthropine Kopfform bezeichnen darf. Jene rel. frühe anthropine Periode ist dadurch charakterisirt, dass unter der stärkeren Beeinflussung der Wachsthumsenergie der Schädelbasis durch das übermächtig wachsende Gehirn, der dann noch weich bewegliche Schädelgrund in der Gesichtskopfbeuge eine scharfe Abknickung ungefähr in der Mitte der Schädelbasis erfährt. Die Knickungsstelle entspricht im Allgemeinen jener Knorpelfuge (Symphysis spheno-basilaris), durch welche der Basilartheil des Hinterhauptsbeines (pars basilaris oss. occ.) mit dem Körper des Keilbeins, wie R. Virchow schon vor mehr als einem Menschenalter bewiesen hat, auch noch bei Neugebornen und jugendlichen Individuen bis zu einem gewissen Grade beweglich verbunden ist. An dieser Fugenstelle ist

bei den Säugethierembryonen wie bei dem ungeborenen Menschen der Basilartheil des Hinterhauptsbeins gegen den Körper des Keilbeins winkelig abgeknickt, ein Verhältniss, welches bekanntlich Virchow als Sattelwinkel messend verfolgte.

Bei dem Menschen bleibt nun dieses embryonale Verhältniss während der ganzen Entwicklungsperiode sich wenig vermindernd vor der Geburt bestehen und erhält sich auch im nachembryonalen Leben nicht nur, sondern steigert sich unter dem steigenden Wachsthum des Gehirns noch weiter, sodass die Knickung der Schädelbasis bei dem Erwachsenen beträchtlich stärker ist als bei dem Neugebornen und wieder die primären embryonalen Verhältnisse erreicht. Bei der Kopfbildung des Menschen bleibt auch in den späteren Stadien der embryonalen Entwicklung, in welchen sich auch bei ihm der umgestaltende Einfluss der Kauwerkzeuge (d. h. der Organgruppe des Darmsystems) in gesteigertem Maasse geltend macht, die primär führende Rolle dem Gehirn gewahrt, die Schädelbasis bleibt geknickt. Bei der Kopfbildung der Thiere sehen wir dagegen bald die führende Rolle von dem in seinem Wachsthum relativ zurückbleibenden Gehirn auf die Organe des Darmsystems, die Kauwerkzeuge, übergehen. Dieses letztere Verhalten, welches sich schon im embryonalen Leben geltend macht, tritt immer greller hervor im nachembryonalen Leben bis zur Vollendung des Schädelwachsthums.

Die Knickung der Schädelbasis ist Wirkung des übermächtigen Gehirnwachsthums auf den Schädelgrund; tritt dieser gestaltende Einfluss des Gehirns mehr und mehr zurück, indem die relative Grösse des Gehirns (resp. der Hirnschädelkapsel) immer weiter gegen die fortgesetzt gesteigert wachsenden Kauwerkzeuge (Gesichtsschädel) zurückbleibt, so vermindert sich die Knickung der Schädelbasis mehr und mehr, bis der Verlauf ihrer sagittalen Mittellinie zuletzt ein vollkommen gerader, gestreckter

wird. Bei den niederen Säugethieren (Pferden, Rindern u. v. a.) biegt sich sogar in der Hinterhauptskeilbeinfuge der hintere Abschnitt der Schädelbasis, im umgekehrten Sinne wie der Sattelwinkel, nach aufwärts, einen nach oben offenen Winkel bildend.

Das mechanische Verhältniss dieser Abknickung ist im Sinne der bekannten His'schen Theorie einfach zu verstehen. Wir wissen z. B. aus den Untersuchungen Rüdingers über die Entstehung der Bogengänge im Labyrinth und aus anderen Beobachtungen mehr makroskopischer Art z. B. über die Ausbildung der embryonalen Schwanzkrümmung, dass, wenn von zwei mit einander verbundenen elastisch beweglichen Schichten die eine stärker wächst, das im Allgemeinen zu einer convexen Aufwärtswölbung dieser stärker wachsenden und zu einer concaven Einkrümmung der im Wachsthum zurückbleibenden Schichte führt. Ist die im Wachsthum zurückbleibende Schichte, wie in dem vorliegenden Falle relativ starr, nicht im Ganzen elastisch krümmbar, sondern nur an einer Stelle gleichsam wie in einem Scharniere beweglich, so erfolgt, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, keine im Allgemeinen concave Krümmung, sondern eine nach der schwächer wachsenden Schichte hin offene winkelige Abknickung. Umgekehrt, wenn das Wachsthum der anfänglich stärker wachsenden Schichte mehr und mehr von der anfänglich schwächer wachsenden Schichte eingeholt und schliesslich übertroffen wird, so gleicht sich diese Knickung wieder aus, die den Verlauf repräsentirende Mittellinie der anfänglich schwächer wachsenden und daher eingeknickten Schichte streckt sich endlich gerade und wenn das Verhältniss der Wachsthumsenergie in den beiden betreffenden Schichten sich umkehrt, so tritt eine Knickung in der entgegengesetzten Richtung ein.

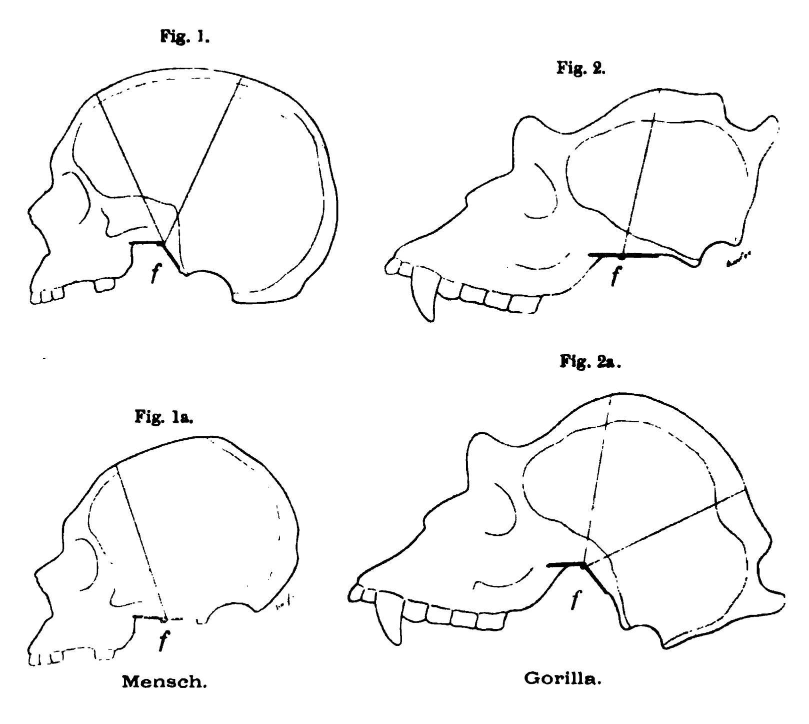
Aus meinen schon citirten Untersuchungen über den Schädelgrund hat sich aus zahlreichen Messungen ergeben,

dass je grösser im Verhältniss zu dem übrigen Schädel die Hirnkapsel, resp. das diese erfüllende Gehirn, ist, dass um so menschenähnlicher die Knickung der Schädelbasis ist. Mit der relativen Zunahme des Gehirns zum Gesammtschädel knickt sich thatsächlich, wie bei dem Menschen nach der Geburt leicht nachweislich ist, die Schädelbasis in der Hinterhauptskeilbeinfuge, Synchondrosis sphenobasilaris, um so stärker ab; mit der relativen Abnahme des Gehirns im Verhältniss zum Gesammtschädel, wie das in immer steigendem Maasse sich bei Anthropoiden und allen anderen Säugethieren ausbildet, gleicht sich äusserlich die Knickung mehr und mehr aus und geht schliesslich in die entgegengesetzte Knickung über.

So zeigen auch die Schädel des Gorilla, des Orangutan, des Schimpanse im erwachsenen Zustand, wenn sich die bei ihnen wie bei allen Säugethieren primär typisch menschliche Schädelform vollkommen in die Thierform umgebildet hat, äusserlich einen horizontalen flächenhaften Verlauf der Schädelbasis. Es gibt sich das besonders deutlich an der Stellung des Basilartheils des Hinterhauptbeins, pars basilaris ossis occip., zu erkennen, welches sich vorne durch die erwähnte Knorpelfuge, wie gesagt in der Jugend beweglich, mit dem Körper des Keilbeins verbindet und nach hinten den Vorderrand des grossen Hinterhauptloches bildet.

Bei der flachen gestreckten Lage des Basilartheils des Hinterhauptbeins rückt sonach das Hinterhauptloch — wie ein Blick auf die schematische Zeichnung S. 20, Fig. 2 u. 1a lehrt — an die Rückseite des Schädels; mit einer nach oben offenen Knickung der Schädelbasis gelangt das Hinterhauptloch ganz auf die Rückseite des Hinterhaupts. Mit dem übermächtig sich entwickelnden Gehirn, welches die Schädelbasis in einem nach unten offenen Winkel abknickt, gelangt das Foramen magnum mehr auf die Unterseite des Schädels und rückt endlich bei dem Menschen in der Zeit, in welcher er laufen lernt, in seine typisch centrale Stellung in der Schädelbasis ein, Fig. 1.

Man kann von diesem mechanischen Vorgang leicht eine schematische Vorstellung gewinnen. Gehen wir von einer menschlichen Schädelkapsel, Fig. 1, aus, deren Schädelbasis wir durch ein Scharnier in der Hinterhauptkeilbeinfuge *f* beweglich gemacht haben und schneiden quer ein keilförmiges Stück heraus (die Schneide dieses Keils an der Sphenobasilar-



Mensch. Gorilla.

fuge, den breiten convex von dem betreffenden Ausschnitt des Schädeldaches begrenzten Theil nach oben), so können wir in dem Scharnier der Sphenobasilarfuge den nach diesem Ausschnitt übrig bleibenden vorderen und hinteren Theil des Schädels an einander legen. Ich habe die Grösse des ausgeschnittenen Keils so gewählt, dass der übrig bleibende Hirnraum der Schädelkapsel dem eines erwachsenen männlichen

Gorilla entspricht. Die direkte Beobachtung ergibt nun, dass durch die eben beschriebene Aneinanderlagerung der beiden Reststücke der verkleinerten Schädelkapsel die Schädelbasis flach gelegt wird. Der Basilartheil des Hinterhauptbeins legt sich flach und das Hinterhauptloch rückt an die Hinterseite des Schädels. Wir haben damit durch entsprechende Verkleinerung des Hirnraumes, entsprechend einer Verkleinerung des Gehirns selbst, den Menschenschädel in Beziehung auf die Stellung des Hinterhauptlochs in die typische Form des Anthropoidenschädels (Gorillaschädels) umgestaltet (Fig. 1a). Die Schädelbasis ist bei den menschenähnlichen Affen (Gorilla) nicht kleiner und kürzer, sondern im Allgemeinen sogar etwas grösser und länger als bei dem Menschen. Setzen wir in unserem Schädelmodell den ausgeschnittenen Keil wieder ein, so rückt durch die damit erzeugte Vergrösserung des Gehirnraums des Schädels, resp. durch die relative Vergrösserung des Gehirns im Verhältniss zu dem Gesichtsschädel resp. den Kauwerkzeugen, das Hinterhauptloch wieder in die für den Menschen typische centrale Lage in der Schädelbasis ein.

Schneidet man in ähnlicher Weise, wie wir das bei dem Menschenschädel gethan haben, eine Schädelkapsel eines menschenähnlichen Affen (Gorilla) in der Mitte von rechts nach links quer bis zur Sphenobasilarfuge durch, die wir wieder in einem Scharnier beweglich machen (wie Fig. 2 demonstrirt), und setzen nun den aus dem Menschenschädel ausgeschnittenen Keil, um den Gehirnraum des Affenschädels dem des Menschen gleich zu machen, in den Affenschädel ein, so wird der Hinterhauptstheil im Ganzen nach abwärts gedrückt, der Basilartheil des Hinterhauptsbeins knickt sich in der Fuge gegen das Keilbein ab und das Hinterhauptsloch rückt damit in die für den Menschen typische centrale Lage an der Schädelbasis (Fig. 2a): Wir haben aus dem Affenschädel, in Beziehung auf die Stellung des Hinterhauptsloches, einen Menschenschädel gemacht.

Dass der Gorillaschädel dadurch im Ganzen nicht menschenähnlicher aussieht, beruht darauf, dass seine colossal entwickelten Fresswerkzeuge thierisch vorstehen. Bei der menschlichen Schädelform kommt eben neben der übermächtigen Gehirnentwicklung, Makroencephalie, noch etwas Anderes in Frage: eine typische Minderentwicklung der Fresswerkzeuge, eine extreme Mikrognathie, welche sich z. Th. daraus erklärt, dass bei dem Menschen schon in einer relativ sehr frühen Periode der embryonalen Entwicklung die Nähte zwischen Ober- und Zwischenkiefer verwachsen, auf deren Offenbleiben auch im nachembryonalen Leben bei den Säugethieren etwa ebenso die Möglichkeit eines gesteigerten Wachsthums der knöchernen Fresswerkzeuge beruht, wie das nachembryonale Wachsthum des Gehirnschädels mit dem Gehirn bei dem Menschen durch das Offenbleiben der Hirnschädelnähte möglich wird, in einer Lebensperiode, in welcher bei den Thieren, auch den anthropoiden Affen, meist längst schon die Verwachsung der Hirnschädelnähte[1]) erfolgt ist.

So schematisch die eben gegebenen Darstellungen über die ursächlichen Momente für die Stellungsverschiedenheiten des Hinterhauptlochs bei dem Menschen und den menschenähnlichen Affen (sowie allen anderen Wirbelthieren) auch erscheinen mögen, so genügen sie im Zusammenhalt mit den früheren Ergebnissen der Untersuchung über den Schädelgrund, um den Beweis zu liefern, dass die centrale Stellung des Hinterhauptlochs bei dem Menschen mechanisch bedingt ist durch die den Menschen charakterisirende Gehirnentwickelung.

Auf der centralen Lage des Hinterhauptlochs an der Schädelbasis, d. h. der beiden seitlich von ihm stehenden Gelenkhöcker des Schädels, der Condylen, welche mit der Wirbelsäule im Atlasgelenke sich verbinden, beruht aber

[1]) J. Ranke, l. c. S. 46. ff.

mechanisch die Möglichkeit der mühelosen Balancirung des Schädels bei der aufrechten Körperhaltung und damit der typischen aufrechten Ruhestellung des menschlichen Körpers im Ganzen, durch welche dann weiter seine specifische äussere und innere Körper- und Organgestaltung bedingt ist.

Die für den Menschen typische aufrechte Ruhestellung des Körpers, der aufrechte Gang, ist sonach mechanisch bedingt durch die übermächtige Entwickelung seines Gehirns.

Damit erscheint aber auch die gesammte typisch-menschliche Körperentwickelung von dem Gehirn mechanisch beherrscht und geleitet. Dazu kommt noch, dass das Gehirn nicht nur die typische Körperform sondern auch die psychische Stellung des Menschen in der animalen Welt begründet.

Wir können dieses Gesammtverhältniss wohl nicht schärfer als mit dem schon von Richard Owen gefundenen Worte: Archencephalie,[1]) Hirnherrschaft, bezeichnen.

---

[1]) Owen, The anatomy of vertebrates. Vol. II, S. 274, 1866: Archencephala, ἄρχω, I overrule; ἐγκέφαλος, brain.

Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten.

Von **Ludwig Boltzmann** in Wien.

(*Eingelaufen 5. Januar.*)

Wenn ich in meiner kurzen Notiz über den Beweis des Maxwell'schen Geschwindigkeitsvertheilungsgesetzes[1]) von einer Ungenauigkeit in der Darstellung in Kirchhoff's Vorlesungen über Wärmetheorie sprach, so meinte ich damit nicht die Redaktion derselben durch Herrn Planck, sondern den Inhalt des Buches selbst, welches ja wie alle Vorlesungen vornehmlich den Zweck hat, von andern gefundene Sätze in neuer Form darzustellen.

Die Spitze meiner Notiz war überhaupt nicht gegen eine Person, sondern lediglich gegen einen Beweis gerichtet, den ich nicht für beweisend halte. Herr Planck gab demselben nun eine vielversprechende Abänderung.[2])

Sei jedes von den folgenden Bestimmungsstücken Grösse und Richtung der Geschwindigkeit jedes der stossenden Moleküle vor dem Stosse, Richtung der Centrilinie im Momente des Stosses zwischen gewissen unendlich nahen Grenzen eingeschlossen (was wir die Bedingungen A nennen wollen). Dann werden dieselben Bestimmungsstücke nach dem Stosse ebenfalls zwischen gewissen unendlich nahen Grenzen liegen (sagen wir die Bedingungen B erfüllen). Wenn das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten herrscht, so ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit eines Zusammen-

[1]) Diese Sitzungsberichte Bd. 24, Heft 2, Wied. Ann. Bd. 53, p. 955, 1894.

[2]) Diese Sitzungsberichte Bd. 24, Heft 4, November 1894.

stosses, für den die Bedingungen A erfüllt sind, gleich der eines Zusammenstosses, für den sonst genau die Bedingungen B gelten, nur dass die Richtung der Centrilinie umgekehrt, also die Orte der beiden stossenden Moleküle im Moment des Stosses vertauscht sind.

Wenn man aber nicht eine neue Analyse zu Hülfe nimmt, kann man nicht beweisen, dass es nicht noch andere Vertheilungsgesetze gibt, für welche zwar obiges nicht gilt, aber doch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molekül eine gewisse, bestimmt gerichtete Geschwindigkeit durch irgend welche sonst wie immer beschaffene Zusammenstösse verliert, noch immer gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Molekül eine gleiche, gleichgerichtete Geschwindigkeit durch irgend welche Zusammenstösse erhält.[1]) Unter diesen Vertheilungsgesetzen könnten beliebig viele sein, für welche jede Geschwindigkeit gleich wahrscheinlich, wie die gleiche, entgegengesetzt gerichtete wäre. Jede durch die letztern Vertheilungsgesetze dargestellte Zustandsvertheilung würde durch eine plötzliche Umkehrung aller Geschwindigkeiten nicht verändert. Aus einer derartigen Umkehrung auf das dynamische Gleichgewicht gezogene Schlüsse haben oft viel Bedenkliches.[2]) Im vorliegenden Falle aber scheint die Umkehrung in der That alle möglichen Phasen der Zustandsvertheilung wieder in alle Phasen überzuführen und daher die Veränderung der Wahrscheinlichkeit irgend eines Zusammenstosses durch die Umkehrung unmöglich.

---

[1]) für welche also in der Formel 16) meiner „weitern Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen", Wiener Sitzungsberichte Bd. 66, 10. Oct. 1872, das doppelte Integrale verschwindet, ohne dass die Grösse unter dem Integralzeichen für alle Werthe der Variabeln identisch gleich Null ist.

[2]) Vergl. Boltzmann, Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmelehre II, Wiener Sitzungsberichte Band 75, Jänner 1877; Nature, febr. 1895; Culverwell, Burbury, Bryan, Nat. oct.—dec. 1894.

Zur Kenntniss des Befruchtungsvorganges.

Von J. Rückert.

(Eingelaufen 5. Januar.)

Bei einer Untersuchung der sich furchenden Eier von Cyclops strenuus traf ich auf ein eigenthümliches Verhalten der Kerne, das in naher Beziehung zum Befruchtungsvorgang steht und von mir im Folgenden geschildert werden soll.

An die grundlegende Entdeckung O. Hertwig's, dass der wesentliche Vorgang bei der Befruchtung in einer Vereinigung der Kerne der beiden Geschlechtszellen beruht, knüpft sich naturgemäss die weitere Frage nach der Art und Weise dieser Verbindung. Besteht dieselbe in einer völligen Verschmelzung, in einer Vermischung der Substanzen beider Geschlechtskerne oder nur in einer Aneinanderlagerung derselben, derart, dass die von den beiden Erzeugern gelieferten Kernbestandtheile sich innerhalb der Kerne des neuen Organismus selbständig erhalten? Wenn wir von dem sogenannten „ersten Furchungskern" absehen, so spricht der äussere Anschein sehr gegen die letztere Ansicht, denn die Furchungskerne, ebenso wie die Kerne der späteren Embryonalzellen und der fertigen Gewebszellen, erweisen sich, soweit man dieselben bis jetzt kennt, als völlig einheitliche Gebilde, welche von einer Zusammensetzung aus 2 Hälften nichts bemerken lassen. So nahmen denn auch O. u. R. Hertwig eine innige Verschmelzung der beiden Geschlechtskerne an und betrachteten dieselbe sogar als einen wesentlichen und nothwendigen Akt bei der Befruchtung. In einer von beiden

Forschern gemeinsam herausgegebenen Schrift[1]) heisst es: „Nur dann, wenn die Substanzen von Ei- und Spermakern sich ganz durchdringen, entstehen Kerne, welche mit allen für die weitere Entwicklung nöthigen Lebenseigenschaften ausgerüstet sind.“ An dieser Auffassung hält O. Hertwig auch noch in einer späteren Arbeit[2]) fest, nur verlegt er hier mit Rücksicht auf van Beneden's Befunde bei Ascaris die Verschmelzung nicht mehr auf den Moment, in welchem die bläschenförmigen Vorkerne zusammentreffen, sondern auf den Zeitraum nach Ablauf der ersten Furchungstheilung.

van Beneden selbst ist hierin anderer Meinung. Aus seiner wichtigen Entdeckung,[3]) dass bei Ascaris megalocephala (bivalens) die Vorkerne, ohne mit einander zu verschmelzen, sich in je zwei Chromosomen umwandeln, von denen bei der ersten Furchungstheilung in jeden Tochterkern eine Spalthälfte gelangt, zog er neben anderen bedeutsamen Schlussfolgerungen auch diejenige, dass in den zwei ersten Furchungskernen die zwei väterlichen und zwei mütterlichen Chromosomen in getrennten Gruppen neben einander sich befinden. Und er vermuthete weiter, dass wie die erste, so sich alle folgenden Kerngenerationen verhalten möchten, d. h. dass auch in ihnen die vom Vater und der Mutter abstammenden Kernsubstanzen sich von einander gesondert erhalten. Er stützte diese Annahme auf die weitere Beobachtung,[4]) dass der Mutter-

---

[1]) O. u. R. Hertwig: Ueber den Befruchtungs- und Theilungsvorgang des thierischen Eies unter dem Einfluss äusserer Agentien. Jena 1887.

[2]) O. Hertwig: Vergleich der Ei- und Samenbildung bei Nematoden. Eine Grundlage für celluläre Streitfragen. Arch. f. m. A., Bd. 36, 1890.

[3]) E. van Beneden: Recherches sur la maturation de l'oeuf, la fécondation et la division cellulaire. Arch. de Biol. T. IV, 1883.

[4]) E. van Beneden et A. Neyt: Nouvelles Recherches sur la fécondation et la division mitosique chez l'Ascaride Mégalocephale. Bull. de l'Acad. roy. de Belgique. 1887.

knäuel in den Furchungskernen von Ascaris meg. bivalens nicht einen continuirlichen Faden bildet, sondern zunächst zwei Fadenstücke, deren jedes alsdann durch Quertheilung zwei Chromosomen liefert. Möglicherweise, so meint van Beneden, entspricht jedes dieser beiden Fadenstücke den zwei Chromosomen eines Vorkerns. Den Beweis dafür konnte er freilich an diesem Object nicht erbringen, und es hat daher die andere Möglichkeit, dass jedes Fadenstück ein väterliches und ein mütterliches Chromosoma enthält, vorläufig ebensoviel Wahrscheinlichkeit für sich. Uebrigens bestreitet Boveri[1]) die letztere Beobachtung van Beneden's und Neyt's entschieden und gibt an, dass die vorübergehende Verbindung je zweier Chromosomen zu einem einzigen, in sich geschlossenen, Faden nur eine scheinbare ist, hervorgerufen durch dichte Aneinanderlagerung derselben. Man kann daher aus van Beneden's Untersuchungen nur folgern, dass die väterlichen und mütterlichen Chromosomen getrennt in das Ruhegerüst der zwei ersten Furchungskerne eingehen, ob sie aber aus diesem als gesonderte Gruppen bei der nächsten Theilung wieder hervortreten, das ist nicht gezeigt. Gerade hierauf aber kommt es an, denn in dem zwischen die zwei Theilungen eingeschobenen feinfadigen Ruhegerüst kann eine Vermischung des väterlichen und mütterlichen Chromatins stattfinden.

Es scheint somit, dass bei Ascaris unsere Frage überhaupt nicht zu lösen ist, denn würden hier zwei den Vorkernen entsprechende Abtheilungen in den Furchungskernen unterscheidbar sein[2]) so wäre dies kaum den vortrefflichen Beobachtern entgangen, die sich gerade mit diesem Objekt

---

[1]) Boveri: Zellenstudien. Heft 2. Jena 1888.

[2]) Nur um diese rein empirisch festzustellende Frage handelt es sich für mich, nicht aber um die von van Beneden damit verknüpfte Ersatztheorie und Lehre vom Hermaphroditismus der Zellkerne. Auch die von Rabl, namentlich aber von Boveri vertretene Ansicht von der Individualität der Chromosomen, der ich

befasst haben. Hingegen dürfte der von mir untersuchte Cyclops strenuus in dieser Hinsicht günstigere Untersuchungsverhältnisse bieten, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Ich fand in der ersten Furchungsspindel dieses Copepoden in derjenigen Phase, in welcher die Tochterplatten auseinanderzuweichen beginnen, die den Vorkernen entsprechenden Chromatinportionen durch einen deutlichen Spalt getrennt. Leider treten die Spindelfasern an meinen mit Sublimat fixirten Objekten nicht so scharf hervor, dass man entscheiden könnte, ob auch die Spindel sich aus zwei solchen Hälften zusammensetzt. Häcker[1]) hat bei Cyclops strenuus eine jüngere Theilungsphase des ersten Furchungskerns, nämlich „den Uebergang aus dem Bläschen- in das Asterstadium" beobachtet und gibt an, dass hier „die Anlagen von zwei gesonderten Kernspindeln mit vier Centrosomen zu bestehen scheinen." Er bildet auch (l. c. Fig. 27a) zwei Spindeln ab, die nur im Bereich des Aequator zusammenhängen, gegen die Pole zu aber weit auseinander liegen. Es wäre von grossem Interesse zu erfahren, ob hier wirklich, wie es den Anschein hat, jeder Vorkern seine eigene Spindel bildet. Auf Grund meines jetzigen Materials kann ich zu dieser Frage keine bestimmte Stellung einnehmen, denn wenn die von mir beobachteten älteren Spindeln überhaupt aus zwei scharf gesonderten Hälften bestehen, dann sind die letzteren

---

mich selbst mit angeschlossen habe, berührt sich zwar mit der vorliegenden Frage, deckt sich aber mit ihr keineswegs. Denn es wäre einerseits möglich, dass die Vorkerne sich selbständig erhalten, die Chromosomen innerhalb derselben aber nicht, eine Anschauung, die van Beneden vertritt. Aber auch das Umgekehrte wäre denkbar: es brauchen sich die Chromosomen nicht aufzulösen, aber sie könnten sich doch derartig untereinander verlagern und vermengen, dass die den Vorkernen entsprechenden Gruppen alsbald verloren gehen.

[1]) Häcker: Die Eibildung bei Cyclops und Canthocamptus. Zool. Jahrb. A. f. A. u. O., Bd. V.

doch sicher mit ihren Polen viel dichter aneinander gerückt als in Häcker's Figur. Die Attraktionssphären allerdings erscheinen hier, sowie auch in den folgenden Furchungstheilungen von auffallender Breite, so dass der Gedanke aufkommen könnte, sie möchten aus je zwei nebeneinander gelegenen Sphären hervorgegangen sein. Andererseits darf aber nicht unerwähnt bleiben, dass ich in dem Befruchtungsstadium, in welchem die noch bläschenförmigen Vorkerne sich berühren, im Ganzen stets nur zwei Sphären fand, für jeden Theilungspol eine einzige, und dass ich diese genetisch auf den Spermakern zurückverfolgen konnte.

Nachdem die Tochterplatten der ersten Furchungsspindel gegen die Pole der Theilungsfigur gerückt sind, finde ich in ihnen die väterlichen und mütterlichen Chromosomengruppen noch weiter von einander getrennt als vorher. Da die Verbindungsfäden sich nur zwischen den correspondirenden Hälften der Tochterplatten ausspannen, so erscheint bei Seitenansicht auch dieser mittlere Abschnitt der Theilungsfigur durch einen breiten Spalt in zwei Hälften zerlegt. Bei Polansicht lassen sich in jeder Hälfte einer Tochterplatte 11 oder 12 Chromosomen zählen, nicht 4, wie Häcker für die Aequatorialplatte der ersten Theilung von Cyclops strenuus angibt und abbildet. Im Ganzen enthält also jede Tochterplatte des ersten Furchungskernes die Normalzahl von 22 oder 24 Chromosomen, was mit den von mir[1]) bei der Eireifung gefundenen Zahlenverhältnissen übereinstimmt.

Wenn dann weiterhin das Chromatin der Tochterplatten sich in ein Ruhegerüst umwandelt, tritt eine Anzahl bläschenförmiger Unterabtheilungen auf, die anfänglich offenbar den einzelnen Chromosomen des Dyasters entsprechen, wie dies schon für die Furchungskerne bei anderen Objekten wiederholt beschrieben wurde. Die Bläschen beginnen schon früh-

[1]) Rückert: Zur Eireifung bei Copepoden. Anat. Hefte 1894.

zeitig zu confluiren und zwar innerhalb ein und desselben Kerns in ungleichem Tempo. So möchte ich es wenigstens erklären, dass man neben kleineren, meist peripher gelegenen Bläschen in der Regel auch einige grössere antrifft, welche häufig durch vollständige oder unvollständige Scheidewände wieder in Unterabtheilungen zerlegt erscheinen. Indem schliesslich alle Abtheilungen zusammenfliessen und die unregelmässigen Vorbuchtungen und Zerklüftungen der Kernoberfläche verschwinden, tritt eine einheitliche Kernblase auf. Bei diesem Vorgang, der nicht nur nach Ablauf der ersten, sondern auch der späteren Furchungstheilungen zu beobachten ist, macht sich die Zusammensetzung des Kerns aus zwei Hälften bemerkbar. Zwar rücken die den Vorkernen entsprechenden Abtheilungen jetzt dicht zusammen, aber man kann sie bei einigermassen günstiger Lagerung des Kerns doch noch recht deutlich unterscheiden, namentlich bei Anwendung schwächerer Vergrösserung, bei welcher man einen besseren Ueberblick über den gesammten Kern erhält als mit Hilfe der Immersion. Wenn die erwähnten Unterabtheilungen des Kerns schon confluirt sind, und ein einheitliches Ruhegerüst aufgetreten ist, lässt sich die Grenze der beiden ursprünglichen Kernhälften in Gestalt einer Scheidewand noch erkennen, welche senkrecht zum grössten Durchmesser des länglichen Kerns steht. Diesen Zustand der beiden ersten Furchungskerne hat Häcker (l. c.) schon bei Cyclops tenuicornis gesehen und dahin gedeutet, dass die zwei Abtheilungen des Kerns selbständig gebliebene Abkömmlinge der Geschlechtskerne seien. Solange die vorausgegangenen Theilungsphasen nicht bekannt waren, konnte man die Berechtigung dieser Auffassung anzweifeln, nachdem sich aber jetzt bei Cyclops str. die beiden Kernhälften an einer lückenlosen Entwicklungsserie von der ersten Furchungsspindel bis zur Ruhephase der Tochterkerne haben verfolgen lassen, erscheint dies nicht mehr möglich.

Aus der Ruhephase der zwei ersten Furchungskerne konnte ich nur wenige Eier untersuchen, die demselben Thier angehören und sich daher auch in genau dem gleichen Entwicklungszustand befinden. Ich kann daher nicht sagen, ob im weiteren Verlauf der Ruhephase die Trennung der beiden Kernhälften aufgehoben wird. Sicher aber ist, dass beim Uebergang zum Knäuel der zweiten Theilung von einer Scheidewand innerhalb des Kernraumes an meinen Präparaten nichts mehr zu sehen ist. Nur an der Kernmembran fand ich bei einem Theil der Objekte an der betreffenden Stelle noch eine Einkerbung. Der Chromatinknäuel selbst erscheint bei einigen Kernen einheitlich, bei anderen in zwei Hälften zerlegt. Das Gleiche gilt für die Aequatorialplatte der zweiten Furchungsspindel. Im Dyaster hingegen liess sich wieder die Zusammensetzung der länglichen Tochterplatte aus zwei Hälften in der Mehrzahl der Kerne mit aller Deutlichkeit erkennen. Es ist offenbar in dieser Theilungsphase ein Auseinanderweichen der Kernhälften leichter möglich, als in der Aequatorialplatte, was sich aus der Mechanik des Theilungsvorganges erklären lässt. Auch im Dyaster der zweiten Furchungstheilung war ich im Stande, bei Polansicht das oben mitgetheilte Zahlenverhältniss der Chromosomen für beide Hälften der Tochterplatte festzustellen, so dass die Ableitung der letzteren von den Vorkernen nicht bezweifelt werden kann. Es wird hierdurch die eingangs aufgestellte Frage, ob aus den Ruhekernen der ersten Theilung die väterlichen und mütterlichen Chromosomen wieder in getrennten Gruppen hervorgehen können, in bejahendem Sinne entschieden.

Von der dritten Theilung habe ich den Dyaster nicht zu Gesicht bekommen, doch konnte ich im Mutterknäuel und in der Aequatorialplatte für einen Theil der Kerne noch ebenso eine Zusammensetzung aus zwei Hälften nachweisen wie bei der zweiten Theilung. In den folgenden Furchungs-

stadien wird diese Erscheinung während der eigentlichen Theilungsphasen immer seltener, und nur noch beim Uebergang zur Ruhephase treten die Kernhälften in der oben beschriebenen Weise hervor. Oft sieht man ausser der Scheidewand auch an der Oberfläche der länglichen Kerne eine Einschnürung, wodurch das ganze Gebilde Bisquit- resp. Bohnenform erhält. Diese Einkerbung bleibt, nachdem die Scheidewand geschwunden, oft noch als einziges Merkmal der ursprünglichen Trennung erhalten. Zuweilen erscheint auch die eine Kernhälfte intensiver gefärbt als die andere, offenbar weil ihr Chromatin sich noch im Zustande stärkerer Concentration befindet. Da diese Doppelkerne sich im Wesentlichen noch ebenso verhalten, wie diejenigen, welche nach Ablauf der ersten und zweiten Theilung auftreten, so müssen sie auch in dem gleichen Sinne wie jene gedeutet werden. Der Umstand, dass während der mittleren Furchungsstadien die Duplicität der Kerne bloss bei Eintritt der Kernruhe, in den eigentlichen Theilungsphasen dagegen nur mehr ausnahmsweise sichtbar ist, beweist nichts gegen die vorgetragene Auffassung. Es lässt sich vielmehr diese Erscheinung in ungezwungener Weise damit erklären, dass die Chromosomen innerhalb der karyokinetischen Figuren zu dieser Zeit schon dichter gelagert sind, als während der ersten Theilungen, ein Verhalten, das offenbar auf die zunehmende Verkleinerung des Zellenleibes und die dadurch bedingte Raumbeengung zurückzuführen ist.

In späten Furchungsstadien und während der Keimblätterbildung weist ein immer kleiner werdender Bruchtheil der im Ei vorhandenen Kerne eine Zusammensetzung aus zwei Hälften auf. Doch konnte ich vereinzelte solcher Kerne soweit verfolgen, als ich meine Untersuchungen überhaupt ausgedehnt habe, nämlich bis zu dem Stadium der dreigliedrigen Larvenanlage. Es muss daher die Möglichkeit zugegeben werden, dass schon während der Furchung eine

totale Verschmelzung und Vermischung der beiden ursprünglichen Kernhälften eintritt, wenigstens bei einem Theil der Kerne, während bei den übrigen dieser Vorgang erst später einsetzen würde. Mindestens ebenso berechtigt erscheint aber die gegentheilige Auffassung. Nur während der ersten Furchungszeit theilen sich sämmtliche Kerne des Eies gleichzeitig, später dagegen nur mehr ein Theil derselben und dieser Bruchtheil wird immer geringer, je weiter die Entwicklung fortschreitet. Man darf daher gar nicht voraussetzen, in vorgerückteren Entwicklungsstadien eine grössere Anzahl von Kernen in dem für unsere Untersuchung geeigneten Zustand anzutreffen. Dafür muss man aber erwarten, einige wenige derselben in einem jeden derartigen Ei vorzufinden. Man begegnet aber auch hier bei genauerem Zusehen wohl stets einigen Kernen, welche die Spuren einer Zusammensetzung aus zwei Stücken erkennen lassen.

Es sind mehrere Forscher darauf ausgegangen, der Zelle einen bilateral symmetrischen Bau zu vindiciren, indessen haben derartige Versuche sich bisher als nicht durchführbar erwiesen. Die bei Cyclops vorhandenen Doppelkerne zeigen nun eine bilaterale Symmetrie. Und wenn die Zusammensetzung des Kerns aus zwei Hälften während der Mitose sichtbar ist, was für die ersten Furchungstheilungen von Cyclops gilt, dann liegt eine bilaterale Symmetrie der gesammten Zelle vor, von dem Augenblicke an, in welchem die Einstellung der Chromosomen in den Aequator der Spindel vollendet ist. Die Symmetrieebene schneidet die Aequatorialplatte resp. die Tochterplatten in einem Winkel von 90° und theilt sie in zwei Hälften, deren eine vom männlichen, deren andere vom weiblichen Vorkern abstammt.

Die mitgetheilten Beobachtungen beziehen sich nur auf embryonale Zellen. Es wäre von Interesse zu wissen, ob sie auch für die Gewebszellen des fertigen Thieres Geltung besitzen. Eine Untersuchung in dieser Richtung verspricht

indess von vornherein wenig Erfolg wegen der geringen Grösse der betreffenden Kerne; ist doch schon die Beurtheilung der älteren Embryonalstadien aus diesem Grunde sehr erschwert. Im ausgebildeten Thier existirt nur eine einzige Art von Zellen, in welchen das Chromatin innerhalb eines verhältnissmässig sehr grossen Kernraumes liegt; es sind das die reifenden Eizellen. Wenn sich die väterlichen und mütterlichen Chromosomengruppen bis in diese Zellgeneration selbständig erhalten würden, dann könnten sie hier, wo sie einer räumlichen Beengung nicht mehr unterworfen sind, auch gesondert zum Vorschein kommen und zwar von dem Zeitpunkt ab, in welchem die kurzen und compacten Chromosomen der ersten Richtungsspindel aus dem feinfadigen Keimbläschengerüst hervorgegangen sind. In der That zeigen nun bei Cyclops diese Chromosomen, wenn sie aus der Peripherie des Keimbläschens gegen den Aequator der zukünftigen Richtungsspindel vorrücken, eine Gruppirung, die sehr auffallend ist und schon von Häcker und später mir selbst erwähnt und abgebildet wurde, ohne dass jedoch einer von uns sie zu der vorliegenden Frage in irgend welche Beziehung gebracht hätte. In mehreren seiner Arbeiten stellt Häcker[1]) Keimbläschen dar, in deren Peripherie, an zwei gegenüberliegenden Punkten, sich eine Anhäufung von vier chromatischen Doppelstäben befindet. Dass diese Gruppirung der Chromosomen in Häcker's Präparaten eine sehr reguläre gewesen sein muss, geht nicht nur aus seinen Abbildungen sondern auch aus der Deutung hervor, welche er der Erscheinung gab. Er betrachtete die 2 Gruppen als die Tochterplatten der eben vollzogenen Richtungstheilung, eine Auffassung, die, wie ich an anderer Stelle (l. c.) gezeigt habe,

---

[1]) l. c. Fig. 22. Derselbe: Das Keimbläschen, seine Elemente und Lageveränderungen. I. Arch. f. m. A. Bd. 41. Fig. 11. Derselbe: Die Kerntheilungsvorgänge bei der Mesoderm- und Entodermbildung von Cyclops. Ibidem Bd. 39, Fig. 31.

schon desshalb nicht richtig ist, weil die erste Richtungstheilung in dem fraglichen Stadium sich erst vorbereitet. Ich selbst[1]) habe mir diese Gruppenbildung der Doppelstäbe, die übrigens an meinen Objekten zahlreichen individuellen Schwankungen unterliegt, früher nicht erklären können. Nachdem sich aber jetzt herausgestellt hat, dass sich in den Kernen der befruchteten Cyclopseier zwei den Vorkernen entsprechende Abtheilungen über eine Anzahl von Furchungstheilungen hinaus gesondert erhalten können, liegt es nahe, die räthselhaften Chromosomengruppen des reifenden Eies auf diese Abtheilungen zu beziehen. Das Zusammentreffen der beiden Erscheinungen ist jedenfalls ein so auffälliges, dass man es nicht unberücksichtigt lassen darf. Auf der andern Seite muss aber ausdrücklich betont werden, dass die Gruppenbildung individuell variirt. Dass eine Gruppe wieder in Unterabtheilungen aufgelöst sein kann, scheint mir weniger von Belang, wenn dies Verhalten auch zu Beginn des betreffenden Reifungsstadiums die Orientirung oft erschwert und zuweilen unmöglich macht. Mehr in Betracht kommt das Zahlenverhältniss zwischen beiden Hauptgruppen. Zu Anfang des Stadiums ist die Zählung der Doppelstäbe schwierig, und kann ich daher nicht angeben, ob die Gesammtzahl derselben im Keimbläschen 11 oder 12 beträgt. Wenn die Einstellung in den Aequator der Spindel fast vollendet ist, finde ich stets 11. Nur bei einem Theil dieser Eier stehen die beiden Gruppen in dem Verhältniss von 5 : 6, bei anderen fand ich 4 : 7 und sogar 3 : 8. Man müsste also, wenn man die Gruppen auf die ursprünglichen Kernhälften bezieht, jedenfalls die Möglichkeit zulassen, dass in individuell wechselnder Weise einzelne Chromosomen aus der einen Gruppe sich loslösen und sich der anderen anschliessen. Ohne auf die Consequenzen einzugehen, welche sich hieraus für den Reductions-

---

[1]) l. c. Fig. 12 und 15.

vorgang ergeben würden, möchte ich doch zu erwähnen nicht unterlassen, dass gerade die berührten individuellen Differenzen sich mit einer Vererbungsthatsache (Ungleichheit der successiven Kinder eines Elternpaares) in Einklang setzen liessen, welche von mehreren Forschern (Weismann, Boveri) mit der Chromosomenreduction in Verbindung gebracht wird. Durch welche Einrichtungen in der Kernstruktur die Gruppenbildung hervorgerufen oder erhalten wird, ob durch achromatische, nicht sichtbare Verbindungsfäden zwischen den zusammengehörigen Chromosomen oder durch ein Eingreifen entsprechend angeordneter Spindelfasern, ist vorläufig nicht zu ermitteln.

Ueber den Cauchy'schen Integralsatz.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 7. Januar.)

Der Satz, dass ein über eine complexe Werthenreihe ausgedehntes Integral von der Form $\int_{z_0}^{z} f(z) \cdot dz$ unter gewissen Bedingungen von der Wahl der zwischen z_0 und z gelegenen Zwischenwerthe, dem „Integrationswege“, unabhängig ist, oder, was im Wesentlichen dasselbe besagt, dass unter analogen Bedingungen das Integral $\int f(z) \cdot dz$, erstreckt über einen geschlossenen Integrationsweg, verschwindet, wird wohl ziemlich allgemein schlechthin als der Cauchy'sche Integralsatz bezeichnet und zwar wohl nicht lediglich darum, weil er von Cauchy zuerst ausgesprochen und bewiesen wurde[1]) (denn so verstanden gibt es eine ganze Anzahl Cauchy'scher Integralsätze), sondern weil er als die eigentliche Grundlage der modernen

[1]) Soviel mir bekannt ist, in dieser Form zum ersten Male in dem 1825 als besonderes Heft herausgegebenen „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires“, § 3. — In Laurent's Traité d'Analyse (T. III, p. 257) und Kronecker's Vorlesungen über Integrale (p. 52) wird das Jahr 1814 als Publicationsjahr angegeben. Obschon dieser Bemerkung eine nähere Quellenangabe nicht beigefügt ist, so lässt sich doch mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass dieselbe auf das im Jahre 1814 der Pariser Akademie vorgelegten „Mémoire sur les intégrales définies“ (Oeuvres complètes, T. I, p. 399—506) zurückzuführen sein dürfte. Sollte dies aber wirklich der Fall sein, so muss jene Angabe als

Functionentheorie im Cauchy-Riemann'schen Sinne ohne jeden Vorbehalt eine der bewunderungswürdigsten und frucht-

---

unrichtig oder vielmehr als nur theilweise richtig bezeichnet werden. In der eben erwähnten Abhandlung finden sich nämlich in Bezug auf den fraglichen Gegenstand nur die folgenden Gleichungen (mit unerheblichen, zum Zwecke leichteren Verständnisses hier vorgenommenen Aenderungen der dort angewandten Bezeichnung):

$$\int_0^x S(\xi, y) \cdot d\xi - \int_0^x S(\xi, 0) \cdot d\xi = \int_0^y U(x, \eta) \cdot d\eta - \int_0^y U(0, \eta) \cdot d\eta$$

wo S, U Funktionen von ξ, η bezeichnen, welche der Differentialgleichung $\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ genügen (a. a. O. p. 334, Gl. 4), und ferner:

$$\int_0^x f(\xi + y i) \cdot d\xi - \int_0^x f(\xi) \cdot d\xi = i\int_0^y f(x + \eta i) \cdot d\eta - i\int_0^y f(\eta i) \cdot d\eta$$

(p. 340, Fussnote, Gl. B). Diese Gleichungen enthalten allerdings den betreffenden Satz, aber nur für den speciellen Fall eines Rechtecks als Integrationsweg. Die wesentliche Bedeutung des Cauchy'schen Satzes für die Functionentheorie liegt aber gerade in seiner Anwendbarkeit auf einen beliebigen Integrationsweg. Und wenn es auch keine besondere Schwierigkeit hat, aus der Gültigkeit des Satzes für ein Rechteck durch einen geeigneten Grenzübergang jene allgemeinere Form abzuleiten (wie dies z. B. auch in dem hier weiter unten abzuleitenden Beweise geschieht: cf. § 4), so kann doch von einer derartigen Verallgemeinerung überhaupt erst dann die Rede sein, wenn der Begriff eines Integrals von der Form $\int (S \cdot dx + U \cdot dy)$ oder $\int f(z) \cdot dz$, genommen über einen beliebigen Integrationsweg, wirklich definirt ist. Eine solche Definition findet sich aber wohl zum ersten Male in der genannten Abhandlung von 1825 (§ 2 und § 9), wenigstens ist in dem „Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal" vom Jahre 1823 hiervon noch keine Rede, und Cauchy bemerkt auch in der Einleitung zu jener Abhandlung ganz ausdrücklich, dass keine einzige aller bisher erschienenen Arbeiten „den Grad von Allgemeinheit genügend fixirt habe, dessen ein solches Integral fähig ist". Durch die Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Gauss und Bessel (1880) ist die merkwürdige Thatsache bekannt geworden, dass Gauss den fraglichen Satz in seiner allgemeinen Fassung schon im Jahre 1811 kannte. (Brief an Bessel vom 18. December 1811.) Er ist indessen niemals

barsten Entdeckungen des grossen Mathematikers genannt werden darf.

Cauchy bewies den fraglichen Satz mit Hülfe von Continuitätsbetrachtungen: er zeigte, dass bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Integrationscurve mit Festhaltung der Endpunkte das obige Integral nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung geändert wird, oder anders ausgesprochen,[1]) dass die Variation des Integrals den Werth Null hat. Die Beweise, die sich in der Mehrzahl französischer Lehrbücher für jenen Satz finden, sind im Wesentlichen einfache Reproductionen oder Modificationen dieses Cauchy'schen Beweises. Meiner Ansicht nach haftet allen diesen Beweisen, nach dem Maassstabe moderner analytischer Anschauungen gemessen, ein mehr oder weniger erhebliches Manco von überzeugender Strenge an. Entweder sie wenden die Principien der Variationsrechnung, deren strenge Begründung zu den schwierigsten Problemen der Infinitesimalrechnung gehört, mit einer Unbedenklichkeit an, die durch das Maass der gemachten Voraussetzungen kaum gerechtfertigt ist.[2]) Oder sie suchen mit Umgehung der Variations-

wieder darauf zurückgekommen, und es scheint, dass sich auch in seinem Nachlasse keinerlei Aufzeichnungen hierüber vorgefunden haben. Man wird daher wohl Kronecker nur Recht geben können, wenn er hieran anknüpfend a. a. O. folgendes bemerkt: „Es ist doch ein grosser Unterschied, ob Jemand eine mathematische Wahrheit mit vollem Beweise und der Darlegung ihrer ganzen Tragweite veröffentlicht oder ob ein Anderer sie nur so nebenher einem Freunde unter Discretion mittheilt. Desshalb können wir den Satz mit Recht als das Cauchy'sche Theorem bezeichnen."

[1]) a. a. O. p. 6: „Ainsi la démonstration du principe ci-dessus énoncé repose sur cette seule observation, que la variation de l'intégrale est nulle."

[2]) Man sehe z. B. Briot et Bouquet, Fonctions doublement périodiques (1859) p. 20. — Bertrand, Calcul intégral (1870) p. 295. — Laurent, Fonctions elliptiques (1880) p. 6; desgl. Traité d'Analyse (1888) T. III, p. 210. — Picard, Traité d'Analyse (1891/93) T. I, p. 77; T. II, p. 4.

rechnung deren Princip durch eine directe Infinitesimalbetrachtung zu ersetzen, imputiren aber dabei der Function $f(z)$ eine für alle diese Beweise unentbehrliche Eigenschaft ziemlich complicirter Natur, welche entweder ganz direct in die Voraussetzung aufgenommen oder zuvor auf Eigenschaften einfacherer Art zurückgeführt werden müsste. Es ist dies die Annahme, dass der Differenzenquotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z gleichmässig nach $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich eine positive Grösse ϱ angeben lässt, sodass:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon \quad \text{wenn nur:} \quad |h|<\varrho$$

für alle in Betracht kommenden Werthe von z.[1]) Nimmt man diese Eigenschaft ohne weiteres in die Voraussetzung des Satzes auf, so verliert derselbe vollständig seinen einfachen und elementaren Charakter. Man müsste also vor

---

[1]) Ohne diese Annahme fällt z. B. der überhaupt wenig streng gehaltene Beweis bei Camille Jordan, Cours d'Analyse, T. II (1888) p. 275; aber auch der sorgfältiger durchgeführte Beweis von Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques (1875), p. 128—132, und ein mit dem eben genannten nahe verwandter von Mittag-Leffler: Göttinger Nachrichten 1875, p. 65—73. (Ein in dem letztgenannten Aufsatze angeführter, angeblich vollkommen strenger Beweis von Malmsten war mir leider bisher nicht zugänglich, da er nur in schwedischer Sprache erschienen ist (1865)).

Der gleiche Vorwurf trifft auch den anscheinend sehr einfachen Beweis, den Herr Goursat im 4. Bande der Acta mathematica (1884) veröffentlicht hat. Uebrigens wird die scheinbare Kürze dieses Beweises auch noch dadurch ziemlich illusorisch, dass die von vornherein als erwiesen angenommene Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes für $\int dz$, $\int z\,dz$ in Wahrheit eine Grenzbetrachtung erfordert, die nicht wesentlich einfacher ausfällt, als die in § 2 dieses Aufsatzes allgemeiner durchgeführte.

Allem versuchen, dieselbe etwa aus der vorauszusetzenden Stetigkeit[1]) von $f'(z)$ abzuleiten, ein Unternehmen, das, wenn überhaupt durchführbar, zweifellos auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führt, da es sich bei dem obigen Differenzenquotienten in Wahrheit um eine Function von 4 Veränderlichen (nämlich: $z = x + yi$, $h = \xi + \eta i$) handelt.

Eine völlig andere Methode schlug bekanntlich Riemann beim Beweise des in Rede stehenden Satzes ein, indem er denselben auf einen Specialfall des Green'schen Satzes gründete, nämlich auf die Reduction eines über ein gewisses Ebenenstück zu erstreckenden Doppelintegrals von der Form $\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \cdot dy$ auf ein einfaches Integral $\int(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ erstreckt über die Begrenzung.[2]) Dieser Beweis ist ziemlich unverändert in fast alle einschlägigen deutschen Lehrbücher,[3]) aber auch in viele ausländische[4]) übergegangen und wird ganz allgemein ausdrücklich als der „Riemann'sche" Beweis des Cauchy'schen Satzes bezeichnet: wie mir scheint, mit einigem Unrecht. Denn wenn auch

---

[1]) Bei der grossen Mehrzahl der angeführten Beweise wird sogar nur die Endlichkeit, nicht die Stetigkeit von $f'(z)$ vorausgesetzt, wodurch deren Grundlagen noch problematischer werden.

[2]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen etc. (Inauguraldissertation, 1851).

[3]) Man vgl. z. B. die Lehrbücher über Functionentheorie oder elliptische bezw. Abel'sche Functionen von Durège, Thomae, Königsberger, Neumann, sowie die Compendien der Analysis von Schlömilch, Lipschitz, Harnack.

[4]) Man sehe z. B. Houël, Théorie élémentaire des quantités complexes; desgl. Calcul infinitésimal, T. III. — Hermite, Cours d'Analyse (réd. par Andoyer). — Casorati, Teorica delle funzione. — Auch mehrere der schon oben genannten Compendien (Bertrand, Laurent), welche den Beweis neben dem Cauchy'schen ausdrücklich als den Riemann'schen anführen.

derselbe erst durch Riemann's Darstellung allgemeine Verbreitung gefunden hat, so lässt sich doch mit unbestreitbarer Sicherheit nachweisen, dass Cauchy bereits fünf Jahre vor dem Erscheinen der Riemann'schen Dissertation ihn nicht nur gekannt, sondern in der Hauptsache auch publicirt hat. Da ich nach dem Gesagten wohl annehmen darf, dass diese Thatsache bisher völlig unbemerkt geblieben ist, so möchte ich an dieser Stelle folgendes darüber mittheilen:

Im 23. Bande der Comptes Rendus findet sich auf S. 251 eine Note von Cauchy mit dem Titel: „Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée.“ In dieser Note wird zunächst das Integral $(S) = \int k \cdot ds$ erstreckt über die Begrenzung einer Fläche S bei beliebiger Anzahl von Variablen bezw. Dimensionen definirt, alsdann aber heisst es wörtlich folgendermassen (S. 254):

„Lorsque, la surface S étant plane, x, y se réduisent à deux coordonnées rectilignes, ou polaires, ou de toute autre nature, propre à déterminer la position d'un point dans le plan de la surface S, alors, en désignant par X, Y deux fonctions continues des variables x, y et supposant

$$k = X \cdot D_s x + Y \cdot D_s y$$

on a

$$(S) = \pm \int\int (D_y X - D_x Y)\, dx\, dy$$

l'intégrale double s'étendant à tous les points de la surface S.“

Nun folgt eine Bemerkung über die Bestimmung des zweifelhaften Vorzeichens, worauf Cauchy folgendermassen fortfährt:

„Dans le cas particulier où la somme

$$X\,dx + Y\,dy$$

est une différentielle exacte, on a

$$D_y X = D_x Y$$

et la formule qui détermine la valeur de (S) se réduit à l'équation déjà trouvée

$$(S) = 0."$$

Das ist aber in der That ganz genau der fragliche „Riemann'sche" Beweis mit dem einzigen Unterschiede, dass die Rechnung, welche zur Reduction des doppelten Integrals auf das einfache dient, an dieser Stelle nicht mitgetheilt wird.[1]) Cauchy setzt eben diese Reductionsformel einfach als bekannt voraus, und das war sie ja auch damals schon seit längerer Zeit.[2]) Wirklich neu ist nur ihre äusserst sinnreiche Anwendung auf den vorliegenden Fall, deren Priorität man bisher fälschlich Riemann zugeschrieben hat. Riemann selbst hat wohl niemals jenen Beweis als sein specielles Eigenthum in Anspruch genommen, und es erscheint auch relativ bedeutungslos, darüber Vermuthungen anstellen zu wollen, ob er die citirte Note gekannt haben möge oder nicht. Hingegen halte ich es für nicht unwichtig, an dieser Stelle einmal die Frage aufzuwerfen, ob denn

---

[1]) Im Eingange der betreffenden Note theilt Cauchy der Akademie mit, dass er sich an dieser Stelle auf einen kurzen Auszug beschränke, da er die eigentliche Abhandlung demnächst in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique publiciren wolle. Dies ist indessen aus mir unbekannten Gründen unterblieben, und, soviel ich feststellen konnte, ist die angekündigte Abhandlung auch an keiner anderen Stelle gedruckt worden. Hierüber bezw. ob sich dieselbe vielleicht in Cauchy's Nachlasse vorgefunden hat, werden vielleicht die noch im Erscheinen begriffenen Oeuvres complètes Aufklärung bringen.

[2]) Die Abhandlung von Green: „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism", auf welche man ja bekanntlich die fragliche Formel zurückzuführen pflegt, ist schon im Jahre 1828 erschienen.

zwischen den Arbeiten Cauchy's und Riemann's berühmter Dissertation überhaupt kein nachweisbarer Zusammenhang besteht? Es muss doch sicherlich sehr merkwürdig erscheinen, dass der Name Cauchy's in jener Schrift mit keiner Silbe erwähnt wird, wenn man bedenkt, dass zu jener Zeit nicht nur Cauchy nächst Gauss wohl unbestritten als der bedeutendste unter den lebenden Mathematikern galt, sondern dass auch gerade er von seinem ersten Auftreten an einen grossen Theil seiner gesammten literarischen Production ganz speciell der consequenten Einführung der complexen Grössen in die Analysis gewidmet und auf diesem Gebiete damals eine ganze Reihe von Resultaten bereits publicirt hatte, die für die Entwickelung der Functionentheorie in der von Riemann verfolgten Richtung als fundamental anzusehen sind; ich nenne ausser dem hier in Rede stehenden Satze nur die Einführung des Begriffes der monogenen d. h. mit einem von der Differentiationsrichtung unabhängigen Differentialquotienten versehenen Function,[1]) ihre Entwickelbarkeit in Potenzreihen,[2]) die Definition der Periodicitätsmoduln („indices de périodicité") eines Integrals und die hieraus resultirende Periodicität der Umkehrungsfunctionen.[3]) Obschon die Priorität Cauchy's in diesen und einer Reihe daran anknüpfender Fragen wohl niemals ernstlich bestritten worden ist, so erschien es mir

---

[1]) Nouv. Exerc. T. IV p. 346 (1847). Hier findet sich wohl zum ersten Male der Ausdruck „monogen" und dessen Definition durch die Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

[2]) Zuerst in einem 1832 zu Turin herausgegebenen lithographirten Mémoire (wieder abgedruckt 1841 im 2. Bande der Nouv. Exerc. p. 50). In anderer Form: Nouv. Exerc. T. I p. 269 (1840).

[3]) C. R., T. 23 p. 689 (1846). Diese Abhandlung enthält thatsächlich die vollständige Grundlage für die moderne Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen.

dennoch angemessen, bei dieser Gelegenheit einmal ausdrücklich hierauf hinzuweisen, da sich neuerdings eine gewisse Tendenz bemerkbar gemacht hat, die mit Recht ausserordentlich hohe Schätzung der Verdienste Riemann's um die Entwickelung der Functionentheorie bis zur Ueberschätzung auf Kosten nicht minder verdienstvoller Mathematiker auszudehnen.

Lässt sich nun auch gegen die Stichhaltigkeit des zuletzt besprochenen Beweises keine Einwendung machen (falls man noch die Stetigkeit oder wenigstens Integrabilität von $\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ in die Voraussetzung aufnimmt), so scheint mir derselbe in Bezug auf Einfachheit und Natürlichkeit der Methode noch keineswegs denjenigen Anforderungen zu genügen, welche man an den Beweis eines so grundlegenden, gleichsam im Anfange einer ausgedehnten Disciplin stehenden Satzes stellen möchte. Die Herbeiziehung des Doppelintegrals wird, rein methodisch betrachtet, immer als ein nicht hinlänglich zu motivirender Umweg erscheinen und wirkt erfahrungsgemäss bei der Einführung in das Studium der Functionentheorie für den Anfänger äusserst erschwerend.[1])

Ich habe daher versucht, einen neuen und, wie ich glaube, sowohl hinlänglich einfachen, als strengen Beweis abzuleiten,[2]) dessen Mittheilung den Hauptzweck des vorliegenden Aufsatzes bildet. Ich benütze diese Gelegenheit,

---

[1]) Die Schwierigkeit, welche die Ableitung der Green'schen Reductionsformel dem Anfänger zu bereiten pflegt, hat Kronecker (cf. Berliner Sitzungsberichte von 1885 p. 785 und Vorlesungen über Integrale p. 37—41) dadurch zu vermindern gesucht, dass er die fragliche Formel zunächst für ein Dreieck oder ein Rechteck beweist und sodann das allgemeine Resultat mit Hülfe eines Grenzüberganges daraus zusammensetzt.

[2]) Derselbe berührt sich in mancher Beziehung mit den Betrachtungen, welche Herr Thomae über die Integration zweigliedriger Differentialien angestellt hat (s. Einleitung in die

um etwas genauer auf die Definition eines Integrals der Form $\int P \cdot dx + Q \cdot dy$, erstreckt über eine Curve, einzugehen und dabei gewisse Punkte zur Sprache zu bringen, die vielleicht vielfach bekannt, aber meines Wissens noch niemals scharf präcisirt worden sind.

Schliesslich will ich nur noch bemerken, dass die im Folgenden benützten Methoden auch eine Verallgemeinerung für die Betrachtung ein- und mehrfacher Integrale mit mehr als zwei Variablen gestatten, worauf ich vielleicht bei späterer Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

§ 1. Definition und allgemeine Eigenschaften eines Curven-Integrals.

Es sei:

$$\eta = \varphi(\xi) \tag{1}$$

für das Intervall $x_0 \leq \xi \leq x$ eine eindeutige und stetige Function von ξ und zwar insbesondere:

$$\varphi(x_0) = y_0 \qquad \varphi(x) = y,$$

ferner $P(\xi, \eta)$ eine gleichfalls eindeutige und stetige Function von (ξ, η) für alle Werthe ξ des genannten Intervalles und die durch Gl. (1) zugeordneten Werthe von η. Alsdann hat das bestimmte Integral:

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\xi$$

einen festen endlichen Werth und soll bezeichnet werden als das Integral von $P(\xi, \eta) \cdot d\xi$, genommen über den Integrationsweg C in der Richtung $x_0 \ldots x$, in Zeichen:

Theorie der bestimmten Integrale p. 36 ff.). Doch wird daselbst von einer Definition des unbestimmten Integrals von $(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ ausgegangen, wodurch die ganze Beweisführung sehr wesentlich an Einfachheit und Durchsichtigkeit verliert.

$$\int_{(+C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\xi$$

wenn C diejenige Punktreihe bedeutet, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ bezogen auf irgend ein Coordinatensystem — etwa, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, ein gewöhnliches rechtwinkeliges — entspricht, während die Bezeichnung $(+C)$ andeuten soll, dass diese Punktreihe bei der Integration in der Richtung der wachsenden x durchlaufen werden soll. Wir pflegen diese Punktreihe schlechthin als Integrations-Curve und das betreffende Integral als ein Curven-Integral zu bezeichnen, obschon hierbei keineswegs stets an eine „eigentliche" Curve d. h. eine im allgemeinen mit einer bestimmten Tangente versehene stetige Linie zu denken ist: denn thatsächlich genügt für die Existenz des obigen Integrals die blosse Stetigkeit von $\varphi(\xi)$, ohne dass man genöthigt wäre, über das Vorhandensein eines im Allgemeinen bestimmten, endlichen Differentialquotienten irgendwelche Voraussetzung zu machen.[1])

Bezeichnet man mit $(-C)$ die nämliche Curve, falls die Integration in der entgegengesetzten Richtung vorge-

---

[1]) Gerade aus diesem Grunde gebe ich dem hier eingeschlagenen Wege den Vorzug vor dem fast allgemein üblichen, wobei das Integral zunächst als Grenzwerth einer Summe definirt und sodann dessen Existenz mit Hülfe einer Parameterdarstellung von der Form:

$$\xi = \varphi(t) \qquad \eta = \psi(t)$$

nachgewiesen wird. Bei diesem Verfahren ist die Voraussetzung eines integrablen Differentialquotienten $\varphi'(t)$ und ebenso für das sogleich noch einzuführende Integral $\int_{(c)} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta$ die analoge Voraussetzung bezüglich $\psi'(t)$ unerlässlich, was mir aus dem Grunde wenig wünschenswerth erscheint, weil hierdurch die Vorstellung von dem Zustandekommen eines solchen Integrals nicht nur eine zu eng begrenzte, sondern in gewissem Sinne geradezu eine principiell unrichtige wird, wie später noch des näheren erörtert werden soll.

nommen wird, so folgt ohne Weiteres aus der obigen Definition, dass:

$$(3) \qquad \int_{(-C)} P(\xi, \eta) \cdot d = -\int_{(+C)} P(\xi, \eta)\, d\,\xi$$

und ferner, wenn man die Curve C in eine beliebige Anzahl, in dem gleichen Sinne wie C zu durchlaufender Theilcurven c_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegt denkt:

$$(4) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \sum_1^n {}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi.$$

Schliesslich erkennt man auch, dass das Integral (2) einer ganz analogen Mittelwerthrelation genügt, wie die gewöhnlichen bestimmten Integrale einer Veränderlichen, nämlich:

$$(5) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = P(\xi', \eta') \cdot (x - x_0)$$

wo (ξ', η') ein passendes Werthepaar aus dem Gebiete:

$$x_0 \leqq \xi \leqq x \qquad \eta = \varphi(\xi),$$

also einen gewissen Punkt der Curve C bedeutet. Diese Beziehung lehrt insbesondere, dass der Integralwerth gleichzeitig mit $(x - x_0)$ gegen Null convergirt (d. h. zunächst immer unter der Voraussetzung, dass $\eta = \varphi(\xi)$ eine eindeutige Function).

Hat die Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ die specielle Form $\eta = y_0$, wo y_0 eine Constante bedeutet, d. h. reducirt sich die Curve C auf eine zur X-Axe parallele Gerade, so folgt ohne Weiteres aus der Definition, dass:

$$(6) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\,\xi$$

wird. Dagegen ist der Fall, dass C sich auf eine Parallele zur Y-Axe reducirt, in der oben gegebenen Definition nicht enthalten. Denkt man sich jedoch als Integrationscurve C

zunächst eine beliebige andere Gerade $\overline{x_0 x}$, so lehrt der Mittelwerthsatz (5), dass der betreffende Integralwerth beliebig klein wird, sobald die Neigung der Geraden gegen die Y-Axe der Null zustrebt, und man wird daher der bisher gegebenen Definition noch die Gleichung:

$$(7) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = 0$$

als consequente Erweiterung hinzuzufügen haben, für den Fall, dass die Curve C in die fragliche Verticale übergeht.

Die Gl. (4) kann sodann dazu dienen, um den vorliegenden Integralbegriff auf solche Fälle auszudehnen, in denen $\eta = \varphi(\xi)$ eine mehrdeutige stetige Function von ξ darstellt, sofern dieselbe nur der Beschränkung unterworfen wird, dass sich das Intervall $(x_0\, x)$ in eine endliche Anzahl theilweise oder gänzlich sich überdeckender Intervalle $(x_0 x_1) \cdots (x_{\lambda-1}\, x_\lambda) \cdots (x_{n-1}\, x_n)$[1]) umformen lässt, für welche dann die Gl. $\eta = \varphi(\xi)$ ersetzt werden kann durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$(8a) \qquad \begin{cases} \eta = \varphi_1(\xi) & \text{für:} \quad x_0 \leq \xi \leq x_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \eta = \varphi_\lambda(\xi) & \qquad x_{\lambda-1} \leq \xi \leq x_\lambda \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \eta = \varphi_n(\xi) & \qquad x_{n-1} \leq \xi \leq x, \end{cases}$$

wo jetzt $\varphi_1(\xi)$ durchweg eindeutige Functionen bedeuten. Hierbei ist noch zulässig, dass für eine endliche Anzahl von Werthen x_μ die Variable η in der Weise unendlich vieldeutig wird, dass sie bei constantem $\xi = x_\mu$ eine continuirliche Werthenreihe $y_\mu \cdots y'_\mu$ durchläuft (geometrisch gesprochen, dass einzelne Stücke der Integrationscurve C aus

[1]) Dabei kann also insbesondere $x_{\lambda-1}$ beliebig oft mit x_0, desgl. x_λ mit x zusammenfallen.

aus verticalen Geraden bestehen), sodass also zu den Gleichungen (8a) noch eine endliche Anzahl von Beziehungen der Form:

$$(8\text{b}) \qquad y_\mu \leqq \eta \leqq y'_\mu \qquad \text{für:} \quad \xi = x_\mu$$

hinzutreten würde.

Eine Function $\eta = \varphi(\xi)$, welche den ebengenannten Bedingungen genügt, soll in Zukunft nach bekannten Analogien als abtheilungsweise eindeutig bezeichnet werden.

Bedeutet dann wiederum C diejenige Curve, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ zugehört, c_ν diejenigen Theilcurven, welche den Beziehungen (8a) und (8b) entsprechen, so soll die Definitionsgleichung gelten:

$$(9) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n {}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi$$

sofern als Integrationsrichtung für die einzelnen Curven c_ν diejenige festgehalten wird, welche sich bei stetiger Durchlaufung der Gesammtcurve C in dem einmal vorgeschriebenen Sinne ergibt.

Die Gl. (9) kann ferner auch zur Definition des fraglichen Integrals dienen, falls die bisher auf (C) als durchweg stetig angenommene Function $P(\xi, \eta)$ in $x_1, x_2, \cdots x_n$ endliche Unstetigkeiten besitzt, und es hat keine Schwierigkeit diese Definition, nach genau denselben Principien, wie für Integrale der Form $\int_{x_0}^{x} f(\xi) \cdot d\xi$, auf den Fall auszudehnen, dass jene Stellen $x_1, x_2, \cdots$ gewisse unendliche (sog. unausgedehnte) Punktmengen bilden: hierauf soll indessen nicht näher eingegangen werden, da eine derartige Betrachtung mir keinerlei besonderes Interesse zu bieten scheint.[1])

[1]) Auch übergehe ich hier den Fall, dass $P(\xi, \eta)$ an einzelnen Stellen unendlich gross wird, und verweise in dieser Hinsicht auf die allgemein übliche Behandlungsweise.

Es bedeute nun ferner $\xi = \psi(\eta)$ eine für das Intervall $y_0 \leq \eta \leq y$ stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Function von η, $Q(\xi, \eta)$ eine für die eben genannten Werthe (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Function von (ξ, η), so ist aus dem zuvor gesagten vollständig klar, was unter einem Integral von der Form:

$$\int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta$$

zu verstehen ist, falls C' die der Gl. $\xi = \psi(\eta)$ zugehörige Curve bedeutet, und man erkennt ohne Weiteres, dass dieses Integral ganz analogen Gesetzen gehorcht, wie das unmittelbar zuvor betrachtete. Insbesondere wird:

$$(10) \qquad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta$$

$$\text{bezw.} \quad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = 0,$$

falls sich die Integrationscurve C' auf die zur Y-Axe parallele Gerade $\xi = x_0$, bezw. auf irgend eine Parallele zur X-Axe reducirt.

Man habe nun schliesslich gleichzeitig:

$$(11) \qquad \begin{cases} \eta = \varphi(\xi) & \text{für: } x_0 \leq \xi \leq x \\ \xi = \psi(\eta) & \text{für: } y_0 \leq \eta \leq y \end{cases}$$

(sodass also ψ die inverse Function von φ — vice versa), wo $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ in dem bezeichneten Umfange durchweg stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Functionen ihrer Argumente bedeuten. Ferner seien $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ zwei für sämmtliche durch die Bedingungen (11) definirten Werthepaare (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Functionen von (ξ, η). Alsdann definiren wir:

$$(12)\quad \int_{(C)}(P(\xi,\eta)\cdot d\,\xi + Q(\xi,\eta)\cdot d\,\eta) = \int_{(C)} P(\xi,\eta)\cdot d\,\xi + \int_{(C)} Q(\xi,\eta)\cdot d\,\eta,$$

falls C die durch jede der beiden Gleichungen (11) dargestellte, jedesmal in demselben Richtungssinne zu nehmende Curve bedeutet. Dabei lässt sich die auf die Stetigkeit und Eindeutigkeit der beiden Functionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\eta)$ bezügliche Voraussetzung leicht so umformen, dass schliesslich nur von irgend einer dieser beiden Functionen darin die Rede ist. Damit nämlich die im Intervalle $x_{\nu-1} \leqq \xi < x_\nu$ eindeutige und stetige Function $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ eine im Intervalle $y_{\nu-1} = \varphi(x_{\nu-1})$ bis $y_\nu = \varphi(x_\nu)$ eindeutige und stetige Umkehrung $\xi = \psi_\nu(\xi)$ besitze, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ mit wachsenden Werthen von ξ monoton zu- oder abnehme — vice versa. Hiernach lässt sich aber die oben ausgesprochene Bedingung einfacher folgendermassen formuliren: Es muss eine der beiden Functionen $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ stetig, endlich-vieldeutig und abtheilungsweise monoton sein — wobei nach dem früher Gesagten η oder ξ für eine endliche Anzahl endlicher Intervalle auch constant sein darf.

Wenn in Zukunft von einem „beliebigen" Integrationswege die Rede ist, so soll immer ein solcher darunter verstanden werden, welcher die eben näher bezeichneten Eigenschaften besitzt. Dabei sei aber auch hier wieder ganz ausdrücklich hervorgehoben, dass die obigen Bedingungen wiederum noch keinerlei Voraussetzung bezüglich der Existenz von $\varphi'(\xi)$ bezw. $\psi'(\eta)$ involviren. Denn es gibt thatsächlich stetige und beständig monoton zu- oder abnehmende Functionen (also auch ohne sog. Invariabilitätszüge), die nichtsdestoweniger für unendlich viele Stellen jedes Intervalles (z. B. alle rationalen) entweder unendlich grosse oder überhaupt keine bestimmten Differentialquotienten be-

sitzen.[1]) Mir scheint dies insofern von Interesse, als von der Existenz eines zum Mindesten integrablen Differentialquotienten $\varphi'(\xi)$, oder genauer gesagt von der Integrabilität des Ausdruckes $\sqrt{1+\varphi'^2(\xi)}\cdot d\xi$, die Existenz einer bestimmten Bogenlänge der Curve in dem gewöhnlich acceptirten Sinne[2]) abhängt, und sich hiernach die, wie ich glaube, ziemlich vielfach verbreitete, auf der üblichen Parameterdarstellung der Integrationscurve beruhende Annahme als irrig erweist, dass die Existenz eines bestimmten Werthes für ein Curvenintegral wesentlich mit derjenigen einer bestimmten Bogenlänge (Rectificirbarkeit) der Integrationscurve zusammenhänge. Wie die hier angestellte Betrachtung zeigt, ist die Existenz einer bestimmten Bogenlänge für das Integral völlig belanglos. Weiterhin wird sich aber auch noch ergeben, dass in Fällen, wo eine solche Bogenlänge existirt, ihr Werth auf denjenigen des Integrals $\int\limits_{(C)} P\cdot d\xi + Q\cdot d\eta$ überhaupt keinen merklichen Einfluss ausübt, genauer gesagt, dass Curven mit angebbarer, endlicher Längedifferenz Integrale liefern können, deren Werthe einander beliebig nahe kommen (NB. ohne dass über $P(\xi,\eta)$, $Q(\xi,\eta)$ irgendwelche weitere Voraussetzung gemacht wird).

------

1) s. z. B. Cantor, Condensation der Singularitäten. Math. Ann. Bd. 19, p. 591. Ferner: Dini, Theorie der Functionen etc., übers. von Lüroth-Schepp, § 112*. Ein anderer Typus von derartigen Functionen: ebendaselbst § 132.

2) cf. Du Bois-Reymond, Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Var.-Rechnung. Math. Ann. Bd. 15, p. 285. Bekanntlich hat Scheeffer (Acta math. Bd. 5, p. 50) für den Fall der Nichtexistenz von $\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$ eine erweiterte Definition der Bogenlänge gegeben. Doch lassen sich dagegen Einwendungen erheben (cf. Du Bois-Reymond, Acta math. Bd. 6, p. 167), welche bisher nicht widerlegt worden sind.

§ 2. Angenäherte Darstellung eines beliebigen Curvenintegrals durch ein sogenanntes Treppenintegral.

Eine gebrochene, beliebig auf- und absteigende Linie, deren Stücke den Coordinatenaxen wechselsweise parallel laufen, soll im Folgenden schlechthin als eine Treppe und, falls der Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, als eine geschlossene Treppe oder als ein Treppenpolygon bezeichnet werden. Ein Integral, dessen Integrationsweg eine solche Treppe ist, soll dann kurz ein Treppenintegral heissen.

Es sei nun S diejenige Treppe, welche durch die Eckpunkte:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_0),\ (x_1, y_1), \cdots\ (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (x_n, y_{n-1}),\ (x_n, y_n)$$

bestimmt wird, so hat man mit Benützung der Gleichungen (6), (7), (10) offenbar:

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi &= \sum_1^n {}_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\xi \\ \int_{(S)} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta &= \sum_1^n {}_\nu \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x_\nu, \eta) \cdot d\eta. \end{aligned} \right.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass sich jedes Curvenintegral mit beliebig vorzuschreibender Annäherung durch ein solches Treppenintegral ersetzen lässt, sobald sich die Stetigkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ noch auf eine gewisse Nachbarschaft der Integrationscurve erstreckt.

Ich nehme als Integrationscurve C zunächst eine von x_0 bis x monoton verlaufende, etwa, um die Anschauung zu fixiren, beständig aufsteigende Curve. Ferner sei $P(\xi, \eta)$ eine eindeutige und stetige Function von (ξ, η) nicht nur auf der Curve C, sondern noch für ein gewisses benachbartes Gebiet zum Mindesten auf einer Seite der

Curve z. B. der rechten: dieses Gebiet mag bei x_0 bezw. x durch ein gerades Linienstück parallel zur X- bezw. Y-Axe, im Uebrigen seitlich durch eine beliebige Curve begrenzt sein, und zwar sollen diese Grenzen mit zum Stetigkeitsbereiche von $P(\xi, \eta)$ gehören. Alsdann ist nach einem bekannten Satze $P(\xi, \eta)$ für das definirte Gebiet gleichmässig stetig, d. h. nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse σ lässt sich eine positive Grösse δ so bestimmen, dass:

$$(14) \quad |P(\xi', \eta') - P(\xi, \eta)| < \sigma \quad \text{für:} \left\{\begin{matrix} |\xi' - \xi| \\ |\eta' - \eta| \end{matrix}\right\} < \delta,$$

sofern (ξ, η), (ξ', η') dem fraglichen Gebiete einschliesslich seiner Grenzen angehören.

Man theile nun das Intervall $(x_0\, x)$ durch Einschaltung der Theilpunkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(m-1)}$ in irgendwelche Theilintervalle, deren Länge durchweg $< \delta$ sein soll. Es seien ferner $y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots y^{(m-1)}$ die zugehörigen, auf der Y-Axe verzeichneten Curvenordinaten. Sind dann unter den Intervallen $(y^{(k-1)}\, y_k^{(k)})$ solche vorhanden, deren Länge $y^{(k)} - y^{(k-1)} \lesseqgtr \delta$, so kann man durch weitere Theilung erzielen, dass schliesslich nur Intervalle $< \delta$ vorhanden sind. Die auf diese Weise zum Vorschein kommenden y-Werthe (d. h. die früheren $y^{(k)}$ und die etwa noch eingeschalteten) mögen, der Grösse nach geordnet, bezeichnet werden mit:

$$y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_{n-1},$$

und die zugehörigen Curvenabscissen (unter denen also die ursprünglichen $x^{(k)}$ mit enthalten sind) seien:

$$x_1,\ x_2\ \cdots\ x_{n-1}.$$

Alsdann denke man sich diejenige Treppe construirt, welche durch die Punkte:

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_0),\ (x_1, y_1),\ \cdots\ (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (x, y_{n-1}),\ (x, y)$$

bestimmt wird, und bezeichne die Theilcurven, in welche C durch die Punkte (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, \cdots (n-1))$ zerlegt wird, alle in der Richtung der wachsenden ξ gerechnet, mit $c_1, c_2, \cdots c_n$.

Man hat nun:

$$\mathfrak{Z}_C = \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n{}^\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi$$
$$= \sum_1^n{}^\nu P(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$
$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} < \xi_\nu \leq x_\nu \qquad y_{\nu-1} \leq \eta_\nu \leq y_\nu.$$

Andererseits ergibt sich:

$$\mathfrak{Z}_S = \int_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\xi$$
$$= \sum_1^n{}^\nu P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$
$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} < \xi^{(\nu)} \leq x_\nu.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\mathfrak{Z}_C - \mathfrak{Z}_S = \sum_1^n{}^\nu \{P(\xi_\nu, \eta_\nu) - P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1})\} \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

und da offenbar:

$$|\xi_\nu - \xi^{(\nu)}| < x_\nu - x_{\nu-1} < \delta$$
$$|\eta_\nu - y_{\nu-1}| \leq y_\nu - y_{\nu-1} < \delta$$

so findet man schliesslich mit Berücksichtigung von Ungl. (14):

$$(15) \qquad \left| \int_{(C)} P \cdot d\xi - \int_{(S)} P \cdot d\xi \right| < \sigma \cdot (x - x_0).$$

Ganz analog ergibt sich:

$$|\int_{(C)} Q \cdot d\eta - \int_{(S)} Q \cdot d\eta| < \sigma(y - y_0) \tag{16}$$

und aus der Zusammenfassung beider Resultate:

$$\begin{aligned} &|\int_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)| \\ &\qquad < \sigma[(x - x_0) + (y - y_0)]. \end{aligned} \tag{17}$$

Da aber jeder beliebige Integrationsweg in eine endliche Anzahl solcher Curven C zerlegt werden kann, so folgt schliesslich ganz allgemein die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes.[1])

Das vorstehende Resultat wurde zwar hier wesentlich desshalb abgeleitet, weil dasselbe gestattet, den eigentlichen Beweis des Cauchy'schen Satzes auf ein Rechteck zu beschränken. Dasselbe kann indessen auch dazu dienen, um die am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachte Be-

---

[1]) Der analytische Begriff des „Treppenintegrals" und die eben bewiesene Beziehung zwischen beliebigen Curvenintegralen und solchen Treppenintegralen ist natürlich völlig unabhängig von der hier lediglich der grösseren Anschaulichkeit halber und namentlich mit Rücksicht auf die übliche Darstellung einer complexen Variablen gewählten Auffassung von ξ und η als rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes. Ein Treppenintegral ist lediglich eine Summe von Quadraturen der Form $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y)\, d\xi$, $\int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x, \eta)\, d\eta$, wobei im ersten Integral $y = y_{\nu-1}$ bezw. $= y_\nu$, im zweiten $x = x_\nu$ bezw. $= x_{\nu-1}$ zu setzen ist. Und der obige Satz, von jeder geometrischen Vorstellung losgelöst, besagt, dass ein Integral der Form $\int_{x_0, y_0}^{x, y} P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta$, wo zwischen ξ und η eine Beziehung von den näher definirten Eigenschaften besteht, stets mit beliebiger Annäherung durch eine endliche Anzahl solcher Quadraturen ersetzt werden kann.

merkung in sehr einfacher und anschaulicher Weise zu erläutern.

Nimmt man nämlich als Integrationscurve C eine die Punkte x_0 und x verbindende Gerade, deren Länge also den Werth $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzt, so kann man nach dem eben Gesagten das betreffende Integral mit beliebiger Annäherung durch ein solches über eine Treppe ersetzen, welche offenbar die unveränderliche Länge $|x-x_0|+|y-y_0|$ besitzt, wie klein man auch die Abstände ihrer Eckpunkte wählen mag. Mit anderen Worten: Bei unbegrenzter Verkleinerung der Treppenstufen convergirt der Werth des Treppenintegrals genau gegen denjenigen des geradlinigen Integrals, obschon die beiden Integrationswege die unveränderliche Längendifferenz $|x-x_0|+|y-y_0| - \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzen.

§ 3. Aufstellung einer nothwendigen Bedingung für die Unabhängigkeit des Integrals $\int_{x_0,y_0}^{x,y}(P\cdot d\xi + Q\cdot d\eta$ vom Integrationswege.

Es seien $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T eindeutige und im Allgemeinen stetige Functionen von (x,y). Alsdann gilt der Satz:

Soll das Integral $\int_{x_0,y_0}^{x,y} P\cdot d\xi + Q\cdot d\eta)$ erstreckt über eine beliebige innerhalb T verlaufende Curve einen lediglich von den Grenzen, aber nicht vom Integrationswege abhängigen, bestimmten Werth besitzen, so muss für jede Stelle (x',y') in deren Umgebung die oben genannten Functionen stetig sind, die Beziehung bestehen:

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = \frac{\partial Q}{\partial x'}.$$

Beweis. Soll das fragliche Integral vom Integrationswege unabhängig sein, so muss offenbar jedes über eine einfach geschlossene, innerhalb T verlaufende Linie erstreckte Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ verschwinden.

Sei nun (x', y') ein beliebiger Punkt innerhalb T von der Beschaffenheit, dass die vier genannten Functionen für eine gewisse Umgebung derselben stetig sind. Alsdann denke man sich parallel zu den Coordinatenaxen ein Rechteck R construirt, welches einschliesslich seiner Begrenzung (R) noch in die betreffende Umgebung des Punktes (x', y') hineinfällt und diesen selbst im Innern enthält. Bezeichnet man sodann irgend einen Eckpunkt (etwa den linken unteren) von R mit (x_0, y_0), dagegen mit (x, y) jeden beliebigen Punkt im Innern (einschliesslich des Punktes (x', y')) und mit r jedes durch die Punkte (x_0, y_0) (x, y) bestimmte, zu den Coordinatenaxen parallele Rechteck, so muss offenbar die Beziehung stattfinden:

$$\int_{(r)} \{P(\xi, \eta) \cdot d\xi + Q(\xi, \eta) \cdot d\eta\} = 0$$

d. h. man hat für alle Werthe (x, y) des genannten Gebietes:

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta + \int_{x}^{x_0} P(\xi, y) \cdot d\xi$$
$$+ \int_{y}^{y_0} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta = 0$$

oder anders geschrieben:

$$(18) \qquad W_1(x, y) = W_2(x, y)$$

wenn gesetzt wird:

$$(19) \quad W_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta$$

$$(20)\quad W_2(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y) \,.\, d\xi.$$

Aus Gl. (19) folgt sodann durch Differentiation nach y:

$$(21)\qquad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y)$$

und aus Gl. (20) mit Berücksichtigung von Gl. (18) durch Differentiation nach x:

$$(22)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y)$$

und hieraus durch weitere Differentiation:

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Da aber die Gleichungen (21)—(23) lehren, dass mit $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ auch $\frac{\partial W_1}{\partial x}$, $\frac{\partial W_1}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$ stetig sind, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$$

und man findet somit nach Gl. (23):

$$(24)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

für alle Werthe (x, y) im Innern des Rechteckes R, insbesondere also für $x = x'$, $y = y'$ — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

§ 4. Der Cauchy'sche Satz.

Hauptsatz. Sind $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T durchweg eindeutige, endliche und stetige Functionen von (x, y),[1]) welche der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{24}$$

so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die vollständige Begrenzung jedes innerhalb T liegenden zusammenhängenden Flächenstückes. Und es ist $\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ für alle innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietstheiles von T verlaufenden Integrationswege eine eindeutige und stetige Function $W(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y).$$

Beweis. Zunächst lässt sich zeigen, dass $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die Begrenzung eines vollständig innerhalb T liegenden Rechtecks R den Werth Null hat.

Es seien (x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_1, y_1), (x_0, y_1) die Eckpunkte von R, (x, y) irgend einer und jeder beliebige Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von R. Alsdann definire ich für dieses Gebiet R zwei Functionen $W_1(x, y)$,

---

[1]) Es sind somit die genannten Functionen **gleichmässig stetig** im Innern und auf der Begrenzung jedes innerhalb T liegenden Gebietes T', wobei man die Begrenzung von T' derjenigen von T beliebig nahe bringen kann.

$W_2(x, y)$ als diejenigen besonderen Werthe des Integrals $\int_{x_0, y_0}^{x, y}(P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, welche sich ergeben, wenn man einmal auf den Schenkeln des rechten Winkels über (x, y_0), das andere Mal über (x_0, y) bis (x, y) integrirt, also:

$$(25) \quad \begin{cases} \text{(a)} \quad W_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \eta_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta \\ \text{(b)} \quad W_2(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y) \cdot d\xi. \end{cases}$$

Es sind hiernach $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ für das betreffende Gebiet eindeutig definirte, lediglich von (x, y) abhängende Functionen, und zwar hat man offenbar insbesondere:

$$(26) \qquad W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0) = 0.$$

Man erkennt ferner leicht, dass $W_1(x,y)$, $W_2(x,y)$ stetige Functionen der beiden Variablen (x, y) sind. Bezeichnet man mit h, k zwei beliebige (positive oder negative) Incremente von x, y (wobei die Stelle $(x + h,\ x + k)$ auch eventuell ausserhalb von R fallen kann, in welchem Falle h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass das durch die vier Eckpunkte: (x_0, y_0), $(x + h, y_0)$, $(x + h,\ y + k)$, $(x_0, y + k)$ definirte Rechteck noch innerhalb T liegt), so wird:

$$W_1(x + h,\ y + k) = \int_{x_0}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta$$

und daher:

$$W_1(x + h,\ y + k) - W_1(x, y) = \int_{x}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi$$
$$+ \int_{y}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta + \int_{y_0}^{y} \{Q(x + h, \eta) - Q(x, \eta)\} \cdot d\eta$$
$$= h \cdot P(x + \vartheta \cdot h, y_0) + k \cdot Q(x + h, y + \vartheta' \cdot k)$$
$$+ \Delta \cdot \{Q(x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta) - Q(x, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta)\}$$

wo: $\Delta = y - y_0$ und ϑ, ϑ', ϑ'' in den Grenzen $0 \cdots 1$ liegen. Da die Stellen:

$$(x + \vartheta \cdot h, y_0), \ (x + h, y + \vartheta' \cdot k), \ (x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta), \\ (x, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta)$$

sämmtlich dem Gebiete T angehören, so können die beiden ersten Glieder der rechten Seite wegen der Endlichkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$, das dritte wegen der Stetigkeit von $Q(\xi, \eta)$ durch Wahl einer oberen Grenze für h und k beliebig klein gemacht werden, womit die Stetigkeit von $W_1(x, y)$ in dem behaupteten Umfange erwiesen ist. Ganz analog erkennt man aber auch die Stetigkeit von $W_2(x, y)$.

Ferner ergibt sich durch Differentiation von Gl. (25a) nach y und Gl. (25b) nach x unmittelbar:

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y) \tag{27}$$

und sodann aus (25a) durch Differentiation nach x zunächst:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta.$$

In Folge der gleichmässigen Stetigkeit von $Q(x, \eta)$ als Function der beiden Veränderlichen (x, η) darf man im letzten Gliede die Reihenfolge der Differentiation und Integration vertauschen und erhält daher mit Berücksichtigung der nach Voraussetzung bestehenden Beziehung (24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, \eta)}{\partial x} \cdot d\eta \\ &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x, \eta)}{\partial \eta} \cdot d\eta \\ &= P(x, y) - P(x, y_0) \end{aligned}$$

und somit:

$$\text{(28a)} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y).$$

Analog ergibt sich:

$$\text{(28b)} \qquad \frac{\partial W_2}{\partial y} = Q(x, y).$$

Die Gleichungen (27), (28) lehren also, dass für alle (x, y), welche dem Innern oder der Begrenzung von R angehören, die Beziehungen bestehen:

$$\text{(29)} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}$$

und es können daher die für das nämliche Werthegebiet als stetig erkannten Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ nach einem bekannten Satze höchstens um eine additive Constante verschieden sein, welche aber offenbar den Werth Null haben muss, da nach Gl. (26) $W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0)$ ist. Man findet somit schliesslich insbesondere:

$$\text{(30)} \qquad W_1(x_1, y_1) = W_2(x_1, y_1)$$

d. h. das Integral $\int\limits_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über je ein Paar anstossender Rechteckseiten hat den gleichen Werth, oder anders ausgesprochen: Das Integral, continuirlich erstreckt über die Begrenzung des Rechtecks, hat den Werth Null.

Angenommen nun, man habe ein innerhalb T liegendes, von einem oder mehreren Treppenpolygonen volltsändig begrenztes zusammenhängendes Flächenstück S, so lässt sich ein solches stets mit Hülfe einer endlichen Anzahl von Parallelen zu den Coordinatenaxen in eine endliche Anzahl von Rechtecken r_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegen, deren Begrenzung theils von den einzelnen Stücken der ursprünglichen

Treppenbegrenzung, theils von Stücken jener Hülfslinien gebildet wird, und zwar gehört jedes Stück der ursprünglichen Begrenzung nur einem einzigen (r_ν), dagegen jedes Stück einer Hülfslinie stets zwei benachbarten (r_ν) gleichzeitig an. Man hat nun zunächst:

$$(31) \qquad \sum_1^n{}_\nu \int_{(r_\nu)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0$$

da jedes einzelne dieser Rechtecksintegrale verschwindet. Führt man hierbei alle Integrationen in demselben Sinne aus, etwa dem sog. positiven, wo also die Fläche jedes einzelnen r_ν bei der Integration über den Umfang zur Linken bleibt, so wird offenbar über jedes Stück einer Hülfslinie genau zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung integrirt: es heben sich also die betreffenden Integralbestandtheile vollständig heraus, während nur die auf die Stücke der ursprünglichen Begrenzung (S) bezüglichen Integrale mit einer bestimmten, eindeutig vorgeschriebenen Integrationsrichtung zurückbleiben. Durch Addition dieser Theilintegrale geht dann Gl. (31) in die folgende über:

$$(32) \qquad \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0$$

wobei offenbar die Integration in dem Falle, dass (S) aus mehreren Treppenpolygonen besteht, über das äussere Polygon in der schlechthin als positiv geltenden (d. h. in der Richtung der wachsenden Winkel fortschreitenden), über jedes innere Polygon in der entgegengesetzten Richtung auszuführen ist.

Hat man schliesslich ein dem Gebiete T angehöriges, von einer oder mehreren Randcurven vollständig begrenztes, zusammenhängendes Flächenstück T', so kann man diesen Randcurven zunächst nach § 2 eine entsprechende Anzahl von Treppenpolygonen mit der Gesammtbegrenzung (S) zuordnen, dergestalt, dass die Differenz:

$$\int_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

beliebig klein wird. Und da das zweite Integral den Werth Null hat, das erste aber einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass auch:

$$\int_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0 \tag{33}$$

sein muss.

Bedeutet sodann U irgend ein einfach zusammenhängendes in T liegendes Flächenstück, und sind (x_0, y_0), (x_1, y_1) zwei beliebige Punkte in U, so werden irgend zwei innerhalb U zwischen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verlaufende Curven C und C', die sich weder selbst noch gegenseitig schneiden, einen Flächentheil von U vollständig begrenzen, sodass also das betreffende Integral über diese Begrenzung verschwindet. Man erhält somit, wenn man als Integrationsrichtung auf C und C' die von (x_0, y_0) nach (x, y) festhält:

$$\int_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = \int_{(C')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta). \tag{34}$$

Dieses Resultat wird aber offenbar durch das Auftreten etwaiger Doppelpunkte bei C und C' in keiner Weise alterirt, da die Integrale über die auf diese Weise entstehenden Schleifen nach Gl. (33) jedesmal verschwinden.

Wenn endlich die Curven C und C' sich auch gegenseitig schneiden, sodass sie also mehrere nur in diesen Schnittpunkten zusammenstossende Flächentheile vollständig begrenzen, so werden zunächst die Integrale über die betreffenden Einzelbegrenzungen verschwinden müssen. Wählt man daher die einzelnen Integrationsrichtungen in der Weise, dass über die Theile der Curve C jedesmal in der Richtung $(x_0, y_0) \cdots (x, y)$, über diejenigen von C' in entgegengesetzter Richtung integrirt wird, so ergibt sich durch Addition der betreffenden Theilintegrale und schliessliche Umkehrung der

Integrationsrichtung für alle auf Stücke von C' zu erstreckenden Integrale wiederum die Richtigkeit der Beziehung (34).

Hieraus folgt aber, dass das Integral $\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ innerhalb des Gebietes U einen vom Integrationswege unabhängigen, eindeutig bestimmten Werth besitzt, sodass also in diesem Gebiete:

$$(35) \qquad W(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

bei variablem (x, y) und constantem (x_0, y_0) eine eindeutige Function von (x, y) darstellt. Bildet man sodann unter der Voraussetzung, dass die Stelle $x + h,\ y + k)$ gleichfalls dem Gebiete U angehört:

$$W(x + h, y + k) = \int_{x_0, y_0}^{x+h, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Integrationsweg dieses Integrals über (x, y) führen und erhält also durch Subtraction:

$$W(x + h, y + k) - W(x, y) = \int_{x, y}^{x+h, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

und da man auch diesem Integrale ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen speciellen Integrationsweg zutheilen kann, nämlich die Horizontale von (x, y) bis $(x + h, y)$, dann die Verticale von $(x + h, y)$ bis $(x + h,\ y + k)$ (wobei nur h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass dieser Weg noch dem Gebiete U angehört), so folgt:

$$(36) \qquad \begin{aligned} &W(x + h, y + k) - W(x, y) \\ &= \int_x^{x+h} P(\xi, y) \cdot dx + \int_y^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta \\ &= h \cdot P(x + \vartheta h, y) + k \cdot Q(x + h, \eta + \vartheta' k) \end{aligned}$$

d. h. $W(x, y)$ ist eine stetige Function von (x, y).

Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann speciell für $k=0$, bezw. $k=0$:

$$\frac{W(x+h, y)-W(x, y)}{h}=P(x+\vartheta h, y)$$

$$\frac{W(x, y+k)-W(x, y)}{k}=Q(x, y+\vartheta' k)$$

und hieraus durch Uebergang zur Grenze $h=0$, bezw. $k=0$:

$$(37) \qquad \frac{\partial W}{\partial x}=P(x, y) \qquad \frac{\partial W}{\partial y}=Q(x, y).$$

Hiemit ist aber der ausgesprochene Satz in allen Theilen bewiesen.

Zusätze. 1) Der Satz erleidet keine Aenderung, wenn die ursprünglich als ausnahmslos vorausgesetzte Stetigkeit von P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ gewisse Unterbrechungen erleidet oder die Relation $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ nicht durchgängig erfüllt ist. Man zeigt dies in der bekannten Weise, indem man die Ausnahmestellen, die für P, Q nur in einzelnen Punkten, für $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ (d. h. sowohl hinsichtlich der Stetigkeit dieser beiden Functionen, als auch in Bezug auf die Relation: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$) auch in einzelnen Linien bestehen dürfen, zuächst durch beliebig nahe anzuschmiegende, zur Gesammtbegrenzung von T' hinzuzufügende Curven ausschliesst und sodann nachweist, dass die Integrale über jede dieser Curven beliebig klein gemacht werden können, also das Gesammtresultat nicht alteriren.[1])

---

[1]) Der auf der Reduction des Doppelintegrals

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy$$

beruhende Beweis gestattet freilich in Bezug auf $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ von vorn-

2) Erstreckt sich die gleichmässige Stetigkeit von P, Q mit eventuellem Ausschluss einzelner Punkte auch noch auf die Begrenzung von T, so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, auch wenn man es über die Begrenzung (T') erstreckt. Man erkennt dies, indem man zunächst ein Treppenpolygon (S) construirt denkt, dessen Ecken abwechselnd auf der Begrenzung und im Innern von T liegen, und sodann durch Verbindung der freien Eckpunkte ein gewöhnliches offenbar ganz innerhalb T liegendes Polygon (P) herstellt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Treppenstufen unterscheidet sich dann das Treppenintegral über (S) beliebig wenig von den beiden Integralen über (T') und (P), also kann auch die Differenz der beiden letzteren Integrale beliebig klein gemacht werden. Und da das Integral über (P) verschwindet, dasjenige über (T') jedenfalls einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass dieser Werth gleichfalls Null sein muss.

---

herein eine etwas allgemeinere Fassung der betreffenden Bedingungen, insofern für die Gültigkeit des Satzes nicht die Stetigkeit, sondern nur die Integrabilität von $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, genau gesagt die eindeutige Existenz von $\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$, $\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy$ in Frage kommt. Die genauere Feststellung der hiefür noch zulässigen Unstetigkeiten von $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ führt indessen auf Betrachtungen, mit deren Hülfe man ebensogut auch den hier gegebenen Beweis in analoger Weise verallgemeinern könnte. In der That braucht ja die Bedingung

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}$$

keineswegs für ein gewisses Gebiet R als ausnahmslos erfüllt vorausgesetzt werden, um daraus die Uebereinstimmung der beiden stetigen Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ (bis auf eine additive Constante) zu erschliessen. Ich gehe indessen auf derartige Verallgemeinerungen hier nicht ein, da mir dieselben für die Theorie der Functionen complexer Variablen keine sonderliche Bedeutung zu besitzen scheinen.

3) Kennt man eine innerhalb irgend eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes U von T eindeutige und stetige Function $F(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

so muss offenbar für jeden innerhalb U verlaufenden Integrationsweg die Beziehung bestehen:

$$F(x,y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) + C,$$

da das rechtsstehende Integral mit $F(x,y)$ innerhalb U die Stetigkeit und die partiellen Differentialquotienten $P(x, y)$, $Q(x,y)$ gemein hat. Da aber das Integral für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet, so folgt:

$$F(x_0, y_0) = C$$

also schliesslich:

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = F(x,y) - F(x_0, y_0).$$

Sitzung vom 9. Februar 1895.

1. Herr Karl Göbel hält einen Vortrag: „Ueber directe Anpassung.“ Wird an einem anderen Orte veröffentlicht.

2. Herr Nikolaus Rüdinger spricht: „Ueber Leucocytenwanderung in den Schleimhäuten des Darmkanales.“

3. Herr Alfred Pringsheim macht eine Mittheilung: „Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.“

4. Herr Walter Dyck legt zwei Abhandlungen vor: Eine von dem correspondirenden Mitgliede der Classe Herrn Max Nöther in Erlangen: „Die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gehen“;

und eine weitere von Herrn Eduard v. Weber in München: „Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. O. mit drei Variabeln.“

5. Herr W. v. Gümbel überreicht eine Abhandlung des auswärtigen Mitgliedes der Classe F. v. Sandberger in Würzburg: „Ueber Blei- und Fahlerzgänge in der Gegend von Weilmünster und Runkel in Nassau.“

Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Begründet man die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen auf die Cauchy'sche Definition der monogenen Functionen und ihrer Integrale, so ergibt sich die Entwickelbarkeit einer für $0 \leq |x| < R$ bezw. für $R_0 < |x| < R$ eindeutigen und monogenen Functionen nach positiven ganzen Potenzen von x (der „Cauchy'sche" Satz), bezw. nach positiven und negativen ganzen Potenzen von x (der „Laurent'sche" Satz) sowie der wahre Convergenz- und Geltungsbereich der betreffenden Entwickelungen ganz unmittelbar aus den bekannten Cauchyschen Integralsätzen. Wesentlich anders liegt die Sache, wenn man die Eigenschaften der im Sinne des Herrn Weierstrass analytischen und monogenen, d. h. durch ein „Functionenelement" von der Form $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu$ und dessen analytische Fortsetzungen definirten Functionen auf elementarem Wege, also insbesondere ohne Anwendung der complexen Integration ableiten will. Gestaltet sich hier schon die Feststellung des wahren Convergenzbezirkes für die Entwickelung $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu\, (x - x_0)^\nu$ einer innerhalb eines einfach

zusammenhängenden, die Stelle x_0 enthaltenden Gebietes eindeutigen und analytischen Function ziemlich umständlich,[1]) so bietet die Erkenntniss der blossen Möglichkeit, eine in einem Ringgebiete um die Stelle x_0 eindeutige und analytische Function nach positiven und negativen Potenzen von $(x-x_0)$ zu entwickeln, bei dem jetzigen Stande der Theorie ganz unverhältnissmässige Schwierigkeiten: man erschliesst dieselbe entweder nach dem Vorgange des Herrn Mittag-Leffler[2]) aus einem von Herrn Weierstrass abgeleiteten Hülfssatze von ziemlich verwickelter Beschaffenheit,[3]) oder etwas kürzer mit Hülfe einer von Scheeffer herrührenden, im Grunde genommen zwar auf denselben Principien beruhenden, aber directeren Beweismethode.[4]) Indessen selbst dieser auf den ersten Blick relativ einfach erscheinende Scheeffer'sche Beweis setzt doch eine Reihe von Vorkenntnissen, namentlich über die Eigenschaften mehrdeutiger Functionen voraus, welche es unmöglich machen, den betreffenden Satz an der für einen natürlichen und consequenten Aufbau der elementaren Functionentheorie erforderlichen Stelle erscheinen zu lassen.

Hiernach dürfte es nicht ohne Interesse erscheinen, wenn ich im Folgenden einen neuen Beweis für die fragliche Entwickelungsform einer analytischen Function mittheile. Die Grundlagen der hierbei von mir angewendeten Methode finden sich zwar schon im Wesentlichen in einer Cauchyschen Abhandlung: „Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence“ [5]): allein abgesehen davon, dass die dort gegebene

---

[1]) Cf. Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 180. Biermann, Theorie der analyt. Functionen, p. 165.

[2]) Acta mathematica, Bd. IV. p. 80.

[3]) Abhandl. aus der Functionenlehre, p. 28.

[4]) Acta mathematica, Bd. IV. p. 375.

[5]) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. I, p. 269.

Darstellung sich nur auf die Entwickelung einer Function nach positiven Potenzen bezieht, so enthält dieselbe auch verschiedene Lücken principieller Natur, und hierin mag wohl der Grund davon zu suchen sein, dass man, soviel ich weiss, auf jene Methode nicht wieder zurückgekommen ist,[1]) deren Kern in der Anwendung gewisser Mittelwerthe an Stelle der sonst bei der Coefficientendarstellung üblichen Integrale liegt. Derartige Mittelwerthe — nämlich Grenzwerthe von der Form $\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \cdot \sum_{0}^{n-1} {}_{\nu} f(x_{n,\nu}) \right\}$, wo die $x_{n,\nu}$ für jedes n und ν arithmetisch wohl definirte Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, dass $|x_{n,\nu+1} - x_{n,\nu}|$ mit wachsendem n beliebig klein wird — kann man natürlich stets auch als specielle Fälle von bestimmten Integralen auffassen. Immerhin haben dieselben mit dem Infinitesimalbegriff in Wahrheit absolut nichts zu thun, da es sich bei ihrer Bildung keineswegs um eine Summe schliesslich „unendlich

---

[1]) Ich bin nachträglich durch Herrn Dyck darauf aufmerksam gemacht worden, dass sich in: Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, T. I, p. 570 (in der deutschen Ausgabe von Harnack, T. I, p. 527) gleichfalls die Ableitung der Mac Laurin'schen Reihe mit Hülfe von Mittelwerthen findet. Die dort gegebene Darstellung ist im Wesentlichen eine Reproduction der im Texte citirten Cauchy'schen, bei welcher die erwähnten Lücken vermieden sind; allein der fragliche Beweis hat hierbei vollständig seinen elementaren Charakter verloren. Die dabei benützten „Mittelwerthe" sind in Wahrheit nur umständlicher geschriebene bestimmte Integrale mit veränderlichen Grenzen, die ausserdem noch von einem veränderlichen Parameter abhängen. Nach beiden Grössen wird differenzirt, wobei der Satz von der Differentiation eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze, sodann auch derjenige von der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge in Anwendung kommt; kurzum dieser Beweis gehört vollständig der Infinitesimalrechnung an und erscheint in der That weit einfacher und durchsichtiger, wenn man statt der benützten Mittelwerthe die üblichen Integralbezeichnungen anwendet.

klein" werdender, sondern lediglich um eine Summe wohl definirter, stets endlich bleibender Grössen, dividirt durch deren Anzahl, handelt. Hiernach ist aber ein solcher Mittelwerth genau in demselben Sinne „elementar" wie jeder gewöhnliche, von einer positiv wachsenden ganzen Zahl abhängige Grenzwerth, z. B. wie die sogenannte Summe einer unendlichen Reihe (die man ja schliesslich auch stets als speciellen Fall eines bestimmten Integrales auffassen kann), sodass gegen die Einführung derartiger Mittelwerthe in die elementare Functionentheorie irgendwelche principielle Bedenken schwerlich erhoben werden können, zumal die fraglichen Sätze auf diesem Wege eine Einfachheit und Abrundung erhalten, welche die mit Hülfe der complexen Integration erzielte noch merklich übertrifft. So lässt sich insbesondere der für diese ganze Betrachtung grundlegende Satz, dass der Mittelwerth einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ für die Stellen $|x| = r$ einen von r unabhängigen bestimmten Werth besitzt, weit leichter völlig streng begründen, als der entsprechende Cauchy'sche Integral-Satz für monogene Functionen (im Cauchy'schen Sinne); und es gestaltet sich die Darstellung der Entwicklungscoefficienten einer Potenzreihe durch solche Mittelwerthe wesentlich einfacher und natürlicher als die betreffende Integral-Darstellung, welche die Einführung des völlig fremdartigen, d. h. zu der Potenzentwickelung einer beliebigen analytischen Function in gar keiner nothwendigen Beziehung stehenden Factors $\frac{1}{2\pi i}$ nach sich zieht.

Im Uebrigen habe ich, um der folgenden Betrachtung einen möglichst elementaren Charakter zu wahren, absichtlich davon Abstand genommen, die Lehre von den Einheitswurzeln oder gar deren Darstellung durch trigonometrische Functionen, ja selbst auch nur den Satz von der Wurzelexistenz einer algebraischen Gleichung zu benützen. Vielmehr stütze

ich mich lediglich auf den elementaren Satz, dass eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 = \beta + \gamma i$ stets zwei und nur zwei verschiedene, vermittelst reeller Quadratwurzelausziehungen zu berechnende Wurzeln besitzt.

§ 1.

Ist $\gamma > 0$, β beliebig, so hat man bekanntlich:

$$(1) \qquad \sqrt{\beta + \gamma i}$$
$$= \pm \left\{ \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + \tfrac{1}{2}\beta} + i \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - \tfrac{1}{2}\beta} \right\},$$

wo sämmtliche Quadratwurzeln auf der rechten Seite positiv zu nehmen sind. Dabei soll derjenige Wurzelwerth, welcher resultirt, wenn man auf der rechten Seite als Gesammtvorzeichen das positive wählt, der Kürze halber schlechthin als der positive Werth von $\sqrt{\beta + \gamma i}$ bezeichnet werden.

Sei nun ferner $N = 2^n$, so lassen sich offenbar die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad x^N = 1$$

mit Hülfe von n successiven Quadratwurzelausziehungen berechnen, dergestalt, dass allgemein:

$$(3) \qquad x = \pm \sqrt[]{\vphantom{1}}_{1} \pm \sqrt[]{\vphantom{1}}_{2} \pm \cdots \pm \sqrt[]{\vphantom{1}}_{n-1} \pm \sqrt[]{1}_{n}$$

(wobei die Indices an den einzelnen Wurzelzeichen lediglich zur Charakterisirung ihrer Anzahl dienen). Daraus folgt zunächst, dass die Anzahl der verschiedenen Wurzelwerthe nur $\leqq 2^n$, also $\leqq N$ sein kann.

Unter den auf diese Weise sich ergebenden Wurzeln ist eine besonders ausgezeichnet, welche aus $\sqrt[4]{1} = + i$ ent-

steht, wenn man bei jeder weiteren Wurzelausziehung die im obigen Sinne definirte positive Wurzel beibehält. Bezeichnet man dieselbe durch:

$$(4) \qquad \alpha_n = \beta_n + \gamma_n i$$

so ergibt sich mit Hülfe der Formel (1):

$$(5) \quad \begin{cases} \beta_n = \sqrt[1]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt[n-3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[n-2]{\frac{1}{2}}}}} \\ \gamma_n = \sqrt[1]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt[n-3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[n-2]{\frac{1}{2}}}}} \end{cases}$$

Man erkennt alsdann leicht:

1) dass keine Wurzel der Gl. (2) mit positiv reellem und positiv imaginärem Theile existirt, welche näher an der positiven Einheit liegt als α_n;

2) dass die Potenzen $\alpha_n^0, \alpha_n^1, \cdots \alpha_n^{N-1}$ durchweg von einander verschieden sind und der Gl. (2) genügen, also die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung darstellen;

3) dass diesen N-Werthen ebensoviele, in der gleichen Anordnung auf einander folgende, aequidistante Punkte auf dem Einheitskreise entsprechen, deren constanter Abstand $|1 - \alpha_n|$ der Bedingung genügt:

$$(6) \qquad |1 - \alpha_n| < \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^{n-3}.$$

Nun bedeute $f(x)$ eine für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ eindeutig definirte und im Allgemeinen stetige Function, so soll gesetzt werden:

$$(7) \qquad \mathfrak{M}_n(f(r)) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}{}_\nu\, f(\alpha_n^\nu \cdot r),$$

sodass also $\mathfrak{M}_n(f(r))$ das arithmetische Mittel aus den Werthen bedeutet, welche $f(x)$ an den N-Stellen $x = a_n^\nu \cdot r$ $(\nu = 0, 1, \cdots N-1)$ annimmt. Aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ längs des Kreises $|x| = r$ und der Beziehung (6) ergibt sich sodann, dass $\mathfrak{M}_n(f(r))$ mit unbegrenzt wachsenden Werthen von n einer festen Grenze zustrebt, sodass die Bezeichnung:

$$\mathfrak{M}(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n(f(r)) \tag{8}$$

einen bestimmten Sinn besitzt. Zugleich erkennt man unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{M}(f(r))$, dass:

$$\mathfrak{M}(K \cdot f(r)) = K \cdot \mathfrak{M}(f(r)), \tag{9}$$

wenn K einen beliebigen für alle x mit dem absoluten Betrage r constanten Factor bedeutet; und ferner:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}(f_1(r) + \cdots + f_k(r)) \\ &= \mathfrak{M}(f_1(r)) + \cdots + \mathfrak{M}(f_k(r)), \end{aligned} \tag{10}$$

wenn man mit $f_1(x) \ldots f_k(x)$ Functionen von analoger Beschaffenheit wie $f(x)$ bezeichnet.

Ist jetzt $\varphi(x)$ eindeutig und analytisch für alle x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$ (wobei eventuell auch $R_0 = 0$ sein kann), so besteht der Satz, dass $\mathfrak{M}(\varphi(r))$ für $R_0 \leqq r \leqq R$ einen bestimmten von r unabhängigen Werth besitzt, sodass also:

$$\mathfrak{M}(\varphi(r)) = \mathfrak{M}(\varphi(r')),$$

wenn $R_0 \leqq r < r' \leqq R$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Hülfssatze[1]) des Inhalts, dass der Differenzenquotient $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$

[1]) Beweis dieses Hülfssatzes s. am Ende von § 1.

für alle x des betreffenden Gebietes und hinlänglich kleine Werthe von h eine gleichmässig stetige Function von h ist, d. h. man kann jeder beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse δ so zuordnen, dass für alle x des Gebietes: $R_0 \leqq |x| \leqq R$ die Beziehung besteht:

$$(10) \quad \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k} \right| < \varepsilon, \quad \text{falls} \begin{Bmatrix} |h| \\ |k| \end{Bmatrix} \leqq \delta.$$

Angenommen nun, man habe $r > 0$ beliebig klein fixirt, so bestimme man zunächst eine positive ganze Zahl m so, dass die positive Grösse:

$$\frac{r' - r}{m} = \delta$$

klein genug wird, um die Gültigkeit der Ungleichung (10) für $|h| \leqq \delta$, $|k| \leqq \delta$ zu sichern. Wählt man hierauf die positive ganze Zahl n bezw. $N = 2^n$ gross genug, dass:

$$r' \cdot |1 - a_n| \leqq \delta \quad (\text{also a fortiori } r \cdot |1 - a_n| < \delta),$$

so hat man:

$$\left| \frac{\varphi(a_n^\nu \cdot (r + \delta)) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{a_n^\nu \cdot \delta} - \frac{\varphi(a_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{a_n^\nu (a-1) \cdot r} \right| < \varepsilon$$

oder nach Multiplication mit δ und Berücksichtigung von $|a_n^\nu| = 1$:

$$\left| \varphi(a_n^\nu \cdot (r + \delta)) - \varphi(a_n^\nu \cdot r) - \delta \cdot \frac{\varphi(a_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(a_n^\nu \cdot r)}{(a-1) \cdot r} \right| < \delta \cdot \varepsilon$$

Setzt man der Reihe nach $\nu = 0, 1, \ldots (N-1)$ und addirt die resultirenden Ungleichungen, so heben sich offenbar alle von dem dritten Gliede der linken Seite herrührenden Be-

standtheile vollständig heraus (NB. es ist ja insbesondere $a_n^N \cdot r = a_n^0 \cdot r$), und es ergibt sich:

$$\left| \sum_0^{N-1}{}_\nu\, \varphi\,(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \sum_0^{N-1}{}_\nu\, \varphi\,(a_n^\nu \cdot r) \right| < N \cdot \delta \cdot \varepsilon$$

oder nach Division mit N:

$$| \mathfrak{M}_n\,(\varphi\,(r+\delta)) - \mathfrak{M}_n\,(\varphi\,(r)) \,| < \delta \cdot \varepsilon$$

und daher, wenn man r ins Unendliche wachsen lässt:

$$| \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r+\delta)) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r)) \,| \leqq \delta \cdot \varepsilon.$$

Schreibt man in dieser Ungleichung $r + (\mu - 1)\,\delta$ statt r (wo: $r + (\mu - 1) \cdot \delta < r'$ für $\mu = 1, 2, \ldots m$ — also auch: $(r + (\mu - 1)\,\delta) \cdot |1 - a_n| < \delta$), so wird:

$$| \mathfrak{M}\,(\varphi(r+\mu\,\delta)) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r+\overline{\mu - 1} \cdot \delta)) \,| \leqq \delta \cdot \varepsilon,$$

und wenn man die für $\mu = 1, 2, \ldots m$ hieraus resultirenden Ungleichungen addirt und beachtet, dass: $m \cdot \delta = r' - r$, schliesslich:

$$| \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r')) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r)) \,| \leqq (r' - r) \cdot \varepsilon.$$

Da aber ε von vornherein beliebig klein angenommen werden kann, und andererseits $\mathfrak{M}\,(\varphi\,(r'))$, $\mathfrak{M}\,(\varphi\,(r'))$ eindeutig bestimmte Werthe besitzen, so muss geradezu:

$$(11) \qquad | \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r')) - \mathfrak{M}\,(\varphi\,(r)) \,| = 0$$

sein, womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Beweis des Hülfssatzes. Für jede Stelle x des Bereiches $R_0 \leqq |x| \leqq R$ gilt eine Entwickelung von der Form:

$$\varphi\,(x+h) = \sum_0^\infty{}_\nu\, \frac{\varphi^{(\nu)}\,(x)}{\nu!} \cdot h^\nu$$

deren wahrer Convergenzradius bekanntlich eine mit x stetig veränderliche, positive Grösse ist und demnach ein bestimmtes von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen muss. Fixirt man nun eine positive Grösse:

$$\delta < \varrho$$

so ist für alle x und h des Bereiches: $R_0 \leqq |x| \leqq R$ und $|h| \leqq \delta$ die Reihenentwickelung (12) gültig und absolut convergent, und daher auch in dem gleichen Umfange:

$$\varphi''(x+h) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu .$$

Da aber für den angegebenen Werthebereich $\varphi''(x+h)$ eine stetig veränderliche Function ihres Argumentes ist, so besitzt daselbst $|\varphi''(x+h)|$ ein bestimmtes endliches Maximum g, und es ist daher nach einem bekannten Satze:

$$(13) \qquad \left| \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu \right| \leqq g \qquad \text{für: } \begin{cases} R_0 \leqq |x| \leqq R \\ |h| \leqq \delta . \end{cases}$$

Setzt man nun Gl. (12) in die Form:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) = h \cdot \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{(\nu+2)!} \cdot h^\nu ,$$

so hat man für $h \leqq \delta$ mit Benützung von Ungl. (13):

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) \right| \leqq g \cdot |h| \sum_0^\infty {}_\nu \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$
$$\text{d. h. } \leqq g \cdot |h|$$

und daher, wenn auch $|k| \leqq \delta$ angenommen wird:

$$(14) \qquad \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k} \right|$$
$$\leqq g \{ |h| + |k| \} \leqq 2 g \cdot \delta ,$$

sodass also die fragliche Differenz unter ε herabsinkt, wenn von vornherein $\delta < \frac{\varepsilon}{2g}$ angenommen wird.

§ 2.

Lehrsatz. Ist $f(x)$ eine eindeutige und analytische Function für alle Stellen x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$, so gilt für dieses Gebiet die Entwickelung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\mu\, a_\mu \cdot x^\mu$$

wo:

$$a_\mu = \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot f(r)\right)$$

und r einen beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet. Ist insbesondere $R_0 = 0$, so reducirt sich die obige Entwickelung auf die folgende:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_\mu\, a_\mu \cdot x^\mu.$$

Beweis. Bezeichnet man mit x_0 irgend eine willkürlich gewählte Stelle im Innern des fraglichen Bereiches, sodass also $R_0 < |x_0| < R$ und setzt man:

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

so ist $\varphi(x)$ für alle x des Bereiches $R_0 \leqq x \leqq R$ gleichfalls eindeutig und analytisch. Man erkennt dies ohne Weiteres für jede von x_0 verschiedene Stelle x; in der Umgebung der Stelle x_0 hat man aber:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{1}^{\infty}{}_\mu\, \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!}(x - x_0)^\mu$$

also:

$$\varphi(x) = x \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} (x - x_0)^{\mu-1}$$

d. h. $\varphi(x)$ ist dort gleichfalls analytisch. In Folge dessen ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\left(R_0 \cdot \frac{f(R_0) - f(x_0)}{R_0 - x_0}\right) = \mathfrak{M}\left(R \cdot \frac{f(R) - f(x_0)}{R - x_0}\right)$$

oder mit Berücksichtigung von Gl. (9) und (10) des § 1:

$$\text{(15)} \quad \begin{aligned} & f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) - f(x_0)\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right) \\ & = \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) - \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\text{(16)} \quad \frac{R}{R - x_0} = \sum_{0}^{m-1}{}_{\mu} \left(\frac{x_0}{R}\right)^{\mu} + \left(\frac{x_0}{R}\right)^{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_0}{R}}$$

$$\text{(17)} \quad \frac{R_0}{R_0 - x_0} = -\sum_{1}^{m-1}{}_{\mu} \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_0}{x_0}}$$

und daher:

$$\text{(17)} \quad \begin{aligned} & \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) \\ & = \sum_{0}^{m-1}{}_{\mu}\, \mathfrak{M}\left(R^{-\mu} \cdot f(R)\right) \cdot x_0^{\mu} + x_0^{m} \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^{m}\left(1 - \frac{x_0}{R}\right)}\right). \end{aligned}$$

Da nun:

$$\text{(18)} \quad \left| x_0^{m} \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^{m}\left(1 - \frac{x_0}{R}\right)}\right) \right| < \left|\frac{x_0}{R}\right|^{m} \cdot \frac{F(R)}{1 - \left|\frac{x_0}{R}\right|}$$

wenn $F(R)$ das Maximum der absoluten Beträge von $f(x)$ für $|x| = R$ bezeichnet, so folgt, dass dieser letztere Aus-

druck mit unbegrenzt wachsenden Werthen von m gegen Null convergirt, und zwar, wenn $r < R$ angenommen wird, offenbar gleichmässig für alle x_0, welche der Bedingung genügen: $|x_0| \leqq r$. Lässt man also in Gl. (17) m ins Unendliche wachsen, so wird:

$$(19) \quad \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) = \sum_0^\infty {}_\mu \, \mathfrak{M}\,(R^{-\mu} \cdot f(R) \cdot x_0^\mu$$

wobei diese Reihe zunächst unbedingt und gleichmässig convergirt für $|x_0| \leqq r < R$. Es lässt sich indessen leicht zeigen, dass dies auch noch für $|x_0| = R$ der Fall sein muss. Da nämlich $f(x)$ nach Voraussetzung noch für $|x| = R$ analytisch sein sollte, so gehört zu jeder Stelle x' des Kreises mit dem Radius R eine angebbare Umgebung, für welche $f(x)$ nach Potenzen von $(x - x')$ entwickelbar ist. Diese Umgebung muss dann ein gewisses, von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen. Nimmt man alsdann eine positive Grösse $\delta < \varrho$ an, so folgt, dass $f(x)$ auch noch für $|x| \leqq R + \delta$ analytisch ist. Alsdann besteht aber eine Beziehung von der Form (19), sofern man daselbst R durch $R + \delta$ ersetzt, und diese muss nach dem Gesagten unbedingt und gleichmässig convergiren für $|x_0| \leqq r < R + \delta$, also insbesondere für $|x_0| = R$. Da aber nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\,((R+\delta)^{-\mu} f(R+\delta)) = \mathfrak{M}\,(R^{-\mu} \cdot f(R)),$$

so ist die zuletzt genannte Entwickelung von der in Gl. (19) nicht verschieden, sodass also diese letztere in der That noch für $|x_0| = R$ unbedingt und gleichmässig convergirt.

Analog ergibt sich aus Gl. (17):

$$(20) \quad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0 - x_0}\right)$$
$$= -\sum_1^{m-1} {}_\mu \, \mathfrak{M}\,(R_0^\mu \cdot f(R)) \cdot x_0^{-\mu} - x_0^{-m}\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m f(R_0)}{1 - \frac{R_0}{x_0}}\right)$$

Da aber:

$$(21)\qquad \left| x_0^{-m}\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m \cdot f(R_0)}{1-\frac{R_0}{x_0}}\right)\right| < \left|\frac{R_0}{x_0}\right|^m \cdot \frac{F(R_0)}{1-\left|\frac{R_0}{x_0}\right|},$$

(wenn wiederum $F(R_0)$ das Maximum von $|f(x)|$ für $|x| = R_0$ bezeichnet), und da dieser Ausdruck wegen $|x_0| > R_0$ mit unendlich wachsendem m gegen Null convergirt, so hat man:

$$(22)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 \cdot f(R)}{R_0 - x_0}\right) = -\sum_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(R_0^\mu f(R)) \cdot x^{-\mu}.$$

Diese Reihe convergirt dann zunächst wieder unbedingt und gleichmässig für $|x_0| > R_0$: es folgt aber genau wie oben, dass dies auch noch für $|x_0| = R_0$ der Fall sein muss, sofern man vorläufig $R_0 > 0$ annimmt. (Der Fall $R_0 = 0$ wird weiter unten besprochen werden).

Da die in den Entwickelungen (19) und (22) als Coefficienten auftretenden Mittelwerthe nach dem Satze des vorigen Paragraphen (in dem durch die analytische Beschaffenheit von $f(x)$ bezw. $x^{\pm\mu} \cdot f(x)$ gegebenen Umfange) von R bezw. R_0 unabhängig sind, so kann man die Gleichungen (19) und (22) auch durch die folgenden ersetzen:

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) = \sum_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^{-\mu} \cdot f(r)) \cdot x_0^\mu \\ \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 \cdot f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) = -\sum_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^\mu \cdot f(r)) \cdot x_0^{-\mu} \end{cases}$$

wo r einen ganz beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet. Ersetzt man jetzt in (23) $f(x)$ durch die Einheit, so folgt insbesondere:

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R - x_0}\right) = \sum_0^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^{-\mu}) \cdot x_0^\mu & (\text{wo: } |x_0| \leqq R) \\ \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right) = -\sum_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^\mu) \cdot x_0^{-\mu} & (\text{wo: } |x_0| \geqq R_0) \end{cases}$$

Nun ist aber für $\mu \geqq 1$ — falls n von vornherein so gewählt wird, dass $N = 2^n > \mu$:

$$\mathfrak{M}_n(r^{\pm\mu}) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}{}_\nu\, a_n^{\pm\mu\cdot\nu}\cdot r^{\pm\mu} = \frac{1}{N}\cdot r^{\pm\mu}\cdot\frac{1-a_n^{\pm\mu\cdot N}}{1-a_n^{\pm\mu}} = 0,$$

also auch:

$$\mathfrak{M}(r^{\pm\mu}) = 0.$$

Dagegen für $\mu = 0$, offenbar:

$$\mathfrak{M}_n(r^0) = 1, \text{ also auch: } \mathfrak{M}(r^0) = 1,$$

sodass die Gleichungen (24) sich auf die folgenden reduciren:

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{M}\left(\frac{R}{R-x_0}\right) = 1\\ &\mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0-x_0}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Mit Benützung der in Gl. (23) und (25) enthaltenen Resultate geht dann Gl. (15) — wenn man statt x_0 jetzt x schreibt — in die folgende über:

$$(26)\qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^{-\mu}\cdot f(r))\cdot x^\mu + \sum_1^\infty{}_\mu\, \mathfrak{M}(r^\mu\cdot f(r))\cdot x^{-\mu}\\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}(r^{-\mu}\cdot f(r))\cdot x^\mu \end{aligned}$$

wobei also diese Entwickelung unbedingt und gleichmässig convergirt für $R_0 \leqq |x| \leqq R$, und die in den Coefficienten auftretende Grösse r einen beliebig zu wählenden Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet.

Ist jetzt speciell $R_0 = 0$, so kann man zunächst in den Coefficienten von der Form $\mathfrak{M}(r^\mu\cdot f(r))$ für $\mu \geqq 1$ $r = 0$ setzen. Alsdann wird aber:

$$\mathfrak{M}_n (r^\mu \cdot f(r))_{r=0} = 0 \quad \text{also auch:} \quad \mathfrak{M}(r^\mu \cdot f(r)) = 0$$

sodass Gl. (26) sich auf die folgende reducirt:

$$(27) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}_\mu \, \mathfrak{M}(r^{-\mu} \cdot f(r)) \cdot x^\mu$$

Dabei würde nach dem oben Gesagten diese Entwickelung zunächst gültig sein für $0 < |x| \leqq R$. Man erkennt aber unmittelbar, dass sie auch noch für $x = 0$ besteht. Im Falle $x = 0$ geht nämlich die rechte Seite über in:

$$\mathfrak{M}(f(r))$$

und da man hier wiederum $r = 0$ setzen darf, so folgt:

$$\mathfrak{M}(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n (f(r))_{r=0} = f(0)$$

d. h. Gl. (27) gilt in der That auch für $x = 0$.

Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz I. Ist $f(x)$ nur für das Gebiet $R_0 < |x| < R$ eindeutig und analytisch, so gilt die Entwickelung (26) zunächst für jedes Gebiet $R_0' \leqq |x| \leqq R'$, sofern nur R_0', R' der Bedingung genügen: $R_0 < R_0' < R' < R$: sie gilt somit schliesslich für alle x des Gebietes $R_0 < |x| < R$. Sind also $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ die wahren Convergenzgrenzen der betreffenden Entwickelung, so muss $f(x)$ für $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ mindestens eine singuläre Stelle besitzen.

Bleibt $f(x)$ beim Uebergange von Werthen mit dem absoluten Betrage $|x| < R$ bezw. $|x| > R_0$ zu solchen mit dem absoluten Betrage $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ noch im allgemeinen gleichmässig stetig, und ist $f(x)$ für $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ durchweg endlich, so kann man offenbar die in den Coefficienten auftretende Grösse r eventuell

auch durch R bezw. R_0 ersetzen, da in diesem Falle die Differenzen:

$$\mathfrak{M}(R^{\mu}\cdot f(R)) - \mathfrak{M}(R'^{\mu}\cdot f(R'))$$

$$\text{bezw.}\ \mathfrak{M}(R_0^{\mu}\cdot f(R_0) - \mathfrak{M}(R_0'^{\mu}\cdot f(R_0'))$$

beliebig klein gemacht werden können.

Zusatz II. Man erkennt leicht, dass der bewiesene Satz auch umkehrbar ist, d. h. wenn die Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu}\, a_{\mu}\, x^{\mu} = f(x)$$

zum Mindesten für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ gleichmässig convergirt, so hat man:

$$a_{\mu} = \mathfrak{M}(r^{-\mu}\cdot f(r)).$$

Hieraus ergibt sich dann die Eindeutigkeit einer derartigen Entwickelung zunächst in dem Umfange, dass aus dem Bestehen der Gleichung:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\, a_{\mu}\cdot x^{\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\, b_{\mu}\cdot x^{\mu},$$

zum Mindesten für alle x mit einem gewissen absoluten Betrage $|x| = r$, für welche jene Reihen gleichmässig convergiren, deren Identität folgt. Auch hat es keine besondere Schwierigkeit, diesen Identitätsbeweis auf den Fall auszudehnen, dass die Gleichheit der beiden Reihensummen nur für irgend eine unendliche Punktmenge feststeht.

Fehlen in der betrachteten Reihe die negativen Potenzen, sodass also:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, a_{\mu}\cdot x^{\mu}$$

so hat man offenbar:

$$\mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot f(r)\right) = \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(0).$$

Jene Mittelwerthe stellen also in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der Ableitungen von $f(x)$ für $x = 0$ dar.

Die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung gehen.

Von M. Nöther in Erlangen.

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Für die 315 Kegelschnitte, welche eine Curve 4. Ordnung in den Berührungspunkten von vier ihrer Doppeltangenten treffen, hat O. Hesse zuerst angegeben (Crelle's Journ., Bd. 40), dass man aus ihnen 7-Systeme bilden kann, die je durch die Berührungspunkte aller 28 Doppeltangenten hindurchgehen. Auf die von ihm (Cr. J. 49) gestellte Frage nach allen derartigen 7-Systemen bin ich in Bd. 15 der Mathem. Annalen[1]) so weit eingegangen, dass ich einmal 135 irreductible 7-Systeme mit „Tripeleigenschaft" nachwies, sodann 315.24 uneigentliche Systeme construirte, in welchen je einer der Kegelschnitte ausgezeichnet war. Aus Anlass der von der k. b. Akad. d. Wiss. demnächst erfolgenden Herausgabe der gesammelten Abhandlungen Hesse's möchte ich die Frage hier vollständig beantworten.

1. Bezeichnungen und Beziehungen. Ich bediene mich der Bezeichnung (ik), wo i, k von $1, 2, \ldots 8$ gehen, $k \gtrless i$, für die Doppeltangenten („Dtgn.") und der in dem ge-

[1]) „Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung."

nannten Aufsatz, oder auch in Abhandl. d. bayer. Akad. d. Wiss., Bd. 17,[1]) auseinandergesetzten Rechenregeln. Von diesen übrigens nur der folgenden: In einer Combination zu μ, $i_1 k_1\; i_2 k_2 \ldots i_\mu k_\mu$, ist die Anordnung der Zahlen gleichgültig und zwei gleiche Zahlen heben sich gegenseitig auf. Ist μ gerade, so gelangt man, indem man $[12 \ldots 8] \equiv 0$ setzt, zu den 63 gleichberechtigten Steiner'schen Gruppen („St. Gr.") $[ik]$, $[iklm]$; für ungerades μ zu den 28 (ik) und zu 36 unter einander gleichberechtigten $(iklm)$ und $(12 \ldots 8)$. Jede St. Gr. $[a]$ lässt sich auf 6 Arten in Paare der Art $i_1 k_1 .\; i_2 k_2$ zerlegen, und jede der zwölf entsprechenden Dtgn. (ik) heisst: „in $[a]$ enthalten." Zwei St. Gr. $[a]$, $[b]$ heissen „syzygetisch" (Ausdruck von Frobenius), wenn $[b]$ sich gegen die beiden Dtgn. eines Paares von $[a]$ gleichmässig verhält, d. h. beide enthält oder beide nicht enthält. Drei syzygetische St. Gr. $[a]$, $[b]$, $[ab]$ von der Combination $[abab] \equiv 0$, mögen ein „Steiner'sches Tripel" heissen; sie enthalten vier Dtgn. gemeinsam, deren Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ liegen; die 315 Kegelschnitte

$$\mathfrak{K} = i_1 k_1 \cdot i_2 k_2 \cdot i_3 k_3 \cdot i_4 k_4, \qquad \text{wo } [i_1 k_1\, i_2 k_2\, i_3 k_3\, i_4 k_4] \equiv 0,$$

und die 315 Steiner'schen Tripel

$$[i_1 k_1\, i_2 k_2],\; [i_1 k_1\, i_3 k_3],\; [i_1 k_1\, i_4 k_4] \equiv [i_2 k_2\, i_3 k_3]$$

entsprechen sich so eindeutig; zu jedem $\mathfrak{K}$ „gehören" drei St. Gr. eines Tripels.

Die Beziehungen zwischen zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ sind von mir Math. Ann. 15 gegeben worden, ausführlicher von Pascal,[2]) der auch die Beziehungen zwischen dreien der $\mathfrak{K}$ abgeleitet hat. Ich benütze davon Folgendes:

---

[1]) „Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung."

[2]) Rendiconti d. R. Accad. dei Lincei, 1892 Nr. 11, 12; 1893 Nr. 1.

Zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, welche keine Doppeltangente gemeinsam haben, stehen in „Beziehung erster Art“ $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ oder „zweiter Art“ $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_2$, je nachdem die beiden zu $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gehörigen St.'schen Tripel eine St. Gr. gemeinsam haben oder nicht. Zu einem $\mathfrak{K}$ gibt es 18 $\mathfrak{K}'$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_1$ gilt, 144 $\mathfrak{K}'$, für welche $(\mathfrak{K}\mathfrak{K}')_2$ ist. Aus dem „Zerlegungsschema“ eines $\mathfrak{K}$, nämlich aus

$$\begin{array}{rcllll} & K \equiv & 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78 & & & \\ [1234] & \equiv & 13 \cdot 24, & 14 \cdot 23, & 57 \cdot 68, & 58 \cdot 67 \\ [1256] & \equiv & 15 \cdot 26, & 16 \cdot 25, & 37 \cdot 48, & 38 \cdot 47 \\ [1278] & \equiv & 17 \cdot 28, & 18 \cdot 27, & 35 \cdot 46, & 36 \cdot 45, \end{array}$$

erhält man die K', für welche $(KK')_1$, indem man zwei Paare einer Horizontalreihe zusammenfasst, wie etwa $13 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 23$; und die K'', für welche $(KK'')_2$, indem man aus zwei der drei Reihen je zwei ik so herausnimmt, dass die Gesammtcombination 0 ergibt, wie $13 \cdot 14 \cdot 37 \cdot 47$. Die 18 ersteren K' zerfallen dem zu Grunde gelegten K gegenüber in 9 Paare, indem ein solches Paar $K_1 K_2$ eine Horizontalreihe von K erschöpft; solche drei Kegelschnitte K, K_1, K_2 bilden ein „Tripel erster Art“ $(KK_1K_2)_1$, dessen Glieder gleichartig eingehen und alle derselben St. Gr. $[a]$ zugeordnet sind, während umgekehrt eine St. Gr. $[a]$ auf 15 verschiedene Tripel der Art $(KK_1K_2)_1$ führt. Von letzteren existiren $63 \cdot 15$. Auch die 144 K'' zerlegen sich K gegenüber in 72 Paare, der Art $(K_1^{\cdot} K_2^{\cdot})_1$, indem $K_2^{\cdot}$ jene 4 Dtgn. enthält, welche die 4 Dtgn. von $K_1^{\cdot}$ in den beiden ausgezeichneten St. Gr. von K zu Paaren ergänzen. Einem Paar 2. Art $(KK'')_2$, ist ein Kegelschnitt K' „conjugirt“, für welchen $(KK')_1$, $(K''K')_1$ ist; derselbe kann dadurch erhalten werden, dass man aus den beiden, gegen einander syzygetischen, St. Gr. von K und K'', von welchen die erstere keine Dtg. von K'', die zweite keine Dtg. von K enthält, die vier gemeinsamen Dtgn. herausnimmt.

Im obigen Beispiel bilden

$$K, K_1 = 13 \cdot 24 \cdot 14 \cdot 23, \qquad K_2 = 57 \cdot 68 \cdot 58 \cdot 67$$

ein Tripel erster Art;

$$K_1'' = 13 \cdot 14 \cdot 37 \cdot 47, \qquad K_2'' = 24 \cdot 23 \cdot 48 \cdot 38$$

sind zweiter Art gegen K und gegen K gepaart; durch K und K'' sind die St. Gr. [1278], [34] ausgezeichnet, welche zu dem, zu $(KK_1'')_2$ conjugirten $K' = 35 \cdot 36 \cdot 45 \cdot 46$ führen.

2. Siebentripelsysteme. Ein solches System entsteht aus K, indem man aus jeder der drei St. Gr. von K diesen Kegelschnitt zu einem Tripel erster Art ergänzt; aber so, dass nur Beziehungen erster Art entstehen. Durch das erste Tripel ist das Quadrupel der vier übrigen Kegelschnitte schon bestimmt. So gibt es $\frac{63 \cdot 15}{7} = 135$ solcher Systeme, je 7 Tripel enthaltend.

Einem solchen System entspricht ein Tripelsystem von 7 Steiner'schen Gruppen und zwar je den Elementen des einen Systems die Tripel des anderen (vergl. das System S, Math. Ann. 15, pag. 95). Man erhält dasselbe einfach aus drei syzygetischen St. Gr. $[a]$, $[b]$, $[c]$, für welche $[abc]$ nicht $\equiv 0$ ist, in

$$[a],\ [b],\ [c],\ [ab],\ [ac],\ [bc],\ [abc].$$

3. Eigentliche Siebensysteme zweiter Art. Es gibt $5!\ 36 \cdot 8$ eigentliche (irreductible) Systeme zweiter Art von je 7 Kegelschnitten $\mathfrak{K}$, deren Glieder alle in Beziehung zweiter Art zu einander stehen. Jedes solches System führt auf eine Galois'sche (also algebraisch lösbare) Gleichung 7. Grades. Dieselben sind, je zu 120, den $36 \cdot 8$ Aronhold-schen 7-Systemen von Dtgn. zugeordnet.

Ein solches 7-$\mathfrak{K}$-System ist z. B.

$$K_0 = 12 \cdot 34 \cdot 56 \cdot 78$$

$$K_1 = 14 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 68,\ K_2 = 15 \cdot 36 \cdot 47 \cdot 28,\ K_3 = 16 \cdot 24 \cdot 57 \cdot 38,$$
$$K_4 = 13 \cdot 25 \cdot 67 \cdot 48,\ K_5 = 26 \cdot 37 \cdot 45 \cdot 18,\ K_6 = 17 \cdot 23 \cdot 46 \cdot 58.$$

Um die Eigenschaft desselben zu erkennen, dass aus irgend zwei der 7 Kegelschnitte die übrigen sich eindeutig ergeben, beachte man, dass, K_0 gegenüber, sich die übrigen 6 in 3 Paare $K_1 K_6$, $K_2 K_5$, $K_3 K_4$ ordnen, derart, dass der einem Paare $(K_1 K_6)_2$ „conjugirte" Kegelschnitt $\mathfrak{K}_{16}$ mit K_0 (und nur mit K_0) zwei Doppeltangenten gemein hat; ebenso bez. $(K_2 K_5)_2$ und bez. $(K_3 K_4)_2$. Dieselben sechs $\mathfrak{K}$ ordnen sich, K_0 gegenüber, auch in zwei Cyklen 2. Ordnung, $K_1 K_4 K_2$ und $K_6 K_3 K_5$; insofern man von $(K_0 K_1)_2$ auf K_4, von $(K_0 K_4)_2$ auf K_2, von $(K_0 K_2)_2$ auf K_1, und ebenso von $(K_0 K_6)_2$ auf K_3, von $(K_0 K_3)_2$ auf K_5, von $(K_0 K_5)_2$ auf K_6 kommt, genau so wie vorher von $(K_1 K_6)_2$ auf K_0. Und analog ist es, wenn man, statt von K_0, von einem der übrigen sechs $\mathfrak{K}$ ausgeht.

Die Gleichung 7. Grades, welche dem 7-Systeme entspricht, hat also für die Indices i der 7 Kegelschnitte die metacyklische Substitutionsgruppe

$$(i \mid \beta i + \alpha), \qquad \left\{ \begin{matrix} i = 0, 1, \ldots 6 \\ \alpha = 0, 1, \ldots 6 \\ \beta = 1, 2, \ldots 6 \end{matrix} \right\} \text{ mod. } 7.$$

Ferner ist für das obige System in K_0 die Dtg. (78) vor den übrigen dreien insofern ausgezeichnet, als in den 3 Kegelschnitten $\mathfrak{K}_{16}$, $\mathfrak{K}_{43}$, $\mathfrak{K}_{25}$, welche je den obigen drei Paaren $(K_1 K_6)_2$, $(K_4 K_3)_2$, $(K_2 K_5)_2$ conjugirt sind, jedesmal die Dtg. (78), aber nur je eine der drei übrigen Dtgn. von K_0 vorkommt; und auch dadurch, dass, wenn man die 6 Kegelschnitte $K_1, \ldots K_6$ auf andere Weise paarweise zusammennimmt und jedesmal den conjugirten $\mathfrak{K}$ aufstellt, (78) niemals, die übrigen

drei Dtgn. von K_0 aber je zweimal vorkommen. Auf diese Weise ist in dem obigen System das hervorgehobene Aronhold'sche 7-System von Dtgn. ausgezeichnet, das, combinirt, (12345678) liefert.

Zugleich folgt, dass mittelst des Siebenkegelschnittsystems die 28 Dtgn. alle eindeutig bestimmt sind. Und da die Gleichung für diese Dtgn. eine Gruppe von 8! 36 Substitutionen besitzt, das 7-𝔎-System aber eine solche von 7·6 Substitutionen, so existiren 5! 36·8 der genannten 7-Systeme. Man erhält dieselben sämmtlich aus dem obigen speciellen, indem man etwa erst auf die Doppeltangentenindices 1, 2, ... 5 alle 120 Vertauschungen ausübt, was das zugehörige Aronhold'sche 7-System nicht ändert, und indem man dann noch diejenigen Substitutionen vornimmt, welche letzteres System in die 36·8 Aronhold'schen 7-Systeme überzuführen erlauben.

4. Uneigentliche Siebensysteme.

a) Man ergänzt, wie in Nr. 2, K aus jeder der drei St. Gr. von K zu einem Tripel erster Art; aber so, dass die drei Paare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ gegenseitig in Beziehung zweiter Art stehen; z. B.

$$K = 12\cdot34\cdot56\cdot78,\quad A_1 = 13\cdot24\cdot57\cdot68,\quad A_2 = 14\cdot23\cdot58\cdot67,$$
$$B_1 = 15\cdot26\cdot16\cdot25,\quad B_2 = 37\cdot48\cdot38\cdot47,$$
$$C_1 = 17\cdot28\cdot36\cdot45,\quad C_2 = 18\cdot27\cdot35\cdot46.$$

In diesem System ist K ausgezeichnet. Es gibt 315·6 derartige Systeme.

b) Man verfährt wie in a), nur dass zwei der drei Paare gegen einander in Beziehung erster Art, gegen das dritte in Beziehung zweiter Art stehen. So erhält man aus dem System a) ein System b), wenn man nur $B_1 B_2$ ersetzt durch

$$B_1 = 15\cdot26\cdot37\cdot48,\qquad B_2 = 16\cdot25\cdot38\cdot47.$$

Auch in diesem System ist K ausgezeichnet, und es gibt 315·18 derartige Systeme.

In a) und b) zusammen hat man die in Math. Ann. 15 angegebenen 315·24 uneigentlichen Systeme.

c) Zu K nimmt man drei Paare erster Art, die aber alle gegenüber K in Beziehung zweiter Art stehen. Dieselben stehen dann auch gegenseitig in Beziehung zweiter Art; so dass K wiederum ausgezeichnet auftritt; z. B.

$$K = 12\cdot34\cdot56\cdot78,\ A_1 = 13\cdot57\cdot26\cdot48,\ A_2 = 15\cdot37\cdot24\cdot68,$$
$$B_1 = 16\cdot38\cdot27\cdot45,\ B_2 = 18\cdot36\cdot25\cdot47,$$
$$C_1 = 14\cdot67\cdot28\cdot35,\ C_2 = 17\cdot46\cdot23\cdot58.$$

Von dieser Art gibt es 315·192 Systeme; und zu ihnen gehört auch das von Hesse, Cr. J. 49, angeführte.

d) Zu K nimmt man ein Paar $A_1 A_2$, das mit K ein Tripel erster Art bildet; ferner $B_1 B_2$, die K gegenüber in Beziehung zweiter Art und gepaart stehen, und welche zugleich mit $A_1 A_2$ in Beziehung 2. Art sind; endlich die $C_1 C_2$, welche noch in Beziehung erster Art (nicht gepaart) zu K stehen; z. B.

$$K = 12\cdot34\cdot56\cdot78,\ A_1 = 13\cdot24\cdot57\cdot68,\ A_2 = 14\cdot23\cdot58\cdot67,$$
$$B_1 = 15\cdot16\cdot35\cdot36,\ B_2 = 25\cdot26\cdot45\cdot46,$$
$$C_1 = 37\cdot38\cdot47\cdot48,\ C_2 = 17\cdot18\cdot27\cdot28.$$

Auch hierbei ist K ausgezeichnet; und es gibt 315·144 derartige Systeme.

e) Zu einem Tripel erster Art $(KA_1A_2)_1$ nimmt man eines der am Anfange von Nr. 2 erwähnten Quadrupel $(B_1B_2\,C_1C_2)_1$, das aber nicht, wie dort, zu $(KA_1A_2)_1$ gehört, sondern durchaus mit diesem in Beziehung zweiter Art stehe; wie etwa:

$$K = 12\cdot34\cdot56\cdot78,\ A_1 = 13\cdot24\cdot57\cdot68,\ A_2 = 14\cdot23\cdot58\cdot67,$$
$$B_1 = 15\cdot38\cdot27\cdot46,\ B_2 = 18\cdot35\cdot26\cdot47,$$
$$C_1 = 16\cdot37\cdot28\cdot45,\ C_2 = 17\cdot36\cdot25\cdot48.$$

Jedem Tripel zugeordnet, hat man hier 8 Quadrupel; da in dem System ein Tripel erster Art ausgezeichnet ist, so gibt es 63·15·8 derartige Systeme.

Die bezeichneten Systeme erschöpfen alle existirenden Siebenkegelschnittsysteme, wie man, von dem Zerlegungsschema von K ausgehend, leicht beweist.

Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. O. mit 3 Variabeln.

Von **Eduard v. Weber.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Die Frage nach den gemeinsamen Integralen zweier partieller Differentialgleichungen 2. O. in 3 Variabeln ist von den Herren Valyi[1]) und Bianchi[2]) untersucht worden. Nach einer neuen, sehr einfachen Methode, welche namentlich mehrere der Bianchi'schen Fallunterscheidungen unnöthig macht, leiten wir im Folgenden die Hauptergebnisse der genannten Untersuchungen noch einmal ab, und wenden uns dann zum Studium eines besonderen Falles,[3]) der in der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung eine bekannte[4]) wichtige Rolle spielt.

I.

Wir bezeichnen wie üblich mit $p\,q$, $r\,s\,t$, $u\,v\,w\,\tilde{\omega}$ bez. die ersten, zweiten, dritten Ableitungen von z nach x und y. Jedes gemeinsame Integral der beiden Gleichungen:

---

[1]) Crelle's J., Bd. 95, p. 99 f.

[2]) Atti d. R. Acc. dei Lincei, Rendiconti (4) II, Nota I p. 218, N. II p. 237, N. III p. 307.

[3]) Bianchi l. c., Nota II.

[4]) Vgl. Darboux, Ann. de l'Ec. Norm. 7, 1870.

$$F\,(xyzpqrst) = C \tag{1}$$
$$F'\,(xyzpqrst) = C' \tag{2}$$

wo C, C' willkürliche Constante bezeichnen, befriedigt dann auch ein System Pfaff'scher Gleichungen von der Form:

$$\begin{gathered} dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} dr = u\,dx + v\,dy, \quad ds = v\,dx + w\,dy, \\ dt = w\,dx + \tilde{\omega}\,dy \end{gathered} \tag{4}$$

worin unter $uvw\tilde{\omega}$ gewisse Functionen von $x \dots t$ zu verstehen sind, die den Gleichungen

$$M + Ru + Sv + Tw = 0 \tag{5}$$
$$N + Rv + Sw + T\tilde{\omega} = 0 \tag{6}$$
$$M' + R'u + S'v + T'w = 0 \tag{7}$$
$$N' + R'v + S'w + T'\tilde{\omega} = 0 \tag{8}$$

genügen; dabei ist

$$M = X + pZ + rP + sQ; \quad N = Y + qZ + sP + tQ$$
$$M' = X' + \dots, \quad N' = Y' + \dots, \quad X = \frac{\partial F}{\partial x} \dots, \quad T' = \frac{\partial F'}{\partial t}.$$

Sind die Gleichungen (5) .. (8) linear unabhängig, hat man aber identisch:

$$\begin{vmatrix} R & S & T & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R' & S' & T' & 0 \\ 0 & R' & S' & T' \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

so existirt augenscheinlich kein gemeinsames holomorphes Integral von (1), (2). Besteht (9) nicht identisch, so sind $u \dots \tilde{\omega}$ vermöge (5) .. (8) als Functionen von $x \dots t$ bestimmt, und die Bedingungen dafür, dass das System (3), (4) unbeschränkt integrabel sei, lauten

$$D_x(v) - D_y(u) = D_x(w) - D_y(v) = D_x(\tilde{\omega}) - D_y(w) = 0 \tag{10}$$

worin

$$D_x(f) \equiv \Delta_x f + u\frac{\partial f}{\partial r} + v\frac{\partial f}{\partial s} + w\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$D_y(f) \equiv \Delta_y f + v\frac{\partial f}{\partial r} + w\frac{\partial f}{\partial s} + \tilde{\omega}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Delta_x(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$\Delta_y(f) = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}$$

gesetzt ist.

Indem man aber (5) mit D_y, (6) mit D_x differentiirt und subtrahirt, erhält man zufolge einfacher Rechnung:

$$R(D_y(u) - D_x(v)) + S(D_y(v) - D_x(w)) + T(D_y(w) - D_x(\tilde{\omega})) = 0. \tag{11}$$

ebenso aus (7) und (8):

$$R'(D_y(u) - D_x(v)) + S'(D_y(v) - D_x(w)) + T'(D_y(w) - D_x(\tilde{\omega})) = 0 \tag{12}$$

sodass die Bedingungen (10) nur mit einer einzigen äquivalent sind. Diese eine Bedingung, welche die 2. Ableitungen von F und F' nach $x \dots t$ linear enthält, ist nothwendig und hinreichend dafür, dass jede der ∞^1 Gleichungen (1) mit jeder der ∞^1 Gleichungen (2) ein Integral mit 4 Constanten gemein habe; dieses Integral ergibt sich durch Integration von (3), (4) unter Berücksichtigung der aus (1), (2) folgenden Anfangsbedingungen. Die willkürliche Annahme von C' liefert dann für jede der Gleichungen (1), die von C für jede Gleichung (2) ein vollständiges Integral.

Verschwinden dagegen alle 4-gliedrigen Determinanten der Matrix von (5) .. (8) identisch, was wir durch

$$\begin{Vmatrix} M & R & S & T & 0 \\ N & 0 & R & S & T \\ M' & R' & S' & T' & 0 \\ N' & 0 & R' & S' & T' \end{Vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

ausdrücken, ohne dass jedoch alle 3-gliedrigen Unterdeterminanten von (9) zu Null werden, so können wir aus (5)..(8) drei der Grössen $u..\tilde{\omega}$ durch eine unter ihnen, etwa $\tilde{\omega}$, ausdrücken. Die eine, in (10) enthaltene Bedingung stellt dann eine partielle Differentialgleichung I. O. mit der unbekannten Function $\tilde{\omega}$ und den unabhängigen Variabeln $x..t$ dar; ist deren allgemeines Integral gefunden, so bleibt noch (3), (4) zu integriren; also:

„Das identische Bestehen der Relationen (13) hat zur Folge, dass die Gleichungen (1), (2) ein gemeinsames Integral besitzen, das von einer willkürlichen Function abhängt und durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen gefunden werden kann."

II.

Ehe wir in die genauere Untersuchung des Falles (13) eintreten, schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Zwei Flächenelemente II. O.[1]) $E(x..t)$ und $E'(x+\delta x..t+\delta t)$ heissen nach Lie vereinigt liegend, wenn sie die Relationen

$$\delta z = p\delta x + q\delta y,\ \delta p = r\delta x + s\delta y,\ \delta q = s\delta x + t\delta y \qquad (14)$$

befriedigen; eine Serie von ∞^1 Elementen II. O., deren jedes mit einem benachbarten vereinigt liegt, heisst ein Streifen II. O. Eine infinitesimale Transformation $X(f)$ der Elemente

[1]) Vgl. meine Arbeit: Theorie der Flächenelemente des Raumes von 3 Dimensionen, Math. Ann., Bd. 44, p. 458 ff.

$x..t$ des Raumes heisse eine infinitesimale Streifentransformation, wenn sie jedes Element in ein benachbartes mit ihm vereinigt liegendes überführt. Definiren wir fortan das Symbol d durch die Identität

$$df = X(f)\,\delta\lambda, \tag{15}$$

so hat man identisch:

$$dz = p\,dx + q\,dy;\quad dp = r\,dx + s\,dy;\quad dq = s\,dx + t\,dy \tag{16}$$

und $X(f)$ hat die Form

$$X(f) = \xi\Delta_x(f) + \eta\Delta_y(f) + \varrho\frac{\partial f}{\partial r} + \sigma\frac{\partial f}{\partial s} + \tau\frac{\partial f}{\partial t} \tag{17}$$

wo $\xi\eta\varrho\sigma\tau$ Functionen von $x..t$ bedeuten. Die ∞^7 Streifen, welche sich durch Integration der Gleichungen:

$$\begin{aligned} &dx : dy : dz : dp : dq : dr : ds : dt \\ &= \xi : \eta : \xi p + \eta q : \xi r + \eta s : \xi s + \eta t : \varrho : \sigma : \tau \end{aligned} \tag{18}$$

ergeben, sollen die Bahnstreifen von $X(f)$ heissen.

Zwei vereinigte Elemente $x..t$ und $x + \delta x..t + \delta t$ werden durch $X(f)$ in benachbarte Elemente $x + dx..$ und $x + \delta x + d(x + \delta x)\ldots$ übergeführt, welche wieder vereinigt liegen, wenn man hat:

$$\left.\begin{aligned} d\delta z &= dp\,\delta x + dq\,\delta y + p\,d\delta x + q\,d\delta y \\ d\delta p &= dr\,\delta x + ds\,\delta y + r\,d\delta x + s\,d\delta y \\ d\delta q &= ds\,\delta x + dt\,\delta y + s\,d\delta x + t\,d\delta y \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Subtrahirt man von diesen Gleichungen bez. die folgenden drei:

$$\left.\begin{aligned} d\delta z &= \delta p\,dx + \delta q\,dy + p\,d\delta x + q\,d\delta y \\ d\delta p &= \delta r\,dx + \delta s\,dy + r\,d\delta x + s\,d\delta y \\ d\delta q &= \delta s\,dx + \delta t\,dy + s\,d\delta x + t\,d\delta y \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

welche ausdrücken, dass die Elemente $x + \delta x .. t + \delta t$ und $x + \delta x + d(x+\delta x) ... t + \delta t + d(t+\delta t)$ vereinigt liegen, so folgen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} dp\delta x - \delta p dx + dq\delta y - \delta q dy &= 0 \\ dr\delta x - \delta r dx + ds\delta y - \delta s dy &= 0 \\ ds\delta x - \delta s dx + dt\delta y - \delta t dy &= 0 \end{aligned}$$

von denen die erste wegen (14), (16) von selbst erfüllt ist. Die andern beiden schreiben wir abkürzend:

$$(d\delta)_1 = 0, \qquad (d\delta)_2 = 0. \tag{21}$$

Da umgekehrt aus (21) wegen (20) die Relationen (19) folgen, so haben wir den Satz:

„Damit die infinitesimale Streifentransformation $X(f)$ 2 benachbarte vereinigt liegende Elemente wieder in solche überführe, ist nothwendig und hinreichend, dass jene Elemente den Bedingungen (21) genügen, wo d durch (15) definirt ist."

Es erhebt sich nun die Frage: Wie muss $X(f)$ beschaffen sein, damit irgend 2 benachbarte Elemente, die (14), (21) befriedigen, in benachbarte vereinigte Elemente übergeführt werden, die wiederum den Relationen (21) genügen? Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass man identisch habe:

$$\begin{aligned} d(d\delta)_1 &= \lambda_1 (d\delta)_1 + \lambda_2 (d\delta)_2 \\ d(d\delta)_2 &= \mu_1 (d\delta)_1 + \mu_2 (d\delta)_2 \end{aligned} \tag{22}$$

unter $\lambda_1 .. \mu_2$ unbestimmte Factoren der Grössenordnung $\delta\lambda$ verstanden. Führt man die Differentiationen links mit Rücksicht auf (14), (15) aus, und vergleicht die Coefficienten von δx, δy, δr, δs, δt auf beiden Seiten, so folgt, wenn partielle Differentialquotienten durch untere Indices angedeutet werden:

$$\left.\begin{aligned}
X\varrho + \varrho\Delta_x(\xi) - \xi\Delta_x(\varrho) + \sigma\Delta_x(\eta) - \eta\Delta_x(\sigma) \\
= \lambda_1\varrho + \lambda_2\sigma \\
X\sigma + \varrho\Delta_y(\xi) - \xi\Delta_y(\varrho) + \sigma\Delta_y(\eta) - \eta\Delta_y(\sigma) \\
= \lambda_1\sigma + \lambda_2\tau \\
-X\xi + \varrho\xi_r - \xi\varrho_r + \sigma\eta_r - \eta\sigma_r = -\lambda_1\xi \\
-X\eta + \varrho\xi_s - \xi\varrho_s + \sigma\eta_s - \eta\sigma_s = -\lambda_1\eta - \lambda_2\xi \\
\varrho\xi_t - \xi\varrho_t + \sigma\eta_t - \eta\sigma_t = -\lambda_2\eta
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned}
X\sigma + \sigma\Delta_x(\xi) - \xi\Delta_x(\sigma) + \tau\Delta_x(\eta) - \eta\Delta_x(\tau) \\
= \mu_1\varrho + \mu_2\sigma \\
X\tau + \sigma\Delta_y(\xi) - \xi\Delta_y(\sigma) + \tau\Delta_y(\eta) - \eta\Delta_y(\tau) \\
= \mu_1\sigma + \mu_2\tau \\
\sigma\xi_r - \xi\sigma_r + \tau\eta_r - \eta\tau_r = -\mu_1\xi \\
-X\xi + \sigma\xi_s - \xi\sigma_s + \tau\eta_s - \eta\tau_s = -\mu_1\eta - \mu_2\xi \\
-X\eta + \sigma\xi_t - \xi\sigma_t + \tau\eta_t - \eta\tau_t = -\mu_2\eta
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Da es sich augenscheinlich um eine Eigenschaft der Bahnstreifen handelt, so kann man unbeschadet der Allgemeinheit $\xi = 1$ setzen, wodurch sich obige Formeln etwas vereinfachen.

Genügen die $\xi, \eta, \varrho, \sigma, \tau$ identisch den Relationen, welche durch Elimination von $\lambda_1\,\lambda_2\,\mu_1\,\mu_2$ aus (23) (24) folgen, so hat das Bahnstreifensystem (18) offenbar folgende Eigenschaft:

„Hat man einen beliebigen Streifen S, der den Differentialgleichungen (21) genügt, so bilden die ∞^1 Streifen des Systems (18), welche bez. von den ∞^1 Elementen von S auslaufen, eine Fläche, da ja je 2 aufeinanderfolgende dieser Streifen nach ihrer ganzen Ausdehnung vereinigt liegen."

Wir nennen ein solches System von ∞^7 Streifen „ein unbeschränkt integrables Streifensystem."

III.

Wir setzen in (17) $\xi = 1$, $\eta = \Lambda$, und legen der im Uebrigen beliebigen Streifentransformation $X(f)$ nur die Bedingung auf, dass die 2 totalen Differentialgleichungen (21) eine integrable Combination liefern sollen, d. h. eine Relation der Form:

$$\delta F = \varrho_1 (d\delta)_1 + \varrho_2 (d\delta)_2 \tag{25}$$

erfüllt sei, worin F eine Funktion von $x..t$ bedeutet, und unter Gebrauch der Abkürzungen pag. 102:

$$\delta F = M\delta x + N\delta y + R\delta r + S\delta s + T\delta t$$

gesetzt ist; $\varrho_1 \varrho_2$ sind unbestimmte Faktoren der Grössenordnung $1:\delta\lambda$.

Indem man in (25) die Coefficienten der willkürlichen Differentiale auf beiden Seiten gleichsetzt und ϱ_1, ϱ_2 eliminirt, folgen die Bedingungen

$$R\Lambda^2 - S\Lambda + T = 0, \tag{26}$$

$$\frac{dy}{dx} = \Lambda, \tag{27}$$

$$\left. \begin{aligned} R\frac{dr}{dx} + (S - R\Lambda)\frac{ds}{dx} + M = 0 \\ R\frac{ds}{dx} + (S - R\Lambda)\frac{dt}{dx} + N = 0 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

Dies sind aber zusammen mit

$$\frac{dz}{dx} = p + q\Lambda, \quad \frac{dp}{dx} = r + s\Lambda, \quad \frac{dq}{dx} = s + t\Lambda \tag{27a}$$

nichts anderes als die Charakteristikengleichungen der partiellen Differentialgleichung (1). Da aus (26), (27), (28) umgekehrt (25) folgt, so gilt der Satz:

„Die Bedingung, dass die Gleichungen (21) eine integrable Combination δF zulassen, ist äquivalent mit der andern, dass die Bahnstreifen von $X(f)$ den Charakteristikengleichungen von $F = C$ genügen."

Die Gleichungen (28) sind völlig äquivalent mit den folgenden:

$$\frac{dr}{dx} = u + v\Lambda, \quad \frac{ds}{dx} = v + w\Lambda, \quad \frac{dt}{dx} = w + \tilde{\omega}\Lambda \qquad (29)$$

unter $u \ldots \tilde{\omega}$ die allgemeinsten Funktionen von $x \ldots t$ verstanden, die (5), (6) befriedigen; berechnet man nämlich uvw aus (29) und substituirt in (5), (6), so kommen gerade wieder die Gleichungen (28); umgekehrt, sind die letzteren befriedigt, so genügen alle Werthsysteme $uvw\tilde{\omega}$, die (29) erfüllen, auch den Relationen (5), (6).

Des weiteren verlangen wir jetzt, dass die Gleichungen (21) noch eine zweite, von (25) unabhängige integrable Combination zulassen, d. h. dass man ausser (25) noch habe:

$$\delta F' = \varrho_1'(d\delta)_1 + \varrho_2'(d\delta)_2 \qquad (30)$$

mit der Bedingung

$$\varrho_1 \varrho_2' - \varrho_2 \varrho_1' \neq 0 \qquad (31)$$

Es folgt zunächst, dass die Gleichung

$$R'\Lambda^2 - S'\Lambda + T' = 0 \qquad (32)$$

mit (26) eine Wurzel gemein hat, die wir gerade mit Λ bezeichnen wollen; es besteht also (9) identisch. Ferner müssen alle Systeme von Funktionen $u \ldots \tilde{\omega}$, die (29), mithin nach obiger Bemerkung auch (5), (6) erfüllen, nun auch den Relationen (7), (8) genügen; da die Gleichungen (5)..(8) somit eine der Grössen $u \ldots \tilde{\omega}$ ganz willkürlich lassen, müssen überhaupt alle 4-gliedrigen Determinanten (13) verschwinden. Umgekehrt, ist letzteres der Fall, ohne dass alle 3-gliedrigen

Determinanten von (9) null werden, so kann man aus dreien der Gleichungen (5)..(8), etwa aus (5), (6), (7) die uvw in der Form berechnen:

$$u = k_1 - \Lambda^3 \tilde{\omega}, \quad v = k_2 + \Lambda^2 \tilde{\omega}, \quad w = k_3 - \Lambda \tilde{\omega} \qquad (33)$$

wo Λ die wegen (9) vorhandene gemeinsame Wurzel von (26), (32) bedeutet; man erkennt dies leicht durch Anwendung von Sylvester's dialytischer Eliminationsmethode auf (26), (32). Setzt man jetzt

$$\varrho = k_1 + \Lambda k_2, \quad \sigma = k_2 + \Lambda k_3, \quad \tau = k_3 \qquad (34)$$

so genügt das Streifensystem, das durch die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = \Lambda, \quad \frac{dz}{dx} = p + q\Lambda, \quad \frac{dp}{dx} = r + s\Lambda,$$
$$\frac{dq}{dx} = s + t\Lambda, \quad \frac{dr}{dx} = \varrho, \quad \frac{ds}{dx} = \sigma, \quad \frac{dt}{dx} = \tau \qquad (35)$$

definirt ist, wegen (34), (33) den Relationen (29), worin jetzt $u..\tilde{\omega}$ Funktionen von $x..t$ bedeuten, die sowohl (5), (6), als auch (7), (8) befriedigen. Wir haben somit den Satz:

„Das identische Bestehen der Relationen (13) ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Differentialgleichungen (1), (2) ein System von ∞^7 Charakteristiken miteinander gemein haben; dieses System ist durch (35), (34), (33) eindeutig festgelegt."

Setzt man in (27), (27a), (29) für Λ die zweite Wurzel[1]) Λ_1 von (26), so erhält man die Definitionsgleichungen des zweiten Charakteristikensystems von F. Nennen wir einen Streifen der die Differentialgleichung $\delta F' = 0$ befriedigt, kurz einen Streifen von F', so gilt der Satz:

---

[1]) Dass die Gleichungen (26), (32) keine verschwindenden Diskriminanten besitzen, ist, wie man leicht sieht, eine nothwendige Voraussetzung für die Gültigkeit obiger Entwickelungen.

„Die Relationen (13) sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass alle charakteristischen Streifen des 2. Systems von F Streifen von F', sowie alle charakt. Streifen des 2. Systems von F' Streifen von F seien.“ Wegen des völligen Reciprocitätsverhältnisses zwischen F und F' genügt es, den ersten Theil der Behauptung zu erweisen.

Wir haben zu zeigen, dass jede der Gleichungen (5), (6) und:

$$M' + A_1 N' + R' u + (S' + R' A_1) v + (T' + S' A_1) w + T' A_1 \bar{\omega} = 0$$

eine Folge der beiden andern ist. Rändert man aber die Matrix dieser 3 Gleichungen mit der Horizontalreihe N', 0, R', S', T', und der Verticalreihe 0, 0, 0, 1, so folgen nach leichter Umformung die Bedingungen:

$$\begin{Vmatrix} M & R & S & T & 0 & 0 \\ N & 0 & R & S & T & 0 \\ M' & R' & S' & T' & 0 & -A_1 \\ N' & 0 & R' & S' & T' & 1 \end{Vmatrix} = 0$$

welche, wie leicht ersichtlich, mit (13) völlig äquivalent sind, w. z. b. w.

Wir behaupten nun:

„Das gemeinsame Charakteristikensystem (35) von (1), (2) ist ein unbeschränkt integrables Streifensystem.“

Es genügt zunächst den beiden Identitäten (25), (30); ersetzt man darin die δx.. durch die dx.., so folgt:

$$dF = 0, \qquad dF' = 0 \tag{36}$$

Differentiirt man jetzt (25), (30) mit dem Symbol d und beachtet die für jedes f geltende, leicht zu verificirende Identität

$$d(\delta f) - \delta(df) = \frac{\partial f}{\partial p}(d\delta)_1 + \frac{\partial f}{\partial q}(d\delta)_2,$$

so folgt wegen (36):

$$\varrho_1 d(d\delta)_1 + \varrho_2 d(d\delta)_2 + (d\varrho_1 - P)(d\delta)_1 + (d\varrho_2 - Q)(d\delta_2) = 0$$
$$\varrho_1' d(d\delta)_1 + \varrho_2' d(d\delta)_2 + (d\varrho_1' - P')(d\delta)_1 + (d\varrho_2' - Q')(d\delta)_2 = 0$$

woraus sich wegen (31) zwei Identitäten der Form (22) ergeben, w. z. b. w. Die gemeinsamen Integralflächen von (1), (2) werden demnach durch folgenden Process erhalten:

„Man bestimme einen Streifen II. O. S, der den Differentialgleichungen (14), (21) genügt, worin die d durch (35) definirt sind, oder auch (was wegen (25), (30), (31), auf dasselbe herauskommt) irgend einen gemeinsamen Streifen von F und F'; sodann durch Integration von (35) die ∞^1 Streifen, welche bez. von den einzelnen Elementen von S auslaufen und durch sie bez. eindeutig festgelegt sind. Diese ∞^1 Streifen ordnen sich dann zu einer gemeinsamen Integralfläche von (1), (2) zusammen.“

Wir können für den Ausgangsstreifen S y und z als willkürliche Funktionen von x annehmen, ferner in einem beliebigen Punkte der so definirten Raumcurve ein Werthsystem p, q, das die Relation $dz = p\,dx + q\,dy$ befriedigt, was ∞^1 Möglichkeiten bietet; endlich können wir noch für s t beliebige Anfangswerthe festsetzen, wodurch dann auch der Anfangswerth von r bestimmt und vermöge (14), (21) der Raumcurve entlang ein Streifen festgelegt ist. Also:

„Bestehen die Relationen (13), so gehen durch jede Raumcurve ∞^3 Integralflächen von (1), (2) hindurch.“

Soll eine Integralfläche von (1) auch (2) befriedigen, so müssen die auf ihr verlaufenden ∞^3 Streifen des 1. Charakteristikensystems von (1) der Gleichung

$$dF' = 0 \tag{37}$$

genügen; da aber das System der Relationen (27), (27a),

(28), (37) augenscheinlich auf (35) zurückführt, so schliesst man leicht, dass durch unsere Methode alle gemeinsamen Integrale von (1), (2) geliefert werden.

Das Bemerkenswerthe dieser Methode besteht darin, dass sie ein vollkommenes Analogon zu der von Lagrange, Charpit, Monge begründeten, von Lie geometrisch präcisirten Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen I. O. darstellt. In der That lässt sich auch ein grosser Theil der an die genannte Methode sich anschliessenden geometrischen Sätze auf unsern Fall übertragen, was indes hier nicht weiter ausgeführt werden soll. Worauf es uns hier vor Allem ankam, war, den Begriff des unbeschränkt integrabeln Streifensystems aufzustellen und an einem besonders einfachen Falle zu erläutern.

Ueber Blei- und Fahlerz-Gänge in der Gegend von Weilmünster und Runkel in Nassau.[1])

Von F. v. Sandberger.

(Eingelaufen 9. Februar.)

Die fragliche Gegend gehört zu der dem nordwestlichen Abhange des Taunusgebirges vorgelagerten Hügellandschaft, welche vielfache Gesteinswechsel bemerken lässt. Dachschiefer der oberen Abtheilung des Unterdevons (Orthoceras-Schiefer) sind an vielen Orten entwickelt und werden bei Langhecke seit Jahrhunderten abgebaut. Nur zuweilen, z. B. bei Lützendorf nächst Weilmünster, Eufingen und Niederselters enthalten sie Leitversteinerungen (*Orthoceras triangulare* und *commutatum, Goniatites compressus* u. a.), die freilich auch auf grossen Strecken fehlen. Graugrüne ganz in Schalstein umgewandelte Diabastuffe sind ebenfalls sehr häufig und ebenso wie eruptive dichte Diabase für das Vorkommen der Erze von hervorragender Bedeutung.

Eine grosse Anzahl von aufgelassenen Gruben, sowie einige noch im Gange befindliche sind in diesen Gesteinen unter eigenthümlichen Verhältnissen betrieben, wie Verfasser z. Th. noch selbst gesehen hat. Dieselben liegen fast sämmtlich in einem von NO nach SW von Weilmünster bis Weyer

---

[1]) Behufs der geographischen Orientirung empfiehlt sich die der Beschreibung des Bergreviers Weilburg von Fr. Wenckenbach, Bonn 1879, beigefügte Uebersichtskarte.

verlaufenden Zuge. Am besten beobachtet wurde das Vorkommen von Weyer bei Runkel,[1]) welches längere Zeit von dem um den nassauischen Bergbau hochverdienten Geh. Bergrath Fr. Odernheimer geleitet und erst 1846 aufgelassen wurde. Die Schichten streichen hier h. 4—5, die drei Gänge aber h. 7—9, jenseits h. 9 hörte die Erzführung auf. Die Erze waren grossblättriger Bleiglanz mit geringem und Fahlerz mit höherem Silbergehalte. Als Gangarten traten Braunspath und Quarz auf, an letzteren waren die Erze gebunden. Bleiglanz fand sich hauptsächlich, wo der Thonschiefer an dichten Diabas anstiess, Fahlerz dagegen, wo er mit aufgelockertem Schalsteine wechselte, seltener kamen beide Erze gemengt vor. In der Teufe legten sich die Schichten ganz flach und der Diabas wurde immer mächtiger und dichter, während die Gangspalte ganz zusammengedrückt und nur als Besteg erschien. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass der in höherer Teufe vorgefundene Diabas nur Ausläufer eines Stockes in der Teufe darstellte, welcher noch keine Auslaugung erfahren hatte und daher auch keine Erze liefern konnte. Was ich in der letzten Zeit des Betriebs (1840) selbst auf der Grube Mehlbach gesehen habe, stimmt ganz mit Odernheimer's Bericht über Weyer überein, auch hier erschien der damals betriebene Erzgang in dichtem Diabase, dessen Klüfte zuweilen mit Verwachsungen von blauem Asbest und Kalkspath ausgefüllt waren, völlig zerdrückt und nur als Besteg. Es unterliegt also keinem Zweifel, dass beidemale die Aufreissung der Gangspalte in dem überaus zähen Diabase aus mechanischen Gründen unmöglich war und selbstverständlich auch eine Injection der Mineralien der Erzgänge von unten im Sinne der damals noch allgemein angenommenen Erzgang-Theorie ganz unzulässig erscheint.

---

[1]) Odernheimer in s. Zeitschr. Das Berg- und Hüttenwesen im Herzogthum Nassau. I. S. 90 f.

Durchaus analog verhalten sich die Fahlerz führenden Gänge der Gruben Eduard und Alter Mann bei Langhecke, Goldkante bei Weinbach, vielleicht auch der Grube Laubus bei Haintchen.

Die Grube Alter Mann resp. die zu ihr gehörende Grube Rothenküppel bietet das einzige mir bekannte Beispiel von höflichem, d. h. mit Erzen imprägnirtem Nebengestein. Der Schalstein im Hangenden des Bleiglanzganges enthält nämlich eingesprengte und angeflogene Kupfererze, besonders Kupferlasur[1]) in Menge; doch kommen auch kleine Partien vor, welche ganz den Habitus von aus Fahlerz entstandenem Ziegelerz besitzen, wie ich s. Z. selbst gesehen habe.

Die Mineralien der Gänge zeigen keine bestimmte Reihenfolge, besonders der Braunspath, welcher in der Regel unter, aber wie auch anderwärts stellenweise auch über dem Quarze erscheint. Im Ganzen kommen folgende vor:

1. **Braunspath** in schwachgekrümmten Rhomboëdern von 2,94 spec. Gew. oder derben Massen, im frischen Zustande von rein weisser Farbe. Auf den Halden geht die Farbe sehr bald in das Gelbliche und schliesslich Tiefbraun über, weil Eisen- und Manganoxydul in höhere Oxydationsstufen umgewandelt werden. Nach dem spec. Gew. würde der Braunspath Breithaupt's Tautoklin zunächst stehen.

2. **Kalkspath** findet sich sparsam in kleinen wasserhellen Krystallen R^3. R über dem Braunspath. Ich bin sehr geneigt, ihn für ein Zersetzungsprodukt des letzteren anzusehen, welches bei der Oxydation der übrigen Bestandtheile abgeschieden worden ist.

3. **Quarz.** Ist einer der wichtigsten Bestandtheile der Gänge und findet sich entweder derb und von grauweisser

---

[1]) Wenckenbach, Jahrb. d. nass. Vereins für Naturkunde. XXXI u. XXXII. S. 100.

Farbe oder in farblosen kleinen Krystallgruppen $\infty R. \frac{+}{} R$, welche nicht selten krystallisirtes Fahlerz umschliessen.

4. **Fahlerz** häufig krystallisirt in den Formen $\frac{O}{2} \cdot \frac{2O2}{2} \cdot \infty O$, wozu selten noch $- \frac{2O2}{2}$ hinzukommt, oder derb. Das Mineral von 4,82 spec. Gewicht ist stahlgrau mit rein schwarzem Strich. Es gibt vor dem Löthrohre sehr deutliche Reactionen auf Antimon, Arsen und schwache auf Wismuth; Kobalt ist in demselben nicht enthalten, sondern nur Kupfer, Eisen, Zink und wechselnde Quantitäten von Silber, welche zuweilen bis zu 1 proc. steigen. Es handelt sich daher um ein Antimon-Arsen-Fahlerz, welches den Vorkommen von Müsen bei Siegen und Brixlegg zunächst stehen dürfte. Wie ersteres zeigt es auch zuweilen einen dünnen Ueberzug von Kupferkies, über dessen Bedeutung ich mich wiederholt ausgesprochen habe.[1]) Von den Producten der Oxydation des Fahlerzes wird später die Rede sein.

5. **Antimonsilberblende** (dunkles Rothgültigerz). Krystalle dieses stets über Fahlerz auftretenden Erzes sind sehr selten, doch fand ich deutliche Säulenflächen an Stücken von Grube Mehlbach, aber die Enden waren nicht gut ausgebildet. Derbes Rothgültigerz ist in früheren Jahrhunderten offenbar auf mehreren Gruben getroffen worden. So berichtet Wenckenbach[2]) nach den Acten über eine 2½ Centner schwere Masse, welche um 1600 auf der Grube Altermann bei Langhecke eingebrochen ist. Von Weyer wird kein Rothgültigerz erwähnt.

6. **Bleiglanz.** Das Mineral ist auf allen Gängen und zwar in grossblättrigen Aggregaten vorgekommen, aber in grösserer Menge nur zu Weyer am Contacte von Thonschiefer

[1]) Untersuchungen über Erzgänge. II. S. 289 f.

[2]) Jahrb. d. nass. Vereins f. Naturkunde. XXXI. u. XXXII. S. 196.

mit dichtem Diabas, sowie in faustgrossen Knollen in Braunspath eingewachsen auf der Grube Goldkante bei Weinbach unweit Weilburg; auf der Grube Mehlbach hat er nur eine untergeordnete Rolle gespielt. Krystalle sind mir nicht zu Gesicht gekommen. Der Silbergehalt ist gering, nur 1 Loth im Centner.

7. **Kupferkies.** In geringer Menge derb und zuweilen in verzerrten quadratischen Sphenoiden krystallisirt auf Quarz, sowie sehr selten als dünner Ueberzug auf Fahlerzkrystallen auf Grube Mehlbach. Eine bergmännische Wichtigkeit hat er nicht besessen.

Zersetzungs-Producte.

a) von Fahlerz.

8. **Gelbeisenerz.** Wie an vielen anderen Orten beginnt auch an den Fahlerzen der hier besprochenen Erzgänge die Zersetzung mit der Bildung einer Menge von Klüftchen, in welchen schwefelsaures Eisenoxydul und Kupferoxydul enthalten ist und durch destillirtes Wasser ausgezogen werden kann. Das Erz geht dann in eine matte schmutziggrüne Masse und schliesslich in eine ockergelb gefärbte erdige Substanz über, welche weder Kupferoxyd, noch Arsen oder Antimon enthält, wohl aber Eisenoxyd und viel Wasser, daher als Gelbeisenerz bezeichnet werden muss. Es ist der letzte Rest des Erzes, aus welchem auch Arsen und Antimon durch alkalische Gewässer ausgelaugt worden sein müssen; Ziegelerz kommt nicht vor.

9. **Kupferschaum** in blätterigen Partien bedeckt zuweilen die eben erwähnte graugrüne Schicht des Fahlerzes, ist aber bisher nur auf der Grube Mehlbach als Seltenheit gefunden worden.

10. **Thrombolith.** Aus dem Gemenge mit arsensaurem Kupferoxyd scheidet sich stellenweise ein mattgrünes, halb-

erdiges Mineral aus, welches aus Kupferoxyd, Antimonsäure und Wasser mit wenig Eisenoxyd besteht und ganz mit dem Thrombolith von Rezbanya übereinstimmt.

11. **Kupferlasur.** Ueberdeckt die gelbe Zersetzungsschicht in kugeligen und traubigen Aggregaten, die zuweilen in deutliche Krystalle $\infty \bar{P} \infty \cdot 0P \cdot -P \cdot \infty P$ auslaufen. Besonders schön von Grube Eduard bei Langhecke.

12. **Malachit** in kleintraubigen Aggregaten findet sich in geringerer Menge zwischen und über der Kupferlasur und muss als jünger wie diese gelten. Die kohlensauren Kupferoxyde sind daher sehr spät, vermuthlich durch Zersetzung des Vitriols durch kohlensauren Kalk des Braunspaths ausgefällt worden.

13. **Kupfermanganerz** von schwarzer Farbe und braunem Strich tritt ebenfalls in kleintraubiger Form als jüngstes Kupfererz über den bisher erwähnten Mineralien auf, genau so wie bei Saalfeld, Kamsdorf und Freudenstadt.

b) von Bleiglanz.

14. **Weissbleierz.** Ist auf Grube Mehlbach in kleinen bündelartig zusammengehäuften Aggregaten in geringer Menge gefunden worden.

15. **Grünbleierz.** In dünnen grünen Ueberzügen auf Quarz gleichfalls auf Grube Mehlbach.

16. **Mennige** in deutlichen Pseudomorphosen nach Weissbleierz, welche in zerfressenem Quarze eingewachsen waren. Ich habe diese merkwürdige und seltene Pseudomorphose schon 1845[1]) bekannt gemacht, mich aber einer Erklärung derselben enthalten. Auch jetzt bin ich noch nicht zu einer solchen gelangt, da ich mich den von Blum[2]) gegen eine

---

[1]) Jahrb. f. Min. 1845. S. 577.

[2]) I. Nachtrag zu den Pseudomorphosen. S. 92.

Entstehung derselben durch Einwirkung von Hitze vorgebrachten Bedenken nicht verschliessen kann. Dass in uralter Zeit einmal Betrieb durch Feuersetzen stattgefunden haben könnte, ist ja nicht zu leugnen, aber eine so schöne Erhaltung der Form nur denkbar, wenn die Wärme allmählich auf das von Quarz umschlossene Weissbleierz eingewirkt hätte. Leider besitze ich das Belegstück nicht mehr. Solche von anderen Fundorten, die ich untersucht habe, zeigen keine Erscheinungen, welche auf Einwirkung hoher Temperatur deuten.

Wenn man sich die Art der Ausfüllung der Gänge klar zu machen sucht, so ist es vor Allem nöthig, die Bestandtheile der Nebengesteine in Betracht zu ziehen.

In erster Linie sind die Schalsteine näher zu charakterisiren. Von diesen liegt zwar eine Anzahl von Analysen von Neubauer und Dollfus[1]) vor, wobei aber nur die bei gewöhnlichen quantitativen Analysen übliche Menge von 1—1½ g untersucht wurde; Schwermetalle, Antimon und Arsen sind in diesen gewöhnlich nicht berücksichtigt. Allein das constante Auftreten von Beschlägen secundärer Kupfererze in den Schalsteinen und das Gebundensein der Kupferkiesgänge an sie hatte mich schon 1852[2]) veranlasst, den Kupfergehalt des Nebengesteins als Quelle dieser metallischen Ausscheidungen zu bezeichnen. Dieser ist nun durch Analysen mit 10—12 g Substanz unzweifelhaft nachgewiesen worden, aber daneben auch in einigen ein solcher von Antimon, Arsen und Zink, d. h. sämmtliche Bestandtheile des Kupferkieses und des Fahlerzes. Um auf Silber zu prüfen, hätte noch eine weit grössere Menge Schalstein in Arbeit genommen werden müssen, da es auch in den Fahlerzen nur in geringer Menge auftritt. Trotzdem ist aber

---

1) Jahrb. d. nass. Vereins f. Naturkunde. X. S. 49 ff.

2) Jahrb. d. nass. Vereins f. Naturkunde. VIII. S. 6.

sein Vorkommen nicht zweifelhaft und seine locale Concentration zu Rothgültigerz augenfällig. Dass das Fahlerz in den Gängen an Schalstein als Nebengestein gebunden war, ergibt sich aus obigen Bemerkungen als nothwendig. Das zur Umwandlung der Oxyde in Schwefelmetalle nöthige schwefelsaure Natron fehlt in keinem Schalstein und organische Substanz ist ja in allen vorhanden, welche einigermassen zersetzt erscheinen.

Anders verhält sich der Bleiglanz, welcher vorzugsweise da einbrach, wo Thonschiefer das Nebengestein bildete. Es erscheint auffallend, dass die Schalsteine kein Blei enthalten, während dasselbe doch in Kalkspathklüftchen jüngerer Diabase z. B. in der Gegend von Weilburg und Diez häufig genug als Bleiglanz in Begleitung von Zinkblende und Kupferkies beobachtet wird, aber die Thatsache bleibt desshalb doch bestehen. Dagegen ist Blei in den Orthocerasschiefern und auch älteren (Rhipidophyllen-)Schiefern der Lahngegend sehr verbreitet, während Kupfer in diesen nur untergeordnet auftritt. Es wird das wohl der Grund sein, warum Bleiglanz vorzugsweise in den Gangklüften zwischen Thonschiefer und dichtem Diabase auftrat und nur ausnahmsweise mit Fahlerz zusammen vorkam.

Betrachtet man ferner die Gangarten, so lässt sich im Allgemeinen behaupten, dass Braunspath schon in einer frühen Periode der Auslaugung des Nebengesteins reichlich gebildet wurde, da er schon als solcher in dem Schalstein vorhanden war, während Quarz erst bei sehr starkem Angriffe des Nebengesteins aus dessen Silicaten abgeschieden werden konnte, wobei auch die schwermetallischen Bestandtheile desselben in Freiheit gesetzt und auf bekannte Weise in Schwefelmetalle umgesetzt wurden. Dass dieselben in der Regel erst mit dem Quarze auf der Gangspalte erscheinen, ist also sehr erklärlich.

Vergleicht man andere Gänge, so erscheint das hier

geschilderte Vorkommen gewissermassen als eine Miniaturausgabe der an Diabas mit silberhaltigem Augit (0,001 Silber) gebundenen weltberühmten Gänge von Andreasberg am Harze; auch mit Přibram bestehen gewisse Analogien. Entfernter sind schon diejenigen mit dem Wolfacher Wenzelgange, da zwar die Art der Ausfüllung, nicht aber auch die Lagerungsverhältnisse mit den nassauischen Uebereinstimmung bemerken lassen.

Die Ausbeute war im vorigen Jahrhundert nicht unbeträchtlich und vermuthlich durch häufige Einbrüche von Rothgültigerz bedingt, die aktenmässig festgestellt sind; von der Grube Mehlbach gibt es auch eine hübsche Ausbeutemünze mit dem Bilde des damaligen Regenten, Fürsten Carl August von Nassau-Weilburg. Gegenwärtig würde eine Wiederaufnahme des Bergbaues angesichts des ungünstigen Verhaltens der Gänge in der Teufe und des tiefgesunkenen Preises des Silbers keine Aussicht auf Erfolg haben.

Ueber Leucocytenwanderung in den Schleimhäuten des Darmkanales.

(Mit 17 Figuren auf Taf. I u. II.)

Von N. Rüdinger.

(Eingelaufen 6. April.)

I. Umwandlung der Lieberkühn'schen Drüsen durch Leucocyten beim Hunde.

In meinem Aufsatz über die Umbildung der Lieberkühnschen Drüsen beim Menschen[1]) habe ich zu zeigen versucht, dass überall dort in der Darmschleimhaut, wo Leucocytenfollikel vorhanden sind, die Lieberkühn'schen Drüsen vollständig fehlen. Ich suchte zu zeigen, dass die Follikel der Darmschleimhaut, indem dieselben aus der Tunica propria mucosae, sich vergrössernd, vorrücken, die Lieberkühn'schen Drüsen derart umwandeln, dass aus den Cylinderepithelien der Drüsen Rundzellen werden, die sich von den Leucocyten nur äusserst schwer unterscheiden lassen.

Diesem Vorgang, der sich in dem Dünn- und Dickdarm des Menschen, insbesondere in dessen Wurmfortsatz unausgesetzt vollzieht, konnte erst dann eine Bedeutung zugesprochen werden, wenn ein ähnliches Verhalten zwischen

---

[1]) Sitzungsberichte der math.-phys. Classe der K. b. Akademie der Wiss. 1891, Bd. XXI.

den Leucocyten und den Lieberkühn'schen Drüsen auch bei den Thieren nachgewiesen ist.

In meinen Figuren 12 und 13 habe ich dieselben Veränderungen, die sich in der Schleimhaut des Darmes beim Menschen vorfinden, in genauer Copie vom Hundedarm zur Darstellung gebracht.

An der Abbildung (Fig. 12) zeigte ich im Hundedarm, und zwar im Wurmfortsatz, eine Schleimhautbucht mit normal besetzten Cylinderepithelien an der freien Oberfläche (Fig. 12, Zahl 1.) An die Epithelien der Bucht grenzt ein Leucocytenhaufen an, der bis zur Cylinderepithellage vorgerückt ist (2). Während zu beiden Seiten der Wanderzellengruppe viele normale Lieberkühn'sche Drüsen auf dem Quer- oder Schiefschnitt getroffen sind, sieht man in dem Leucocytenhaufen nur vier Lieberkühn'sche Drüsen, welche kein normales Aussehen darbieten. Dieselben sind vergrössert, weil ihr Zellenmaterial in Unordnung gerathen ist. Die Cylinderzellen sind theilweise gelockert und ihre Kerne liegen nicht mehr in einer Reihe, sondern sie sind unregelmässig angeordnet (Fig. 12, Zahl 5, 6 und 7).

Dass die Wanderzellen schon in der Nähe durch die Darmschleimhaut durchgedrungen sind, erkennt man an jener Masse, welche bei der Zahl 8 und 9 angegeben ist. Dieselbe zeigt bedeutende Verkleinerungen und Zerfall der lymphoiden Zellen.

Von einer anderen Stelle des Hundedarmes wurde die Fig. 13 gewonnen. Die Leucocyten dringen ebenfalls gegen die Darmschleimhaut vor, und nachdem dieselben die Lieberkühn'schen Drüsen erreicht haben, beginnt durch das Eindringen derselben zwischen die Cylinderepithelien der Drüsen zunächst die Lockerung. Die Kittsubstanz löst sich und die Epithelcylinder werden zu Rundzellen.

Während an der Schleimhautseite bei der Zahl 1 und 2 die Cylinderzellen noch geordnet neben einander stehen,

zeigen sich die gegenüberstehenden Gruppen schon so verändert, dass dieselben kaum mehr als Cylinderepithelzellen erkannt werden. Bei der Zahl 3 sind fast alle Epithelien so formell umgeändert, dass dieselben einen ovalen Kranz von mehr oder weniger vollständig umgewandelten Rundzellen darstellen. Man darf wohl sagen, dieselben haben Leucocyten-Eigenschaften angenommen. Bei der Zahl 2 ist die Tunica propria der Drüsen mit ihren Kernen im halben Umkreise noch erhalten, während die übrigen beiden Drüsen fast vollständig ihren normalen Charakter verloren haben.

Die ganze übrige Umgebung ist von Leucocyten durchsetzt und bei einem Vergleich dieser mit den Rundzellen, die aus den Epithelzellen hervorgegangen sind, besteht der wesentliche Unterschied darin, dass die Kerne der Rundzellen viel grösser sind als jene der Leucocyten, ein Verhalten, das ganz gut in der Abbildung zum Ausdruck kommt. Ein weiterer Unterschied besteht auch noch darin, dass die Kerne der Leucocyten etwas intensiver gefärbt erscheinen, als jene der Epithelzellen, insbesondere dann, wenn man blaue Farbstoffe anwendet.

Auf Grund der Studien an einer grösseren Collection von Darmpräparaten vom Hunde kam ich zu der Ueberzeugung, dass die Umwandlungen der Lieberkühnschen Drüsen durch Leucocyten-Einwanderungen sich beim Hunde ebenso vollziehen, wie es für den Menschen schon früher von mir beschrieben wurde, insbesondere, wenn ein grosser und reifer Follikel sich den Drüsen nähert.

Ich will zur Zeit nicht den Satz aussprechen, dass die Cylinderzellen der Lieberkühn'schen Drüsen direkt zu Leucocyten umgewandelt werden. Diese Anschauung würde ja gegen die herrschende Schulmeinung gerichtet sein, und doch wage ich zu behaupten, dass zwischen den Leucocyten in der Darmschleimhaut und den aus den Zellen der

Lieberkühn'schen Drüsen entstandenen Rundzellen kein wesentlicher formeller Unterschied besteht.

W. Flemming[1]) sagt: „Wenn Wanderzellen ebenso aussehen, sich ebenso bewegen, ebenso wechselnde und polymorphe Kernformen und wechselnden Kerninhalt zeigen, wie ausgewanderte Blutleucocyten oder Lymphzellen, wie will man dann beide noch auseinander halten?"

Ohne mich hier in die vielumstrittene Frage über die verschiedenen Arten von Leucocyten näher einzulassen, kann ich doch nicht umhin, auf die beschriebenen Beziehungen zwischen den wandernden Leucocyten der Darmschleimhaut und dem Epithel der Lieberkühn'schen Drüsen wiederholt hinzuweisen, weil ich an der Anschauung festhalte, dass im Darm bedeutungsvolle Vorgänge sich abspielen, die noch weitere Studien erforderlich machen.

II. Durchwanderung der Leucocyten nach den Gallenwegen.

Soweit ich die Literatur kenne, sind in der Schleimhaut der Gallenblase Durchwanderungen von Leucocyten noch nicht beobachtet worden.

Ich konnte von einem Enthaupteten eine normale Gallenblase einlegen und ihre Erhärtung gelang sehr gut. Zunächst soll die eigenartige Beschaffenheit der Schleimhaut der Gallenblase eine kurze Erörterung finden. Mir schien es von Werth zu sein, dass man die geöffnete Gallenblase sofort in Sublimat oder in eine andere erhärtende Flüssigkeit bringt, damit so viel als möglich das Secret mit der Schleimhautfläche in Berührung bleibt. Die Schnitte zeigen dann stellenweise den Secretbeleg in unversehrtem Zustande. Da ich mich an keine gute Abbildung von einem Querschnitt

---

[1]) Archiv für mikroskopische Anatomie, Jahrgang 1891, S. 261.

der Gallenblasenwand erinnere, so habe ich einen solchen (s. Fig. 14) abbilden lassen. Jedermann kennt die zierlichen Schleimhautfalten der Gallenblase, welche unter Flüssigkeit mit Hilfe schwacher Vergrösserungen schon klar übersehen werden. Zunächst erkennt man die der Längsachse der Blase entsprechend angeordneten etwas grösseren Längsfalten, welche durch quer oder schief gestellte Falten mit einander verbunden sind. So entstehen die vieleckigen Felder, in welchen kleinere secundäre Falten in verschiedener Grösse und Richtung sich erheben. An der Abbildung (Fig. 14) erkennt man die höher vorspringenden Falten und dazwischen die kleineren secundären einfachen oder auch die verzweigten Erhebungen, die sich dadurch auszeichnen, dass die Bindesubstanz zwischen je zwei Epithelreihen einer Falte äusserst spärlich ist. Alle Anordnungen sprechen dafür, dass die gitterartige Faltenbildung darauf berechnet ist, möglichst grosse Epithelflächen zu Stande zu bringen mit sehr wenig Bindegewebe zwischen denselben, in welchem nur Raum für Blut- und Lymphgefässe und insbesondere für wandernde Leucocyten vorhanden ist. Auch in den grösseren Gallengängen und in den Buchten derselben tritt ebenso, wie in der Gallenblase, ein hohes Cylinderepithel auf. Weder am Körper noch am Fundus der Gallenblase finden sich Schleimdrüsen vor.

Da sich meine Besprechung nur auf das Epithel und die Durchwanderung der Leucocyten in demselben beziehen soll, so will ich nicht näher auf die specielle Gewebsbetrachtung der Gallenwege eingehen.

In der Fig. 17 erscheint das Epithel an dem oberen Ende der Abbildung einschichtig, abwärts an derselben mehrschichtig. Ich halte die letztere Stelle für das Ergebniss eines Schiefschnittes, an welchem mehrere Zellen auf der Schnittfläche getroffen sind, während alle die reinen Querschnitte nur ein einschichtiges Epithel zeigen.

Die Leucocytendurchwanderung findet an allen von der Gallenblase gewonnenen Präparaten statt. Die lymphoiden Zellen bewegen sich, eingebettet in den schmalen Falten zwischen den Epithelien, in jener spärlichen Bindesubstanz, welche diese Epithellagen mit einander vereinigt. Dass man an den Falten der Gallenblasenschleimhaut nicht von einer Schleimhaut im Sinne der Darmschleimhaut sprechen darf, wird sofort an jedem Schnitt erkannt. Schwer lässt sich feststellen, ob das Cylinderepithel auf einer Basalmembran aufgepflanzt ist, ähnlich wie im Darmrohr. Eine Begrenzung des Epithels durch eine Basalmembran ist wahrscheinlich vorhanden; allein mit Bestimmtheit konnte ich dieselben nicht constatiren. Man sieht an einzelnen Stellen hie und da Grenzlinien an der Aussenseite der Epithelzellen, jedoch von einer scharf begrenzten Basalmembran konnte ich mich nicht überzeugen. Die etwas konische, kleiner werdende Beschaffenheit der Cylinderzellen an der Aussenseite, wo der gegenseitige Contact der Epithelzellen fehlt, ist wohl der wesentliche Grund, dass man über die Basalmembran nicht leicht Aufschluss gewinnen kann.

Die Leucocyten im Epithel.

Ueber die Art der Durchwanderung der Leucocyten bedarf es nur weniger Angaben. Man findet die Leucocyten ganz vereinzelt, oft zu zweien hinter einander oder zwei Zellen, welche nur durch eine oder zwei Epithelzellen von einander getrennt werden, durchwandernd. Stellenweise begegnet man ganzen Gruppen und ich konnte in einem Falle 6 und in einem andern annähernd 25 Wanderzellen zählen. Grössere Zerstörungen der Cylinderepithelschichte kommen nicht zur Beobachtung. Massenweises Durchtreten der Leucocyten, wie etwa im Darmrohr, kommt in der Gallenblase nicht vor und wie dieselben in dem grossen Schleimhaut-

gebiet isolirt wandern, so treten sie auch meist vereinzelt zwischen den Cylinderepithelien durch.

Die Art und Weise des Durchtrittes geschieht in Form von stiftartigen Gebilden, die sich langgestreckt zuspitzen und an ihrem der Blasenhöhle zugekehrten Ende eine Verlängerung zeigen, welche als feinkörnige Masse die Epithelien auseinanderdrängt.

Unzweifelhaft stellt dieser langgestreckte Fortsatz des rundlich langen Kerns, der sich durch seine dunkle Färbung auszeichnet, die Zellenmembran und das Protoplasma des Leucocyten dar, die dem Kern ebenfalls in Stiftform vorauseilen und die Epithelzellen auseinander drängen.

Ist ein Leucocyt zwischen die Cylinderzellen eingedrungen, so benützt ein zweiter oder mehrere den jetzt präformirten Spaltraum und rücken nach, so dass man auch zwei und mehrere hintereinander gelagert beobachten kann.

Sind die Leucocyten an den inneren Enden der Epithelzellen angekommen, so drängt sich ihre Zellmembran mit dem Protoplasma als bläschenförmiges Gebilde nach dem Blasenraum vor und man kann beide gut übersehen. Der Kern ist in diesem Falle noch nicht ganz durchgetreten, sowie derselbe aber seinen engen Kanal zwischen den Cylinderzellen verlassen hat, nimmt er sofort die ursprüngliche runde Form an und man wird in dieser Hinsicht an die Kernveränderungen erinnert, welche die Blutkörperchen in engen Passagen erfahren, indem diese ebenfalls, nach dem Durchgang durch enge Kanäle, ihre normale plattrunde Form wieder annehmen. Wenn auch der Kern eines Leucocyten gross, das Protoplasma gering ist und die Zellenmembran zuweilen nur einen geringen Abstand vom Kern zeigt, so muss man doch ihre Fähigkeit, die Form zu ändern, bewundern.

Haben die Wanderzellen ihren Durchgang zwischen den Cylinderzellen vollbracht, so trifft man dieselben in einem

Secret von gleichmässiger gelber Färbung, in dem sich nur die Leucocyten als geformte Elemente vorfinden. In grösserer Entfernung von der Schleimhaut begegnet man den Wanderzellen nicht mehr und ich habe vielfache Gründe, anzunehmen, dass dieselben sich vollständig auflösen, so dass man zuweilen noch zerfallenen Bruchstücken der Kerne begegnet. Schliesslich sieht man im Secret der Gallenblase eine gleichmässig homogene Masse, in der gar keine geformten Elemente mehr vorhanden sind.

Nachdem man eine massenhafte Einwanderung der Leucocyten in die Gallenblase beobachtet hat, in der Nähe der Schleimhaut dieselbe vorfindet, dann aber in dem amorphen Secret keinen Zellen mehr begegnet, so ist man wohl berechtigt, aus diesen Thatsachen den Schluss zu ziehen, dass alle in die Gallenblase eingewanderten Leucocyten sich vollständig auflösen und von hier an nur durch die ihnen eigenthümlichen chemischen Stoffe zur Wirkung gelangen.

Zieht man die Grösse der Oberfläche der Gallenblase und die zahllosen Mengen der Leucocyten in Betracht, welche einwandern, so muss die Secretmenge, wenn ich mich so ausdrücken darf, welche durch sie entsteht, als eine sehr bedeutende bezeichnet werden. Kann man die Leucocyteneinwanderung in die Gallenblase als einen constanten normalen Vorgang ansehen, so darf die Gallenblase nicht mehr als ein einfaches Reservoir für die Galle, sondern als ein bedeutungsvoller secretorischer Apparat, der die Leucocyten zur Galle durchtreten lässt, angesehen werden.

Ueber den Werth der Leucocytensubstanzen in den Secreten des Darmkanales lässt sich selbstredend auf Grund der bis jetzt bekannten Thatsachen kaum eine Andeutung machen.

Dass in der Gallenblase höchst wahrscheinlich, wie in allen übrigen Drüsen, eine periodische Steigerung und Verringerung der Leucocyten und ihrer Durchwanderung vorhanden sein mag, darf a priori angenommen werden.

III. Masseneinwanderung der Leucocyten aus den Solitärfollikeln in den Darmkanal.

Im letzten Decennium hat Herr College Stöhr in mehreren vorzüglichen Aufsätzen den sicheren Nachweis erbracht, „dass aus der adenoiden Substanz unmittelbar unter dem Epithel (der Schleimhäute) eine normale Auswanderung der Leucocyten statt hat, vorwiegend durch jenes Epithel, welches die Kuppen der Lymphknötchen deckt, und so die Leucocyten in die Darmhöhle wandern".

Dieser Vorgang in der Darmschleimhaut ist nach dem, was bis jetzt von verschiedenen Autoren über denselben bekannt geworden ist, als unzweifelhafte Thatsache anzusehen. Im Vorausgehenden wurde schon erwähnt, dass in der Gallenblase und den Gallenwegen Leucocytendurchwanderung stattfindet, und ich will nur noch hinzufügen, dass das Gleiche auch in der Tuba Eustachii zu beobachten ist.

In den folgenden Zeilen will ich die Beobachtungen mittheilen, welche ich an den solitären Follikeln des Darmkanales und des Processus vermiformis des Menschen gemacht habe.

Ueber das Verhalten der Darmfollikel liegen zwei specielle Arbeiten von v. Davidoff und Ph. Stöhr vor. Die Angabe von His, dass in der Schleimhaut des Dünn- und Dickdarmes an jenen Stellen, welche Follikel einschliessen, die Lieberkühn'schen Drüsen fehlen, wurde oben schon erwähnt.

Die Follikel drängen sich nicht einfach zwischen die Lieberkühn'schen Drüsen hinein und verdrängen dieselben, sondern die genannten Drüsen gehen zu Grunde und indem ihre Cylinderzellen sich zu Rundzellen umbilden und sich mit den Leucocyten mischen, entsteht für den jetzt ausgebildeten Follikel genügend Raum, sodass derselbe als convexer Hügel gegen das Darmlumen vorspringt. Beim Kaninchen

sind die Follikel in Buchten der Schleimhaut eingeschlossen, sodass der die Lieberkühn'schen Drüsen führende Theil der Schleimhaut über die Zotten hervorragt. Wenn die Schleimhaut etwas neben der Kuppe des Follikels getroffen wird, so macht derselbe den Eindruck, als sei er vollständig von einer Schleimhautkapsel umhüllt. Jeder Follikel, gleichviel ob er einfach abgerundet ist, oder zwei bis drei secundäre Hügel besitzt, ragt in das Lumen des Darmrohres in der erwähnten Weise hinein. Die Follikel, welche die freie Schleimhautfläche erreicht haben, stellen beim Kaninchen sämmtlich kleine runde Erhöhungen dar. Von hier aus ist die ganze Mucosa bis zur Muscularis propria des Wurmfortsatzes erfüllt von Follikeln.

Beim Menschen ist das Verhalten der Follikel wesentlich verschieden von jenem im Wurmfortsatz des Kaninchens.

Dort drängt sich der Leucocytenhaufen gegen die freie Oberfläche der Schleimhaut und bildet an derselben ein convexes Knötchen. Die Entwickelung geht von der äusseren Schleimhautzone aus und wenn der Follikel eine gewisse Grösse erlangt hat, so rückt derselbe bis in die Submucosa hinein und berührt selbst die Muscularis propria des Darmes. Der gewöhnliche Vorgang ist jedoch der, dass der Follikel bald gegen die Lieberkühn'schen Drüsen vorrückt, diese in der angegebenen Weise umwandelt und das Epithel der Schleimhautoberfläche erreicht.

Der Druck, welcher von Seite des Follikels auf das Epithel ausgeübt wird, verdünnt dasselbe derart, dass seine Cylinderzellen immer niedriger werden. Während an den seitlichen Flächen des Hügels die Cylinderzellen ihre normale Form beibehalten und direkt in jene der Lieberkühn'schen Drüsen sich fortsetzen, schreitet die Verkürzung der Zellen auf der Kuppe des Hügels (s. Fig. 1) immer weiter fort und schliesslich ist aus der Cylinderzelle eine ganz platte, aber immer noch vierseitige Zelle geworden,

welche sich endlich loslöst. Der Follikel ist nach dem Darmlumen hin geöffnet und die Leucocyten dringen massenweise aus demselben in den Darm ein (s. Fig. 2 und 3). Dass die Perforation ständig vor sich geht, kann man unschwer beobachten. Ich besitze Präparate von einem Enthaupteten, welcher im Darmkanal keinerlei pathologische Veränderungen zeigte. Es ist anzunehmen, dass diese Eröffnung der solitären Follikel eine periodische ist und wohl abhängig sein mag von den Verdauungsvorgängen im Darm.

Was soll das Vorrücken der Follikel nach der freien Oberfläche der Darmschleimhaut, die allmähliche Verdünnung des hohen Cylinderepithels und die endliche Zerstörung desselben bedeuten, wenn alle diese Vorgänge nicht die Freilegung der Leucocytenhaufen und die endliche Einwanderung der Wanderzellen aus ihm in den Darmkanal das Endziel derselben wäre?

Ich besitze Präparate, welche gar keinen Zweifel aufkommen lassen, dass diese Vorgänge an allen Follikeln in der besprochenen Weise sich abspielen. Wir sehen, dass die Einwanderung der Leucocyten ins Darmrohr durch diesen massenhaften Eintritt der Leucocyten in dasselbe noch gesteigert wird und so eine Quantität von Material in die Verdauungswege gelangt, welches dort unzweifelhaft eine Rolle spielt, deren Bedeutung noch erst ermittelt werden muss.

Das Secret der Tonsille und der Follikel, die Einwanderung der Leucocyten in der Form, welche uns Stöhr zuerst kennen gelehrt hat, sowie die Durchwanderung der Leucocyten in der Gallenblase und den Gallenwegen kann unmöglich zwecklos für die physiologischen Vorgänge im Darmrohr stattfinden.

Die chemischen Produkte der Leucocyten müssen im Darm eine Bedeutung haben, eine Annahme, die umsomehr Berechtigung hat, wenn man nachweisen kann, dass die eingewanderten Zellen sich alle auflösen, indem dieselben

in dem Inhalt des Darmrohres verschwinden und bei der Behandlung mit Farbstoffen stellenweise eine amorphe Masse in dem Inhalt des Darmrohres jene Färbung annimmt, welche die Kerne der Leucocyten zeigen.

Nach allem, was ich beobachten konnte, verlieren alle Leucocyten, welche aus der Schleimhaut ausgetreten sind, ihre normalen Eigenschaften. Das erste, was man beobachten kann, ist der Zerfall der Kerne.

Zwei, vier und mehr Kerne entstehen aus dem grossen Kern eines Leucocyten und dieselben treten endlich vereinzelt (s. Fig. 10) in der Nähe der Schleimhautoberfläche auf. Sobald dieselben sich aber mit dem Darminhalt vermischt haben, gehen die geformten Eigenschaften verloren und es können nur die von ihnen abstammenden chemischen Substanzen eine Bedeutung haben.

Stöhr sagt am Schlusse seiner Abhandlung im Archiv für mikroskopische Anatomie mit Recht: „Wir stehen hier noch vor einer ganzen Reihe offener Fragen, deren Beantwortung weiteren Untersuchungen vorbehalten ist.“ Je mehr man hier die einzelnen speciellen Vorgänge kennen lernt, um so klarer erkennt man, dass noch eine Anzahl von Problemen der Lösung harren. Ich begnüge mich vorläufig mit der Mittheilung der Thatsachen und enthalte mich, Hypothesen zu erörtern.

IV. Durchwanderung der Leucocyten an der Tonsille.

Die zweite Mittheilung, welche den Durchgang der lymphoiden Zellengruppen in der Tonsille betrifft, erfordert zunächst, dass ich ziemlich weit zurückgreife in die Literatur jener Zeitperiode, in der die ersten genauen Angaben über den Bau der Tonsillen überhaupt gemacht worden sind. Wenn auch Langenbeck und E. H. Weber die besten und eingehendsten Beschreibungen der Balg-

drüsen der Zungenwurzel geliefert haben, so muss man doch mit Kölliker einverstanden sein, wenn er im Jahre 1852 angibt, dass noch von keinem Autor die Balgdrüsen an der Zungenwurzel der Natur entsprechend geschildert worden seien. Kölliker gab damals schon an, dass es beim Menschen in sehr vielen Fällen ganz unmöglich sei, begrenzte Follikel in den Wänden der Tonsillen aufzufinden, eine Angabe, welche der Autor damals auf die sehr häufigen Erkrankungen, denen die Tonsillen unterworfen seien, zurückführte. „Es scheinen", sagt Kölliker, „bei den Entzündungen des Organes und ihren Folgen diese Follikel anzuschwellen, in ihrem Inhalte sich zu ändern und dann zu bersten" und so, meinte dieser Forscher, werde in den Wänden der Mandeln der normale Bau nicht mehr erkannt.

Die Frage nach der normalen und pathologischen Beschaffenheit des Tonsillengewebes dürfte unzweifelhaft am einfachsten zu beantworten sein, wenn man die thierischen Mandeln studirt, bei denen die krankhaften Veränderungen gewiss viel seltener vorkommen, als bei dem Menschen, obschon auch hier fast ganz constant Eigenthümlichkeiten sich zeigen, die wegen der Constanz ihres Vorkommens nicht als pathologische gedeutet werden können. Schon 1852 gibt auch Kölliker an, dass das, was beim Menschen schwer sich gewinnen lasse, bei Thieren mit Leichtigkeit zu erlangen sei.

Was die Zahl und die Grösse der Follikel in den Tonsillen anlangt, so wissen wir heute, dass die lymphoiden Zellen in den Schleimhäuten innerhalb physiologischer Grenzen sehr wechselnd sind. Man kann bei dem einen Individuum eine bedeutende Ansammlung von Leucocyten und lymphoiden Zellengruppen beobachten, bei einem anderen treten dieselben sehr spärlich auf. Die Querschnitte des Wurmfortsatzes lassen bei dem einen Menschen doppelt so viele Follikel zählen, als bei einem anderen, ohne dass nennenswerthe Organerkrankungen im Körper nachgewiesen werden könnten.

Ein verhungerter Affe zeigte im Dünndarm, Dickdarm und Wurmfortsatz äusserst wenige Schleimhautfollikel, eine Thatsache, welche von mehreren Forschern schon beobachtet wurde und die zweifellos für die Annahme spricht, dass der Reichthum der lymphoiden Zellen im Wirbelthier wesentlich abhängig ist von der Ernährung desselben.

Wenn Kölliker schon im Jahre 1852 mittheilen konnte, dass in der Tonsille des Ochsen die Follikel minder deutlich, oft gar nicht auftreten, so stimmt diese Angabe ganz und gar überein mit den zahlreichen späteren Beobachtungen, nach denen der Follikel überhaupt nicht immer als ein scharf begrenztes Gebilde, sondern auch als ein diffuses Infiltrat von lymphoiden Zellen in der Schleimhaut auftreten kann. Wenn auch in den mehr oder weniger dichtgedrängten Zellengruppen eigenartige „Keimcentra" auftreten und um diese herum die lymphoiden Zellen in concentrischen Reihen sich gruppiren, so ist doch zur Zeit festgestellt, dass auch die einzelnen Follikel niemals scharf von einander abgegrenzt sind, sondern an ihrer Peripherie in einander übergehen. Die lymphoiden Zellen treten nur als ein Infiltrat in der reticulären Bindesubstanz der Schleimhaut, der „conglobirten Drüsensubstanz" Henle's auf. Neben dem Keimcentrum und der dichtgedrängten Randzone der Leucocyten befindet sich in jedem Follikel ein peripheres Zellenstratum, das ohne nachweisbare Grenze in ähnliche Zellenstrata anderer Follikel übergeht und, wie Kölliker sich ausdrückt, „formlose Massen", die Henle'sche „conglobirte Drüsensubstanz" darstellt. Man kann gegenwärtig als feststehend annehmen, dass in verschiedenen Abschnitten des Verdauungstractus diffuse Infiltrate von lymphoiden Zellen ohne Follikelbildung vorkommen. Selbst in der Tonsille sind nicht immer ausgebildete Follikel nachweisbar, während an der Zungenwurzel, im Dickdarm und im Wurmfortsatz die Leucocyteninfiltrationen meist in Form von Follikeln auftreten. Auch in dieser Hinsicht will

Kölliker zwei Gruppen, constante und variable, unterscheiden. Die constanten seien in den Mandeln, dem Pharynx, in den Zungenbalgdrüsen, der Milz, den Peyer'schen Haufen und in dem Dickdarm vorhanden; während die weniger constanten in dem Magen und dem Dünndarm sich vorfinden (s. Discussion nach dem Vortrag von Stöhr in der physikalisch-medicinischen Gesellschaft in Würzburg 1883). Aber auch die weniger constanten lymphoiden Follikel hält Kölliker für normale Gebilde.

Von den Pathologen sind schon seit längerer Zeit Angaben vorhanden, nach welchen sowohl durch Cylinderepithel, als auch durch Plattenepithel die Durchwanderung der lymphoiden Zellen beobachtet wurde und selbst in Geschwülsten hat man die Leucocyten in grosser Zahl beobachtet. In einer unter der Leitung von Prof. Oertel bearbeiteten Dissertation von Dr. Lange wird auch darauf hingewiesen, dass in einem papillären Epitheliom das Epithel von zahllosen Leucocyten durchsetzt gewesen sei, und zwar insbesondere in den obersten Lagen.

Die Zahl der Beobachtungen über den Durchgang der lymphoiden Zellen durch das Epithel der Tonsillen in dem Isthmus faucium ist sehr gross, so oft aber diese Thatsache zur Beobachtung kam, wurde dieselbe meist als eine pathologische Erscheinung zurückgedrängt. Man suchte den Gedanken, dass möglicherweise doch ein normaler Vorgang von hoher Bedeutung vorliege, stets zu bekämpfen.

Die Forschungsergebnisse Stöhr's über die Durchwanderung der Leucocyten durch die Schleimhäute waren ganz und gar geeignet, die vielumstrittene Frage über die Bedeutung der zahllosen lymphoiden Zellen in den Schleimhäuten des Tractus intestinalis ihrer Lösung näher zu bringen. Die lymphoiden Zellen wandern durch das verschiedenartigste Epithel der Schleimhäute durch und gesellen sich, wo ein Inhalt sich befindet, diesem bei, oder dieselben

mischen sich mit dem Secret der Drüsen in den Respirationswegen und werden aus dem Körper, als Auswurfsprodukte, entfernt.

Zuerst hatte Stöhr lymphoide Zellen zwischen den Cylinderepithelien der Magenschleimhaut beobachtet. Obschon beiläufig gemachte Beobachtungen bekannt waren, aber keine Deutung erfuhren, verfolgte Stöhr die am Magen gemachte Beobachtung auch an anderen Schleimhäuten und stellte fest, dass an den Tonsillen, den Balgdrüsen, an den solitären und conglobirten Drüsen des Darmes, in der Bronchialschleimhaut normaler Weise eine massenhafte Durchwanderung lymphoider Zellen zwischen dem Epithel (nach dem Innern des Lumens) stattfindet. Ich will noch weiter hinzufügen, dass die lymphoiden Zellen nicht nur zwischen den Epithelzellen durchwandern, sondern in die Plattenepithelien an der Tonsille eindringen, diese lockern und zerstören und Lücken in der Epithellage hervorrufen, durch welche eine massenhafte Einwanderung der Leucocyten aus der Schleimhaut in das Darmrohr erfolgt.

Was meine eigenen Beobachtungen an der Tonsille des Menschen anlangt, so wurden dieselben mit Rücksicht auf die Einwendungen, dass die Mandel beim Menschen häufig pathologisch verändert sei, auch auf die Thiere ausgedehnt. Soviel ich bis jetzt ersehen konnte, sind in den wesentlichen Punkten so auffallende Uebereinstimmungen in den Ergebnissen, welche an der Tonsille des Menschen und der Säugethiere gewonnen wurden, vorhanden, so dass man sagen kann, die Resultate an der Mandel des Menschen wurden mit einem gewissen Vorurtheil entgegengenommen.

Indem ich meine Beobachtungen in Folgendem mittheile, will ich mich auf jene Figuren beziehen, welche

theils von menschlichen, theils von thierischen Präparaten gewonnen sind.

Dass der Reichthum an lymphoiden Zellen in der Mandel individuell wechselnd erscheint, wurde von verschiedenen Autoren schon constatirt und von mir oben schon hervorgehoben; allein in der Tonsille sind sowohl die Follikel, als auch die lymphoide Infiltration viel constanter, als in den übrigen Schleimhäuten. Die Zahl und Grösse der lymphoiden Zellen wechseln im Dünn- und Dickdarm viel mehr, als in den Mandeln. Es sind auch in ganz kleinen, atrophischen Mandeln immer noch viele Leucocyten vorhanden. Im Darmkanal dagegen kann man Objekten begegnen, in welchen die lymphoiden Zellen überraschend gering an Zahl sind.

Prüft man eine Reihe von Schnitten, so findet man an einzelnen Stellen die Plattenepithellage ganz unversehrt. Die tiefste Zellenlage ist ganz regelmässig gebildet. Die hohen mehr cylinderförmigen Zellen stehen als tiefste Lage so geordnet nebeneinander (s. Fig. 5), dass selbst ihre Kerne keinerlei Abweichungen von einander erkennen lassen. Jedenfalls muss es auffallen, dass man solchen regelmässigen Anordnungen der tiefsten Zellenlagen im Verhältniss zu den ungleich dicken und irregulären Bildungen nur vereinzelt begegnet. Die abwechselnde Dicke des Epithels, und die Unregelmässigkeit aller Zellenschichten des Plattenepithels ist an den Tonsillen ungewöhnlich häufig zu beobachten, eine Erscheinung, die einer besonderen Aufmerksamkeit werth erscheint, wenn man dieselbe vergleicht mit Präparaten der äussern Haut, der Speiseröhre oder des Darmkanales. Die Darmschleimhaut, welche keine Leucocyten einschliesst, zeigt im Allgemeinen in der Anordnung des Cylinderepithels, der Becherzellen u. dgl. eine nur ganz geringe formelle Verschiedenheit. Während Hunderte von Schnitten, die von der Dünn- oder Dickdarmschleimhaut gewonnen werden, einander sehr ähnlich sind, zeigen die Tonsillenpräparate von ver-

schiedenen und von einem und demselben Objekte auffallende Unterschiede. Die verschiedene Dicke des Epithels, die regellose Anordnung ihrer einzelnen Epithelschichten wird durch das Verhalten der Leucocyten in der Tonsille hervorgerufen. Solange die Follikel in der Tonsille nicht gross sind, haben sie von der tiefsten Zellenschichte des Epithels einen geringen Abstand. In dem Verhältniss aber, als sich ein Follikel vergrössert, rückt er der Epithellage immer näher und bei seiner Annäherung ist der erste Vorgang der, dass die Zellen des Rete Malpighii in Unordnung gerathen; ihre Verbindung wird gelockert (s. Fig. 6), was sofort an der veränderten Stellung der Kerne erkannt wird. Sehr bald bemerkt man, dass die Verschiebung der Zellen durch das Vordringen einzelner Leucocyten zwischen dieselben bedingt wird. Ist einmal die tiefste Zellenlage in Unordnung, dann scheint das massenhafte Vordringen der lymphoiden Zellen ganz rasch vor sich zu gehen. Während des Vordringens vereinzelter Zellen, das man vielfach beobachten kann, findet keine Veränderung der Epithelien statt. Die Leucocyten drängen sich in diesem Falle, indem sie eine langgestreckte Form annehmen, zwischen den Plattenepithelien bis zur freien Oberfläche durch und hier sieht man sie vereinzelt oder auch in kleinen Gruppen, entweder frei in einer Tonsillenspalte, oder sie kleben noch an der Oberfläche der glatten Epithelien, die keine wesentlichen Veränderungen zeigen, fest.

War der Angriff von Seite eines grossen Follikels ein intensiver, so gehen die tiefsten Epithelzellen, welche mehr runde Formen annehmen, zu Grunde und in den weiteren Zellenlagen kann man beobachten, dass der Leucocyt in die Epithelzelle eindringt und, wie ich vermuthe, zunächst das Protoplasma der Zelle und dann diese selbst zerstört. Die Epithelzelle wird bald hell, der Raum, wo die Zelle lag, wird grösser und schliesslich findet man lichte, grosse Lücken mit Zellen und mehreren runden, kleinen Kernen erfüllt,

welche durch mitotische Vermehrung der Leucocyten (Flemming) bei dem Zerfall der Epithelzellen entstanden sind.

Dass eine theilweise Isolirung und auch eine Zerstörung der Epithelzellen stattfindet, unterliegt keinem Zweifel. Man muss viele derartige Präparate studirt haben, um die Ueberzeugung zu gewinnen, dass das Plattenepithel in der geschilderten Weise eine Zerstörung und Vernichtung erfährt. In den Tonsillenspalten findet man auch Epithelien als einzelne Zellen oder abgerissene Conglomerate mehrerer Epithelzellen von Leucocyten umringt (s. Fig. 10).

An gelungenen Präparaten, welche den Durchbruch der Epithellage nicht ganz vollständig zeigen, kann man die Art der Zerstörung des Plattenepithels sehr gut übersehen. Jene tiefere Zone der Epithellage, welche zuerst der Angriffspunkt für die Leucocyten war, zeigt nur vereinzelt eine Plattenepithelzelle, während in dem Randgebiet des Epithels die Zellen noch zahlreich vorhanden sind, aber nicht mehr geordnet erscheinen. In die einzelnen Epithelzellen sind die Leucocyten eingedrungen, und man erkennt die Zerstörung dann erst, wenn die Protoplasmazone der Epithelzelle heller, der Kern derselben zackig, unregelmässig und kleiner geworden ist. Wenn auch der Kern ganz vernichtet ist, treten kleine, runde Leucocyten in Gruppen miteinander verbunden auf. Diese Erscheinung ist so constant, dass es nicht gewagt erscheint, den Vorgang so zu deuten, dass die Epithelzellen durch die Leucocyten zerstört werden und zwar zunächst das in denselben noch vorhandene Protoplasma, dann auch der Kern und schliesslich eine Theilung, eine Vermehrung der Wanderzelle im Innern der Epithelzelle erfolgt. Bei dem weiteren Wachsthum der Theilstücke entstehen ganze Leucocytennester an jener Stelle, wo die Epithelzelle sich befand.

Hat die vollständige Durchwanderung stattgefunden, dann zeigt sich an einzelnen Schnitten die Tonsillenspalte

ganz erfüllt von Epithelien, Leucocyten und auch untermischt mit Riesenzellen.

Da aus der Follikelzone das Zellenmaterial immer nachrückt, so muss dasselbe, wie aus dem Ausführungsgang einer Drüse, an der Oberfläche der Mandel zum Vorschein kommen. Dass die Tonsillenspalten eine gewisse Regelmässigkeit zeigen, ergeben die Horizontalschnitte durch jene. An einer und derselben Spalte findet der Durchbruch in bestimmten Abständen statt, welcher, wie mir scheint, von der jeweiligen Reife, resp. der Grösse des Follikels abhängig ist.

Wenn in den Spalten der Tonsille viele vereinzelte oder auch zusammenhängende Gruppen der Plattenepithelien vorhanden sind, dann scheint der Durchbruch rasch stattgefunden zu haben, wobei Epithelgruppen zusammenhängend mit Leucocyten losgerissen wurden; in jenem Falle dagegen, in welchem der Durchbruch, wie anzunehmen ist, langsam erfolgt, beobachtet man sehr wenige Epithelzellen und zahlreiche Gruppen von Leucocyten mit kleinen runden Kernen.

Je tiefer man in alle diese Vorgänge einzudringen sucht, umsomehr zeigt sich die Schwierigkeit auf alle die auftauchenden Fragen eine befriedigende Antwort zu geben.

Von besonderem Interesse erscheint die Lücke, welche in dem Epithel an der Stelle des Durchbruchs entstanden ist. Wollte man für die einzelnen Stellen die entstandene Oeffnung nachbilden, so bekäme man einen Trichter, dessen engstes Gebiet der freien Oberfläche des Epithels, das weiteste dorthin, wo der Follikel war, gerichtet ist. Die Zerstörung der Epithellage nimmt nach der Tiefe zu und die ganze Umrandung stellt eine zerklüftete Wand dar. In dem Lehrbuch der Histologie des Menschen von Böhm und Davidoff befindet sich auf S. 165 die Abbildung Fig. 115, an dem zerklüfteten unterminirten einen Rand der Oeffnung auf dem Durchschnitt sehr klar zur Darstellung kam (s. auch in meiner Fig. 8).

Noch andere Wege der Einwanderung der Leucocyten in der Epithellage kann man beobachten. Man begegnet an den Tonsillenschnitten Haufen von Leucocyten, welche zapfenförmig oder inselartig im Epithel stecken. Dieselben verhalten sich zum Plattenepithel geradeso, wie die beschriebenen Follikel. Das Endresultat dieser Zapfen ist auch das Vorrücken gegen die freie Oberfläche und die Auswanderung ihrer lymphoiden Zellen in die Mandelspalten.

Nach eingehendem Studium musste man die Ueberzeugung gewinnen, dass die Zapfen an den stellenweise spärlich vorhandenen Papillen in dem Epithel entstehen, indem die Leucocyten von der Basis der Papillen aus, nach der Spitze hin vorrücken und die Epithelzellen ebenso zerstören, wie das papillenfreie Epithel, das viel mehr Widerstand entgegensetzt, als die mehr oder weniger ausgebildeten Papillen an der Mandel. Die inselartig auftretenden Leucocytengruppen zeigen sich an Schiefschnitten, an welchem der Zusammenhang der Inselgruppe an einem Schnitt unterbrochen worden ist.

Hat man lückenlose Schnittreihen zur Verfügung, so lässt sich der Zusammenhang des Leucocytenhaufens mit jenen unter dem Epithel befindlichen Gruppen stets leicht nachweisen.

Eine besondere Aufmerksamkeit schenkte ich den Perforationszonen und der Art ihrer Verschliessung. Man kann hier nur aus dem wechselnden Verhalten der Epithellage an den verschiedenen Stellen einen Schluss ziehen auf die Regeneration des Epithels. Fasst man diese Stellen an der Tonsillenoberfläche oder in den Spalten ins Auge, wo unter der Epithellage keine oder nur wenige Leucocyten vorhanden sind, so zeigt sich die Epithellage normal, gleichmässig dick und mit Papillen, wenn auch nicht gleichmässig, durchsetzt. Dort jedoch, wo lymphoide Zellengruppen an das Epithel angrenzen, treten die variablen Veränderungen der Deckschichte auf. Was man aus einem Vergleich der Präparate

entnehmen kann, ist, dass eine Vermehrung der Epithelien an der Peripherie der Perforationsöffnung als wahrscheinlich anzunehmen ist. Unzweifelhaft werden hier ganz ähnliche Vorgänge stattfinden, wie bei jeder Wundheilung, die am Plattenepithel der Mundhöhle oder der äusseren Haut eintreten. Von den vorhandenen normalen Epithelzellen der Umgebung einer Lücke schieben sich die Zellen vor und bilden anfänglich eine dünne Epithellage, die weder den Charakter der Plattenepithelien, noch jenen der Zellen des Rete Malpighii tragen. Solange die Leucocyten oder die zu Follikel umgewandelten Gruppen fehlen, behält die Epithellage ihre normale, gleichmässig dicke Beschaffenheit bei. Treten stärkere Ansammlungen in der Tunica propria des Epithels auf, so beginnt auch sofort die beschriebene Einwirkung auf die Epithelschichte. Bei diesem unausgesetzt wechselnden Vorgang an dem Epithel, welcher abhängig ist von der Neubildung der Leucocyten, beobachtet man auch normale Epithellagen, welche mit zerstörten abwechseln an allen Stellen der Mandel, gleichviel ob dieselbe an der freien Aussenseite oder in den Spalten untersucht wird.

Je bedeutender der Defect am Plattenepithel ist, um so reicher hat sich das Material in den Mandelspalten angesammelt. Dass der Inhalt der Spalten (s. Fig. 10), welcher an Präparaten von Thieren und dem Menschen geprüft wurde, nicht entfernt an pathologische Bildungen, an zerfallene Massen erinnert, ist leicht zu constatiren.

Schlussbemerkung.

Wir sehen, dass an der Mandel zweierlei Vorgänge sich abspielen. Der eine Vorgang besteht in der von Stöhr beschriebenen Durchwanderung von einzelnen Leucocyten zwischen den Epithelzellen ohne Zerstörung der Epithelschichte. Waren auch durch Arnstein, Edinger, Franken-

häuser, Rauber, Bonnet und Toldt die Durchwanderungen der Leucocyten schon bekannt, so muss man doch Stöhr das Verdienst zuschreiben, diesen Vorgang als einen constanten, normalen zuerst festgestellt zu haben.

Der zweite Vorgang ist der der Epithelzerstörung an der Mandel durch die Leucocyten und massenhafter Einwanderung derselben nach dem Isthmus faucium. Diese massenhafte Einwanderung in den Schluckapparat hat eine Entleerung der Leucocyten aus dem Stratum proprium und aus dem Epithel zur Folge und nachherige Regeneration der ganzen Schleimhaut. Dass die Mandeln mit ihren Spalten, wenn dieselben von Leucocyten erfüllt sind, beim Schluckakt unter dem Einfluss einer ganz kräftigen Muskelcontraction stehen, unterliegt gar keinem Zweifel. Die Compressionswirkung des Musc. glossopalatinus und pharyngopalatinus, welche eben keine isolirten Muskelzüge, sondern nur vorspringende Partien der verticalen Längszüge des Pharynx darstellen, ist eine von verschiedenen Autoren längst festgestellte Thatsache. Die ganze Muskelnische in Verbindung mit dem Gaumensegel muss bei jedem Schluckakt eine Compression der Mandel hervorbringen und dieselbe muss, wenn Oeffnungen im Mandelepithel vorhanden sind, die Leucocyten mit auspressen.

Warum sind die Mandeln an der freien Oberfläche der Schleimhaut am Isthmus faucium zwischen den beiden Muskelarcaden eingebettet? Hätten dieselben keine besonderen Beziehungen zum Verdauungsapparat, sondern nur zu den Lymphgefässen, so könnten sie ähnlich den Lymphdrüsen an den verschiedensten Körperstellen angebracht sein. Müssten die Wanderzellen in den Mandeln nur die Wege nach den Lymphbahnen aufsuchen, so wäre ihre topographische Lage durchaus nicht an der freien Oberfläche der Schleimhaut des Schluckapparates erforderlich.

Die Lage der Mandeln, ihre Einbettung in Muskelnischen und die Eröffnungen ihrer Follikel nach der freien

Fläche und den Mandelspalten oder Buchten derselben legen denn doch die Frage nahe, ob hier nicht drüsige Organe vorliegen, die ihren Inhalt an den Bissen abgeben und die Annahme gestatten, dass die Milliarden von Leucocyten, in denen man schon „Nucleïnsäure“ constatirt hat, eine physiologische Verwendung im Darmkanal finden.

Fasst man alle Thatsachen: den Durchbruch der Leucocyten an den Mandeln, die Eröffnung der Sollitärfollikel im Darmkanal, die Durchwanderung zahlloser Leucocyten an der gefalteten grossen Oberfläche der Gallenblasenschleimhaut u. A. zusammen, so muss man sich sagen, dass alle diese erwähnten Vorgänge nur sehr schwer die Annahme begründen lassen, dass ein so reiches Material, welches der Nahrung im Darm beigegeben wird, nur als ein Auswurfsprodukt gedeutet werden kann. Da kein Beweis hiefür erbracht ist, so ist gewiss die Vermuthung berechtigt, dass die grossen Massen der Leucocyten, welche vom Schlundkopf und dem Isthmus faucium an bis hinab zum Mastdarm in den Darmkanal eintreten, in diesem eine physiologische Rolle zu spielen bestimmt sind, oder wie Kölliker schon meinte, dass diese Zellen nach ihrem Austritt aus der Schleimhaut möglicherweise noch Verwendung finden.

Jedenfalls ist die Frage über die Einwanderung der Leucocyten in den Darm eine Frage von hoher Bedeutung, gleichviel ob dieselbe durch weitere Forschungen in dem einen oder anderen Sinne entschieden werden mag.

Unterlassen will ich es nicht, noch auf eine andere Seite der vorliegenden Betrachtung hinzuweisen, die für pathologische Vorgänge besondere Beachtung verdient. Ich meine die in Folge des Durchbruches der Leucocyten, insbesondere, wenn derselbe massenhaft erfolgt, entstandenen Schleimhautdefecte, wie sie sowohl an der Tonsille, als auch an den solitären und Peyer'schen Drüsen im Darm vorkommen.

Hier werden Schleimhautdefecte erzeugt, welche wie bei einer Haut- oder Schleimhautwunde eine gewisse Zeit zur Regeneration erfordern. Sollen diese Schleimhautzerstörungen nicht als offene Pforten anzusehen sein, durch welche pathogene Ursachen von aussen her eindringen können? Ich meine, es sei berechtigt zu fragen, warum die Diphtherie gerne an den Mandeln und dem Pharynx, bei dem Abdominal-Typhus die pathologischen Veränderungen an den solitären und den Peyer'schen Drüsen vorwiegend auftreten? Hier wie dort sind stets kleine, zahlreiche Schleimhautdefecte vorhanden, mit einer, wenn auch nur vorübergehenden Zerstörung der epithelialen Schichte und der Basalmembran. Wenn nun pathogene Ursachen mit den Schleimhautstellen, welche vorübergehend keine epitheliale Deckschichte besitzen, in unmittelbaren Contact kommen, so erscheint doch die Annahme plausibel, dass Einwirkungen ebenso zu Stande kommen, wie an jeder Wunde, wie auch beispielsweise an einem Uterus, der in Folge einer Geburt an seiner Schleimhaut verwundet ist. Auch hier ist die Zerstörung der Uterusschleimhaut und deren Neubildung ein physiologischer Vorgang, ebenso, wie die Veränderungen am Graaf'schen Follikel des Eierstockes und der Schleimhaut des Uterus bei jeder Menstruation.

V. Beschreibung der Figuren
(auf Tafel I u. II).

Fig. I. Querschnitt eines lymphoiden Follikels aus dem Processus vermiformis des Menschen.

1. Lieberkühn'sche Drüse, welche an der Schnittfläche den Follikel an beiden Seiten umrahmen. Ich hebe hier besonders hervor, dass die grossen Drüsen nicht verdrängt erscheinen, sondern mit ihren Längsdurchmessern zur Oberfläche der Schleimhaut eine mehr rechtwinkelige Stellung einnehmen. 2. Fundus der Lieberkühn'schen Drüsen mit hohen Cylinderepithelien. 3. An der freien convexen Seite des Follikels, welcher stark an der Oberfläche der Schleimhaut vorspringt, ist das Cylinderepithel ganz im Verhältniss der Vergrösserung des Follikels niedrig geworden. Bei noch mehr erhöhtem Druck von Seite des Follikels auf das Epithel entstehen allmählich ganz dünne Platten, deren Querdurchmesser den ehemaligen Höhendurchmesser des Cylinders sehr bedeutend überwiegt. 4. Einzelne Lieberkühn'sche Drüsen. 5. Helleres Keimcentrum des Follikels. 6. Periphere dunkle Zone des Follikels.

Fig. II. Ein Follikel aus dem Wurmfortsatz, an welchem das Epithel durchbrochen ist.

1. Ziemlich hohes, normales Cylinderepithel am Rande des Follikels. 2. Niedriges Epithel an dem am meisten vorspringenden, convexen Abschnitt des Follikels, welches bei 3. ganz zerstört ist und den Follikel freigelegt hat. Die Begrenzungsmembran des Epithels ist noch stellenweise erhalten, allein auch diese geht verloren. Die Zahl der Leucocyten hat an der offenen Region des Follikels bedeutend abgenommen. 4. Lieberkühn'sche Drüsen, welche, soweit der Follikel reicht, vollständig fehlen. 5. Centrale helle Zone des Follikels.

Fig. III. Solitärfollikel vom Wurmfortsatz des Menschen mit den ausgewanderten Leucocyten.

1. Mündungen der Lieberkühn'schen Drüsen. 2. Epithel an dem nach dem Darmrohr prominirenden Abschnitt des Follikels, welches bei 3. durchbrochen ist. 4. Fundus einer Lieberkühn'schen Drüse. 5. Follikel ohne Lieberkühn'sche Drüse. 6. Die in das Lumen des Wurmfortsatzes eingewanderten Leucocyten, welche ihre specifischen Eigenschaften noch nicht geändert haben.

Fig. IV. Follikel aus der Tonsille vom Hunde.

1. Plattenepithelschichte, durchsetzt von Leucocyten. 2. Zerstörte und losgelöste Plattenepithelien. 3. Geöffneter Follikel mit vereinzelt erhaltenen Epithelzellen. 4. Follikel nach der freien Schleimhautfläche prominirend. 5. Die ausgewanderten Leucocyten hängen noch gruppenweise zusammen; dieselben haben sich jedoch schon vom Follikel entfernt.

Fig. V. Vollständig normales Epithel an einer Stelle der Tonsille, wie man es sowohl an deren Oberfläche, als auch in den Tonsillenspalten stellenweise antrifft. An dem gezeichneten Abschnitt waren nur zwei lymphoide Zellen zwischen den Epithelien nachweisbar.

1. Oberflächlichste Epithellage mit ganzen Plattenzellen an der Oberfläche. 2. Die tiefere Schichte mit polygonalen Zellen. 3. Das unterste Stratum mit den cylindrischen basalen Zellen grenzt das Stratum Malpighii gegen das Stratum subepitheliale ab. 4. Die an die basalen Zellen angrenzenden Leucocyten. 5. Vereinzelte Leucocyten zwischen den polygonalen Epithelzellen.

Fig. VI. Epithellage der Tonsille mit ein- und durchgewanderten Leucocyten. (Die Figuren 6, 7 und 8 sollen in der Aufeinanderfolge die Art der Durchwanderung und der Veränderungen des Epithels demonstriren.)

1. Oberflächlichste Schichte des Epithels, welches zwischen den Zellen und an der Oberfläche vereinzelte Leucocyten und Leucocytengruppen zeigt. 2. Die mittlere Epithelschichte erscheint mehr von Leucocyten durchsetzt, als die tiefste Zellenlage mit den Basalzellen. Wird die Fig. 6 verglichen mit der Fig. 5, so fällt sofort die Unregelmässigkeit der basalen Zellen auf, welche in Folge der Durchwanderung der Leucocyten ihre geordnete normale Anordnung verloren haben (3). 4. Die im Stratum subepitheliale befindlichen Leucocytengruppen.

Fig. VII. Ein Abschnitt des Epithels, in welchem die Leucocyten in das Epithel eingedrungen sind und als Gruppen von kleinen runden Kernen, an dem schwer eine Zellenmembran zu unterscheiden ist, auftreten.

1. Oberflächlichste Plattenepithellage. 2. Die Epithelzellen zeigen in dieser Schichte stellenweise einen grösseren Abstand von einander. 3. Die basalen Zellen zeigen bei 4. ein irreguläres Verhalten gerade dort, wo die grösseren Massen der Leucocyten im Eindringen begriffen sind. 5. Leucocyten, welche mehr und mehr in das Epithel eintreten.

Fig. VIII. An diesem Objekt sind die Leucocyten massenhaft in das Epithel eingewandert. Die lichten Stellen werden von den Wanderzellen eingenommen, während die Epithelzellen an den lichten Stellen immer mehr abgenommen haben.

1. Oberflächliche Plattenepithelien, welche ihre frei ebene Oberfläche verloren haben. 2. Leucocytengruppen und Epithelgruppen annähernd in gleichem Verhältniss auftretend. 3. Eine zusammenhängende Epithelgruppe. 4. Zusammenhängende Leucocytengruppen. 5. Leucocytenmassen unterhalb der ursprünglich vorhandenen Basalzellen, welche als solche nicht mehr zu erkennen sind. 6. Leucocyten, welche an der freien Oberfläche angekommen sind und die Durchwanderung vollbracht haben.

Fig. IX. Querschnitt eines grossen Drüsenausführungsganges am Schlundkopf. Auch an dem Ausführungsgang dringen die Leucocyten in grosser Zahl zwischen dem Cylinderepithel hindurch und gesellen sich schliesslich zu dem Secret im Ausführungsgange.

1. Weites Lumen des Ganges. 2. Cylinderepithel desselben. 3. Leucocyten an der Aussenseite des Ganges. 4. Leucocyt in einer etwas tingirten Secretmasse. 5. Leucocyten, welche in das Lumen eindringen.

Fig. X. Die in einer Tonsillenspalte befindliche Secretmasse.

1. Epithelzellen von bedeutender Grösse. 2. Epithelzellen mit mehreren Kernen. 3. Einfache Epithelzelle. 4. und 5. Vier Epithelzellen und zwei Leucocyten, dann eine Epithelzelle und eine Wanderzelle. 6. Vereinzelt auftretende Leucocyten. 7. Leucocyten mit mehrfacher Kerntheilung, welch letztere auch vereinzelt auftreten.

Fig. XI. Tonsillenepithel vom Hunde mit zapfenförmig vorspringenden Leucocytenhaufen. In dem Epithel selbst sind nur wenig eingedrungene Leucocyten sichtbar.

1. Epithel an der Oberfläche. 2. Fast vollständig durchbrochene Epithellage. 3. Leucocytenmassen unter dem Epithel. 4. Kleiner abgerundeter Fortsatz. 5. Grösserer Fortsatz, welche beide den Papillen entlang sich entwickelt haben und von den Basalstellen derselben aus in verschiedener Richtung in das Epithel eingedrungen sind.

Fig. XII. Abschnitt eines Wurmfortsatzes vom Hunde.

1. Normales Verhalten des Epithels an der Oberfläche der Schleimhaut. 2. Tiefe Bucht zwischen zwei Schleimhautfalten. 3. Lieberkühn'sche Drüsen. 4., 5., 6. und 7. stellen Lieberkühn'sche

Drüsen dar, welche durch die Einwirkung der Leucocyten in der Veränderung begriffen. An der einen Wand einer Drüse sind die Cylinderzellen schon zu Rundzellen umgewandelt, während sie an der andern noch in regelmässiger Ordnung gestellt sind. 8 und 9. Frei im Darmrohr befindliche Leucocyten, welche sich allmählich auflösen und endlich als gleichmässige Masse auftreten.

Fig. XIII. Drei Lieberkühn'sche Drüsen vom Wurmfortsatz des Hundes, welche in der charakteristischen Veränderung durch Einwirkung der lymphoiden Zellen begriffen sind.

Bei Fig. 1, 2 und 3 zeigen sich die Veränderungen ganz ebenso, wie ich dieselben am menschlichen Processus vermiformis beschrieben habe. 1 und 2 sind die Cylinderepithelien noch in regelmässiger Anordnung. Bei 3 ist kaum mehr eine charakteristische Cylinderzelle sichtbar. Die Mehrzahl derselben sind Rundzellen geworden und nur schwer von den Leucocyten zu unterscheiden. 4. Die Tunica propria der Drüse ist an jener Seite, wo die Leucocyten den Angriff vollzogen haben, zerstört. 5. Leucocytengruppe an der Stelle, wo die Lieberkühn'sche Drüse gewesen ist. 6 und 7 stellen Leucocytengruppen von verschiedener Dichtigkeit der Zellen dar.

Fig. XIV. Querdurchschnitt der Wand der Gallenblase des Menschen.

1. Muscularis der Gallenblase, deren Schichtung eine abwechselnde ist. 2. Grössere Zweige der Art. cystica. 3. Die Submucosa der Gallenblase ist sehr schwach, kaum nennenswerth ausgebildet, und vielfach reicht die Muscularis direkt an die Schleimhaut an. 4, 5, 6 und 7 zeigt die zierlichen, nicht verstreichbaren Falten der Schleimhaut, welche das bekannte ziemlich regelmässig angeordnete Faltennetz darstellen. Man erkennt die Falten als isolirte, zusammenhängende und netzartig verbundene Erhebungen (5), welche eine sehr bedeutende Oberfläche zu Stande bringen.

Fig. XV. Schleimhautfalte der Gallenblase durchschnitten.

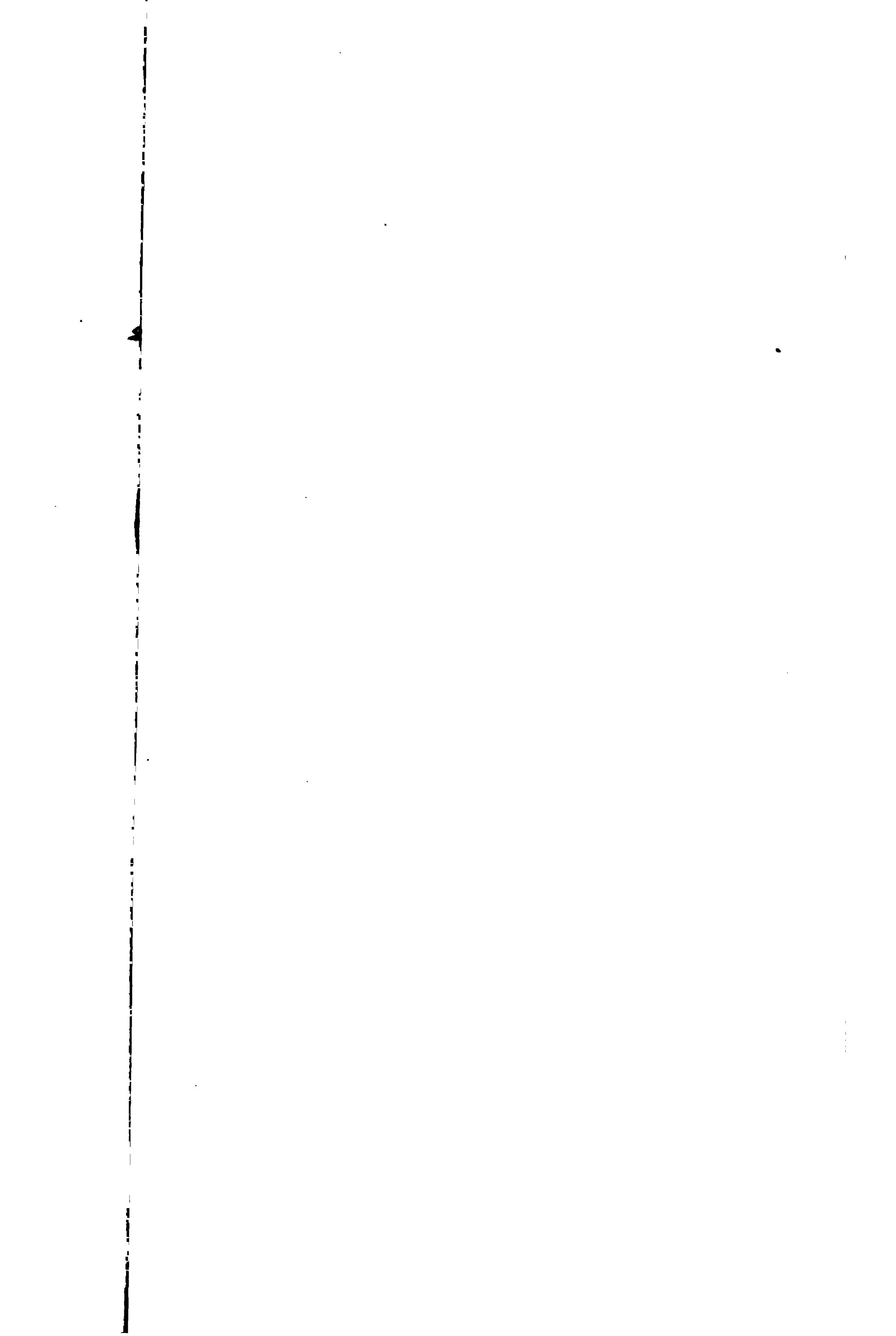
1. Ein Abschnitt der Falte, an welchem die Cylinderzellen mit ihren Kernen eine grosse Regelmässigkeit zeigen. Jede einzelne Zelle tritt an der freien Oberfläche etwas gewölbt hervor. Die nach der Tiefe gerichteten Enden stehen häufig, konisch zulaufend, etwas von einander ab. 2. Der Zwischenraum zwischen den Epithelreihen ist äusserst gering. In der Bindesubstanz befinden sich fixe Bindegewebskörperchen und Leucocyten. Zwischen den Epithelzellen erkennt man an diesem Präparat keine durchwandernden Leucocyten.

Fig. XVI. Querschnitt einer Schleimhautfalte mit durchwandernden Leucocyten.

1. Vollständig normale Epithelzellen. 2. Ein Leucocyt mit langgestrecktem Kern, der zwischen zwei Cylinderzellen eingetreten ist. 3. Ein Leucocyt, der in der Mitte der Cylinderzellen steckt, und an dem die Zellenmembran an der freien Epithelseite sichtbar wird. 4. Leucocyt, welcher im Austreten begriffen ist. 5. Bei allen jenen Zellen, welche im Austritt begriffen sind, wird die sich abrundende Zellenmembran leicht sichtbar. 6. Leucocyten nach dem Durchtritt, welche stets die ursprünglich runde Form annehmen.

Fig. XVII. Schleimhaut des Ductus cysticus vom Menschen.

1. Stratum subepitheliale mit Leucocyten. 2. Cylinderzellen des Ausführungsganges. 3, 4 und 5 zeigen die Durchwanderung der Leucocyten in verschiedenen Stadien, vom Eintritt zwischen die Cylinderepithelien an bis zum Austritt derselben.





Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 5. Januar 1895.

	Seite
*Walter Dyck: Ueber die Bestimmung der Anzahl der einem System von n-Gleichungen mit n-Variabeln gemeinsamen Wurzeln und über die Berechnung der Summe der Werthe, welche eine weitere Funktion dieser Variabeln in diesen Nullstellen annimmt	1
Joh. Ranke: Zur Anthropologie der Halswirbelsäule; Beitrag zur Entwickelungsmechanik der menschlichen Körperform	3
L. Boltzmann: Nochmals das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten	25
Joh. Rückert: Zur Kenntniss des Befruchtungsvorganges . .	27
*H. Seeliger: Vorzeigung astronomischer Photographien des Herrn Professor Wolf in Heidelberg	2
Alfred Pringsheim: Ueber den Cauchy'schen Integralsatz	39

Sitzung vom 9. Februar 1895.

*K. Göbel: Ueber directe Anpassung	73
Alfred Pringsheim: Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen	75
M. Nöther: Die 7-Systeme von Kegelschnitten, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangenten einer ebenen Curve 4. Ordnung gehen	93
Ed. v. Weber: Ueber simultane partielle Differentialgleichungen II. O. mit drei Variabeln	101
F. v. Sandberger: Ueber Blei- und Fahlerzgänge in der Gegend von Weilmünster und Runkel in Nassau	115
N. Rüdinger: Ueber Leucocytenwanderung in den Schleimhäuten des Darmkanals	125

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

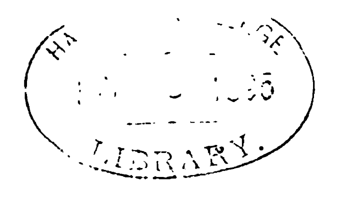
k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1895. Heft II.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 136. Stiftungstages

am 28. März 1895.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgenden Worten zum Gedächtniss zweier Ehrenmitglieder der Akademie:

Der 28. März heute ist der Stiftungstag der k. bayer. Akademie der Wissenschaften, welcher jährlich durch eine öffentliche Festsitzung gefeiert wird. Diese Stiftungsfeier dient herkömmlich dazu, jener unsrer Mitglieder zu gedenken, welche während des abgelaufenen Jahres verstorben sind.

Ich habe zweier verstorbener Ehrenmitglieder zu gedenken.

Adolf Friedrich Graf von Schack.

Am 14. April 1894 starb zu Rom Seine Excellenz Adolf Friedrich Graf von Schack, geboren am 2. August 1815 zu Schwerin, am 15. Juli 1856 von der Gesammt-Akademie zum Ehrenmitgliede gewählt. Der Vorschlag, von unserem verstorbenen Mitgliede Markus Müller ausgehend, lautet wörtlich:

„Als Edelmann, Diplomat und Freund der höchsten Person des Staates nimmt Adolf Friedrich Graf von Schack eine ausgezeichnete sociale Stellung ein, und als Gelehrter und Dichter steht er auf gleicher Stufe mit den ersten Grössen unseres Vaterlandes.

Seine Geschichte der dramatischen Literatur und Kunst Spaniens (3 Bände 1845) ist ein Meisterwerk literarisch-historischer Forschung und zeugt ebenso von tiefen Studien wie von einer seltenen Schärfe und Besonnenheit der Urtheile und einer gediegenen Vollendung des Geschmackes. Daran reiht sich sein spanisches Theater (2 Bände 1845), in welchem er mehrere der spanischen Dramas von Ruiz Alarcon, Cervantes, Lope de Vega und Calderon in deutschem Gewande dem Publikum geschenkt hat, mit einer Gewandtheit der Sprache und Schönheit und Adel des Ausdrucks, die ihn neben die ersten Meister der Uebersetzungskunst stellt. Dasselbe gilt von seiner Uebersetzung der epischen Gedichte des Firdusi, in welcher er ebenso durch gründliche Kenntniss des persischen Idioms, wie durch den feinen poetischen Sinn und Trefflichkeit der Uebertragung glänzt."

Die Akademie trat einstimmig diesem Vorschlage bei.

Adolf Friedrich von Schack hat sein Leben lang der Wissenschaft und der Kunst getreulich gedient. Es liegt nun ein Leben geschlossen vor uns da, welches allen materialistischen Verlockungen widerstrebend stets idealen Zielen geweiht war. Sein Lebensgang ist merkwürdig. Neben seinen juristischen Studien an den Universitäten Bonn, Heidelberg und Berlin (1834 bis 1838) betrieb er eifrig das Studium der europäischen Literaturen und der orientalischen Sprachen, machte in den Ferien Reisen für wissenschaftliche Zwecke, trat dann in die Dienste des Grossherzogs von Mecklenburg und begleitete denselben als Kammerherr und Legationsrath auf seinen Reisen nach Italien und Konstantinopel. Dann wurde er nach Frankfurt am Main zum Bundestage,

wo sein Vater mecklenburgischer Gesandter war, versetzt, und 1849 kam er als Bevollmächtigter seines Souveräns, dann als Geschäftsträger nach Berlin. Von Haus aus reich begütert und schon in einem Alter von 34 Jahren zu einer ehrenvollen diplomatischen Stellung gelangt, lag Herrn von Schack ein weiterer glänzender, genussreicher Lebenslauf vor, den wohl die meisten Menschen gerne weiter gewandelt wären. Aber der junge Adolf Friedrich von Schack verzichtete 1852 auf seine amtliche Stellung und ging als Privatmann nach Spanien, um dort über die Geschichte und Cultur des Landes und der spanischen Araber weiter zu forschen. Er hatte sich dafür durch eingehendes Studium der orientalischen Sprachen, namentlich des Sanskrit, Arabischen und Persischen vorbereitet. Im Jahre 1856 folgte er einer Einladung unseres damaligen Protektors König Maximilian II., nach München überzusiedeln, wo er sich in der Briennerstrasse ein Wohnhaus kaufte, welches später nach den Plänen des Architekten und Bildhauers Lorenz Gedon umgebaut wurde, in welchem Anwesen er auch die von ihm gegründete, berühmte Bildergalerie unterbrachte. Diese Galerie enthält Meisterwerke von damals lebenden, aber vielfach noch verkannten Künstlern (Genelli, Feuerbach, Böcklin etc.) und dazu auch Copien von hervorragenden Werken anerkannter alter Meister (Tizian, Velasquez, Murillo etc.). Diese Schack-Galerie ist zur Zeit eine vielbesuchte Sehenswürdigkeit Münchens. Ihr Gründer vermachte sie letztwillig Seiner Majestät dem Deutschen Kaiser, welcher sie aber in huldvollster Weise nicht nach Berlin verpflanzte, sondern in München beliess. Die Gründung dieser Galerie und die wissenschaftlichen und poetischen Leistungen ihres Gründers veranlassten Seine Majestät, Herrn von Schack in den Grafenstand zu erheben, und veranlassten auch den Magistrat München, ihn zum Ehrenbürger zu ernennen.

Ueber Schacks Bedeutung als Gelehrter hat sich Markus

Müller in dem eben verlesenen Antrage bezeichnend ausgesprochen, und habe ich dem nichts beizufügen; über seine Bedeutung als Dichter theilt mir ein sachverständiges Mitglied unserer Akademie folgendes mit:

„Wie uns Schack in seinen meisterhaften Uebersetzungen die fremde Welt der Inder, Perser und Araber näher gebracht hat, so liebt er es auch in seinen zahlreichen eigenen Dichtungen, uns in die verschiedensten Welttheile, die verschiedensten Zeiten zu versetzen und weitschauenden Blicks die geistige Entwicklung der Menschheit bis zur lebendigen Gegenwart zu verfolgen mit prophetischem Hinweis auf eine kommende Verbrüderung aller Völker. Er ist der Culturdichter im vollen Sinne des Wortes mit all seinen Licht- und Schattenseiten, kein unmittelbar wirkender Lyriker, aber ein tief und vielseitig gebildeter Geist, der erhabene Gedanken und edles Streben in klangvoller Sprache zum Ausdruck bringt und die mannigfaltigsten Kunstformen mit sicherer Meisterschaft beherrscht."

Unsere Akademie wird des Verblichenen stets ehrend gedenken.

Ismail Pascha.

Ein anderes Ehrenmitglied, Ismail Pascha, früher Chediv von Aegypten, geboren am 31. Dezember 1830 zu Kairo, starb jüngst am 2. März 1895 in Konstantinopel und wurde am 12. März in Kairo feierlich bestattet. Er war der erste Muhamedaner, der unserer Akademie angehörte, am 18. Juni 1874 gewählt. Der Vorschlag zu seiner Wahl ging von unserem verstorbenen Mitgliede Franz von Kobell aus und lautet wörtlich: „Der Unterzeichnete erlaubt sich zum Ehrenmitglied der Akademie Seine Hoheit den Vicekönig von Aegypten Ismail Pascha vorzuschlagen. Dieser Herr hat sich durch die liberale Unterstützung der geographischen

Expedition von Baker und Schweinfurt und durch die glänzende Ausrüstung der Rohlf'schen Expedition zur Erforschung der libyschen Wüste wesentliche Verdienste um die Wissenschaft erworben. An letzterer Expedition hat auch unser Mitglied Professor Zittel Theil genommen und die paläontologische Sammlung des Staates ist von ihm durch interessante Erwerbungen bereichert worden. Der Vicekönig hat sehr liberal gestattet, dass die auf der Reise gemachten naturhistorischen Sammlungen überhaupt den betreffenden Sammlungen in Berlin und München einverleibt werden. Es dürfte daher vollkommen gerechtfertigt sein, dass dem hohen Herrn von Seite unserer Akademie ein Zeichen der Anerkennung geboten werde."

Die Akademie trat diesem Vorschlage einstimmig bei.

Ismail Pascha musste bekanntlich von der Regierung zurücktreten. Darüber weiss ich nichts Besseres und Entsprechenderes zu sagen, als was der berühmte Aegyptologe Professor Dr. Georg Ebers, welcher länger in Aegypten weilte und mit Ismail Pascha persönlich verkehrte, uns mitgetheilt hat. „Die verschwenderische Rücksichtslosigkeit, mit der der jüngst verstorbene Chediv Ismail über die reichen Mittel seines Landes verfügte, musste er in der Verbannung büssen. Die Bevorzugung, die den Europäern so deutlich und lange durch ihn zu Theil ward, hatte die national gesinnten Unterthanen gegen ihn aufgebracht, und es mag dahingestellt bleiben, in wie weit ihn die Hoffnung auf Vermehrung seiner Einkünfte und der Wunsch sich in Europa Berücksichtigung und Lob zu erwerben, antrieben, sich als Förderer der Cultur zu bewähren. Jedenfalls besass er Eigenschaften und bethätigte er seinen Geist und seine Thatkraft durch Handlungen und Werke, die es einer wissenschaftlichen Körperschaft, deren Bestrebungen er gelegentlich verständnissvoll und freigebig unterstützt hatte, nahe legen durfte, ihrer Anerkennung auch äusserlich Ausdruck zu geben.

Von seinem Grossvater Mohammed Ali, dem Erneuerer Aegyptens, hatte er den lebhaften, der europäischen Cultur geneigten Geist, von seinem Vater Ibrahim, dem Sieger von Nisibi, wo unser Moltke gegen ihn focht, den unternehmenden Sinn geerbt. Seinen französischen Erziehern verdankte er eine Bildung, die, obwohl sie nicht tief ging, ihm doch gestattete, die Bedeutung und Würde der Wissenschaft zu erkennen. Neue Gedanken und Entwürfe, die man ihm mittheilte und vorlegte, begriff er und verstand es ihnen zu folgen und ihnen das für seine Zwecke Brauchbare zu entnehmen. Darum wurde es auch Herrn von Lesseps leicht, den Chediv Ismail für die unter seinem Vorgänger begonnene Durchstechung der Landenge von Suez zu gewinnen, so viele Millionen sie auch wieder und wieder in Anspruch nahm. Ebenso glückte es dem französischen Alterthumsforscher Auguste Mariette, den Chediv für die Denkmäler aus der Pharaonenzeit zu interessiren und von ihm die Mittel zu Ausgrabungen in grossem Stil, zur Herausgabe von nützlichen Publicationswerken und endlich für die Anlage jenes Antiquitätenmuseums in Kairo zu erlangen, das schon bei Ismails Verjagung seinesgleichen nicht hatte. Als Gerhard Rohlfs und Karl Zittel die Erforschung der libyschen Wüste unternahmen, schenkte er dieser ergebnissreichen Expedition, sowie der früheren von Baker und Schweinfurt nicht nur materielle Unterstützung, sondern auch verständnissvolle Theilnahme. Auch vielen anderen Forschern gewährte er thatkräftige Unterstützung. So dem Astronomen Mahmud Bē (später Pascha) bei seinen der Topographie des alten Alexandrien gewidmeten Arbeiten, und Ernst Haeckel, indem er ihm für seine zoologischen Untersuchungen im Rothen Meere einen Dampfer zur Verfügung stellte. Die Bibliothek im Palast Derb-el-Gamamīz zu Kairo dankt ihm die Entstehung und ihre tüchtige Verwaltung durch deutsche Gelehrte (Dr. Stern und Dr. Spitta). Jetzt steht ihr Dr. Vollers

vor. Herr Dor, ein tüchtiger Schweizer Pädagog, richtete seine Aufmerksamkeit auf das Erziehungswesen des Landes. Mit schöner Duldsamkeit unterstützte der Chediv die Errichtung auch christlicher Schulen und Kirchen. Die Neugestaltung des ägyptischen Medicinal- und Gerichtswesens ging gleichfalls von ihm aus. Was er für die Bewässerung seines Reiches, für den Verkehr durch Anlage von Eisenbahnen und Telegraphen, für die Wohlfahrt der Unterthanen durch die Pflanzung Schatten spendender Bäume in grossartiger Menge that, verdient so gewiss der Erwähnung, wie dass er die Zwangsarbeit aufhob und den Sklavenhandel beschränkte."

Also Segen auch seinem Angedenken!

Der Classensecretär, C. v. Voit, gedenkt der seit dem letzten Stiftungstage gestorbenen Mitglieder der Classe.

Die mathematisch-physikalische Classe hat im verflossenen Jahre zwei ordentliche Mitglieder: Carl Maximilian v. Bauernfeind und Carl v. Haushofer, ferner vier auswärtige Mitglieder: Die Physiker August Kundt und Hermann v. Helmholtz in Berlin, den Botaniker Nathanael Pringsheim in Berlin und den Anatomen Josef Hyrtl in Wien durch den Tod verloren.

Carl Maximilian von Bauernfeind.

Am 3. August vorigen Jahres endete das Leben eines Mannes, der in rastloser fruchtbarer Thätigkeit nur durch eigene Kraft und Tüchtigkeit sich zu angesehenster Stellung emporgearbeitet, die Geodäsie und Ingenieurkunde mächtig gefördert und durch die glückliche Organisation des technischen Unterrichtes seinem Vaterlande die grössten Dienste geleistet hat.

Carl Maximilian Bauernfeind wurde am 28. No-

vember 1818 in dem Städtchen Arzberg im Fichtelgebirge als Sohn eines Schmiedmeisters geboren. Die an Kindern reichen, an Mitteln armen Eltern waren nicht in der Lage den Knaben, dessen besondere Begabung sich früh zeigte, einen regelmässigen Studiengang durchmachen zu lassen. Er wurde in die Lateinschule nach dem benachbarten Wunsiedel geschickt, dann in die Gewerbeschule und die polytechnische Schule nach Nürnberg, woselbst er drei Jahre (von 1836 bis 1838) verblieb. Aber gerade die entgegenstehenden Schwierigkeiten stählten seinen Willen und trieben ihn zu ernster Arbeit.

Er hatte das grosse Glück, dass an der polytechnischen Schule zu Nürnberg damals als Professor der Mathematik und Physik Georg Simon Ohm, gleich bedeutend als Forscher wie als Lehrer, wirkte. Bauernfeind schildert ihn in einer am 28. Juli 1882 gehaltenen Gedächtnissrede als unvergleichlichen Lehrer, an welchem die Jugend einen begeisternden Führer nicht bloss im Bereiche der Mathematik und Physik, sondern des Wissens überhaupt fand, von dessen Geiste Jeder eine innerliche Wirkung verspürte. Ohm war sich klar darüber, dass die gewöhnliche Lehrweise durch Vorträge in den Naturwissenschaften nicht ausreichend sei; er suchte die Schüler in ununterbrochenem lebendigem Verkehr durch Fragen und Uebungen an der Tafel zu selbständigem Denken anzuregen. Bauernfeind stand mit seinem geliebten Lehrer noch länger in Briefwechsel und verkehrte später nach dessen Berufung nach München viel mit ihm.

Auf diese Weise vortrefflich vorbereitet, bezog Bauernfeind (1838) die Universität München, wo damals noch die technischen Beamten, die Architekten, Ingenieure etc. ihre Ausbildung empfingen; er war daselbst während zweier Jahre als Studirender der Industrie inscribirt und hörte mathematische, naturwissenschaftliche und staatswirthschaftliche Vorlesungen.

Hier wurde für sein Leben die Begegnung mit einem hervorragenden, ganz eigenartigen Manne der Technik, mit Josef v. Utzschneider, entscheidend. Dieser „edelste Vaterlandsfreund", wie ihn die Grabschrift nennt, hatte sich um die Staats- und Volkswirthschaft in Bayern in höchstem Grade verdient gemacht: ihm verdankt man die Reform der Finanzverwaltung, des Steuerkatasters und der Staatsschuldentilgung, ferner die Durchführung einer für die damalige Zeit musterhaften Landesvermessung, die Anbahnung einer rationellen Forst- und Landwirthschaft, die ersten Versuche mit dem Runkelrübenbau während der Continentalsperre, die Cultivirung ausgedehnter Moosflächen, die Verbesserung des Salzbergbaues und des Sudwesens; er machte ferner mit Georg Reichenbach und Josef Fraunhofer München durch Gründung der mathematisch-mechanischen und optischen Institute zur Pflanzstätte für Feinmechanik; und ward nach seinem Rücktritte vom Staatsdienste als Bürgermeister Münchens in uneigennützigster Weise der Begründer einer Industrie der Stadt durch bedeutende Unternehmungen: durch Anlage einer Lederfabrik, einer Tuchfabrik, einer Spiritusfabrik, einer Glashütte, einer ersten grossen Brauerei etc. An diesen merkwürdigen Mann hatten Bauernfeind seine Nürnberger Lehrer empfohlen, der den Werth und das Streben des jungen Mannes alsbald erkannte, ihm die zur Fortsetzung seiner Studien nöthigen Mittel gewährte, ihm Wohnung in seinem Hause in Obergiesing, dem jetzigen Warthofe, gab und ihn bis zu seinem im Jahre 1840 erfolgten Tode ein wahrer väterlicher Freund und Rathgeber blieb.

Utzschneider hatte ein besonderes Geschick die rechten Leute zu finden und sie auf den ihren Talenten passenden Platz zu stellen. So bestimmte er seinen Schützling, sich dem Ingenieurfach zu widmen. Damals (1840) wurde eben der vierte Jahreskurs der hiesigen polytechnischen Schule

in einen, von dem trefflichen Friedrich August Pauli, dem späteren Oberbaudirektor, geleiteten Ingenieurcurs verwandelt, in welchen Bauernfeind eintrat. Schon ein Jahr darauf bestand er die Staatsprüfung für das Ingenieurfach mit Auszeichnung und kam alsbald als Baupraktikant zu der Eisenbahnbaucommission nach Nürnberg und dann zu der Eisenbahnbausektion nach Hof, woselbst er mit den Projectirungsarbeiten und der Bauleitung für die dortigen schwierigen Bahnbauten beschäftigt war.

Diese für seine fernere Laufbahn äusserst nutzbringende praktische Thätigkeit wurde (1844) unterbrochen durch die Einberufung als Hilfslehrer des Ingenieurcurses nach München, an welchem er drei Jahre vorher noch Schüler war. Nebenbei erhielt er (1846) die Stelle eines functionirenden Ingenieurs der Direction der Eisenbahnen. Im Jahre 1849 erfolgte seine Anstellung als zweiter Professor der Ingenieurwissenschaften an der polytechnischen Schule, 1851 die als erster Professor, womit er die Stellung als Bauingenieur wieder aufgab.

Damit begann für Bauernfeind eine durch fast 50 Jahre fortgesetzte fruchtbare Lehrthätigkeit in der gesammten Ingenieurkunde: im. Strassen-, Brücken- und Eisenbahnbau, sowie in der Geodäsie; er war ein ganz vorzüglicher, klarer und gewissenhafter Lehrer, dem alle bayerischen Ingenieure ihre Ausbildung verdanken, nicht nur die theoretische, sondern auch die praktische durch den Unterricht in der praktischen Geometrie und im Gebrauche der Messinstrumente. Zu dieser Zeit, wo seine Stellung fest begründet war, begann er auch sich mit wissenschaftlichen Problemen zu befassen. In Folge davon hat ihm (1853) die Erlanger Universität, besonders für seine Arbeit über die Planimeter, den Titel eines Doktors der Philosophie verliehen. Doch wurde er (1858) noch einmal in den praktischen Dienst gerufen durch die Ernennung zum Baurath bei der obersten Baubehörde,

wo er während zehn Jahren das Referat über Eisenbahn- und Brückenbauten hatte.

Mittlerweile war ein wichtiger Abschnitt in dem Leben Bauernfeind's herangekommen. Seit längerer Zeit (1857) befasste man sich in Bayern mit dem Plane einer Neuorganisation der technischen Lehranstalten, aber man konnte über die Principien nicht einig werden. Keine Geringeren wie Georg Reichenbach und Josef Fraunhofer hatten schon im Jahre 1823 eine Denkschrift dem Ministerium vorgelegt, worin sie für alle technischen Studien eine auf wissenschaftlicher Grundlage aufgebaute Hochschule verlangten. Erst der Minister v. Schlör griff diesen Gedanken wieder auf und fand in Bauernfeind einen für die Aufgabe begeisterten, ebenso sachkundigen wie energischen Rathgeber. Nicht eine Anstalt zur empirischen Abrichtung und zur Erlernung gewisser Regeln sollte entstehen, sondern eine Stätte der Wissenschaft, in welcher die Schüler befähigt werden zu denken und in den einzelnen Fällen selbst zu entscheiden, was das Richtige ist. Es stand bei ihm fest, dass die Mathematik und die Naturwissenschaften wie Physik, Mechanik, Chemie, Geognosie, Physiologie etc. ebenfalls zu einer allgemeinen Bildung führen, indem sie die Befähigung geben, in fremde Gebiete mit klarem Blicke zu schauen und deren Beziehungen zu dem eigenen Berufe zu erfassen. Ihm wurde nach manchen Kämpfen die ganze Organisation der neuen Hochschule anvertraut, er wählte mit grossem Geschick die ersten Lehrer derselben aus, und er wurde zum Professor der Ingenieurwissenschaften und der Geodäsie, sowie zum Director während der sechs ersten Jahre ernannt. Als im Jahre 1868 die Hochschule in dem prächtigen Neubau eröffnet wurde, da konnte man sagen, dass ein gelungenes Werk vorliege und dass Bauernfeind sich um dasselbe das grösste Verdienst erworben habe. Im Jahre 1874 erhielt er den Titel und Rang eines Directors der technischen Hoch-

schule, und von 1880 bis 1889 führte er abermals das Amt eines Directors derselben. Solange die technische Hochschule bestehen bleibt, wird man sich dankbar des Mannes erinnern, der das Meiste zu ihrer Gründung und zu ihrem Gedeihen gethan hat.

Noch an einer andern bedeutungsvollen Aufgabe konnte sich der Geodät Bauernfeind betheiligen, an der europäischen Gradmessung. Dieses grossartige wissenschaftliche Unternehmen hatte im Jahre 1861 der k. preuss. Generallieutenant J. J. Baeyer, der Schüler Bessel's, ins Leben gerufen; fast alle Staaten Europas betheiligten sich an demselben, so dass es später zu einer internationalen Erdmessung erweitert wurde. Zur Durchführung der für die Zwecke der europäischen Gradmessung in Bayern vorzunehmenden Arbeiten wurde (1868) eine bayerische Commission, bestehend aus Mitgliedern der math.-phys. Classe der Akademie, gebildet. Bauernfeind wurde ständiger Secretär und Stellvertreter des Vorstandes dieser Commission. Dieselbe sollte darüber wachen, dass alle auf Bayern treffenden Gradmessungsarbeiten nach den Beschlüssen der allgemeinen Conferenzen und der permanenten Commission der europäischen Gradmessung vollzogen werden. Sie hatte zunächst die zur Durchführung der Gradmessung in Bayern nöthigen Arbeiten einzuleiten; Bauernfeind fielen die geometrischen Nivellements erster Ordnung zu, wozu er die Instrumente wählte und die Methoden der Nivellirung, sowie die Berechnung der Resultate angab, eine Arbeit, die ihn bis an seine letzten Lebenstage beschäftigte. Im Jahre 1871 trat er in die aus den bedeutendsten Fachmännern zusammengesetzte permanente Commission ein, in welcher er an der Seite Baeyer's zum Vicepräsidenten gewählt wurde.

Indem wir uns nach diesem Ueberblicke über den Lebensgang Bauernfeind's zu seiner wissenschaftlichen Thätigkeit wenden, muss zur Charakterisirung derselben bemerkt werden,

dass dieselbe sich stets als Bedürfniss für seine praktischen Arbeiten als Geodät und Ingenieur ergab; er verfolgte damit den Zweck, die letzteren zu fördern und genauer zu gestalten.

Eine seiner ersten Veröffentlichungen (1846) war der Beitrag zur Theorie der Brückengewölbe. Pauli hatte bei seinen Vorträgen im Ingenieurcurs eine wahrscheinlich aus englischen Quellen geschöpfte höchst einfache graphische Behandlung der in einem Gewölbe thätigen Kräfte mitgetheilt; an Stelle dieses graphischen Verfahrens setzte nun Bauernfeind das analytische und erweiterte so die Gewölbetheorie. Die erste von Pauli construirte Fachwerkbrücke über die Günz entsprach nicht ganz den Anforderungen, was Bauernfeind (1856) veranlasste ein anderes Trägersystem zu berechnen, wornach die von Gerber ausgeführte Construction bei der Grosshesseloher Brücke zur erstmaligen Anwendung kam.

Das von ihm (1851) angegebene Prismenkreuz, ein neues Messinstrument zum Abmessen von Winkeln für Ingenieure und Geometer, hat eine weite Verbreitung gefunden; indem er statt der Spiegel Glasprismen als reflectirende Flächen anwendete, gelang es ihm in Folge der Durchsichtigkeit der letzteren die Bilder zweier Gegenstände in grösserer Ausdehnung zur Deckung zu bringen, als es bei den Spiegeln möglich ist, und so eine genauere Messung zu erzielen.

Seine Besprechung der drei damals (1853) existirenden, aber noch wenig bekannten Planimeter von Ernst, Welti und Hansen hat zur Anwendung dieser Instrumente in der Praxis viel beigetragen.

Bauernfeind's Elemente der Vermessungskunde, ein Lehrbuch der praktischen Geometrie in zwei Bänden (1856 in erster, 1890 in siebenter Auflage erschienen) sind wohl sein bedeutungsvollstes Werk, welches zu seiner Zeit nur von ihm bearbeitet werden konnte. Dieses ungemein klar und verständlich geschriebene, von wissenschaftlichem Geiste erfüllte Lehrbuch hat durch die systematische Zusammenfassung der

damaligen Kenntnisse die Erlernung der Methoden der Vermessungskunde ungemein erleichtert.

Auch die von Bauernfeind herausgegebenen Vorlageblätter zur Brückenbaukunde, zur Strassen- und Eisenbahnbaukunde und zur Wasserbaukunde haben für die Ausbildung des Ingenieurs grossen Nutzen gebracht.

Die seit Anfang des Jahrhunderts in Bayern vorgenommene Landesvermessung hatte zunächst eine nach wissenschaftlichen Principien ausgeführte Triangulation ausgeführt, welche für jene Zeit als musterhaft anerkannt war: Schiegg hatte sich an der Ausführung betheiligt, Soldner die Methoden der Berechnung geliefert und Utzschneider die Einrichtungen gemacht; die besten, aus den Werkstätten von Reichenbach und Ertel und von Fraunhofer hervorgegangenen geodätischen und astronomischen Instrumente waren zur Verwendung gelangt. In dem von der k. b. Steuerkatastercommission und dem k. b. topographischen Bureau (1873) herausgegebenen grossen Werke: Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage prüfte Bauernfeind, ob diese Triangulirung auch den höheren Anforderungen einer Gradmessung genüge, wobei sich zeigte, dass dieselbe, nach Ergänzung des Hauptdreiecknetzes durch eine Anzahl neuer Winkelmessungen und nach Umrechnung der Resultate eines Theils des Hauptnetzes sehr wohl der europäischen Gradmessung eingefügt werden durfte.

In Verbindung mit der europäischen Gradmessung wurden ferner in Bayern ausgedehnte Präcisions-Nivellements unter Bauernfeind's Oberleitung durch die Assistenten der bayerischen Gradmessungscommission ausgeführt. Diese Nivellements längs der Eisenbahnen und Landstrassen, durch welche die Meeresspiegel an den Küsten Europas verbunden und in allen Ländern eine grosse Anzahl genau nivellirter Marken als Grundlagen für weitere Höhenmessungen zu technischen und wissenschaftlichen Zwecken geschaffen werden

sollten, gehören zu dem Besten, was die neuere Zeit auf diesem Gebiete geleistet hat.

Für geodätische Höhenbestimmungen benützt man bekanntlich das Barometer und die trigonometrische Messung; die letztere ist genauer, die erstere aber bequemer. Die barometrischen Bestimmungen erwiesen sich durch noch unbekannte Einflüsse als unsicher. Dies führte Bauernfeind dazu, umfassende Untersuchungen über die Genauigkeit der barometrischen Höhenmessungen anzustellen. Er liess zu dem Zwecke (1857) den grossen Miesing genau geometrisch nivelliren und dann an fünf in Höhenabständen von 270 m befindlichen Punkten von 10 Schülern gleichzeitig Beobachtungen über die Aenderungen des Druckes, der Temperatur und des Wassergehaltes der Luft mit der Höhe machen.

Daran schlossen sich seine beiden Untersuchungen über die atmosphärische Strahlenbrechung (1864 und 1866) an. In der ersteren über die astronomische Strahlenbrechung stellte er die Bessel'schen mittleren Refractionen bis zu 90° Zenithdistanz fest; in der zweiten über die terrestrische Strahlenbrechung ermittelte er auf theoretischem Wege die Abnahme der Coefficienten derselben mit der Höhe als eine nothwendige Folge der früher aus seinen barometrischen Messungen aufgestellten Luftdichtigkeitsformel. Später (1877) wurden auf Veranlassung der Commission der europäischen Gradmessung noch weitere Beobachtungen der terrestrischen Refraction im Fichtelgebirge und dann zwischen dem Schliersee und dem Chiemsee unter seiner Leitung gemacht.

Aus allen diesen Beobachtungen erkannte er in der Wärmestrahlung des Erdbodens die Ursache, warum bei den barometrischen Messungen tägliche Perioden auftreten, indem Mittags grössere, Morgens und Abends kleinere Höhen als die wirklichen erhalten werden. Er entwickelte ferner Gleichungen für die die verschieden dichten Schichten der Atmosphäre durchdringenden Lichtstrahlen und wies auch

für die trigonometrische Höhenmessung einen Einfluss der Wärmestrahlung des Erdbodens in täglichen Perioden nach. Für die Geodäsie, die barometrischen Höhenbestimmungen, sowie auch für die Meteorologie waren diese Arbeiten Bauernfeind's von Belang; er hat sie für seine bedeutendste Leistung gehalten.

Es ist, wie man ersieht, nicht die reine Mathematik oder die Physik, welche Bauernfeind durch neue Erkenntnisse bereicherte; er hat vielmehr durch die Anwendung derselben für die wissenschaftliche Ausbildung der Geodäsie und Ingenieurkunde Bedeutsames geleistet und ist dadurch, sowie durch die mit Geschick organisirten und geleiteten gemeinschaftlichen Messungen seiner Schüler zu einem der angesehensten Vertreter in seinem Fache geworden. Das hohe Ansehen und die Achtung, welche er sich allseitig errungen hat, zeigte sich besonders bei der Feier seines 70. Geburtstages am 28. November 1888, den er noch in voller Rüstigkeit im Amte beging.

So ist der aus dem Volke hervorgegangene Sohn des Schmiedes durch eigene Kraft seines Glückes Schmied geworden. Der mächtige Kopf mit den ausdrucksvollen scharfen Zügen liess alsbald den bedeutenden Mann von festem Charakter erkennen, welcher genau wusste, was er wollte, und mit umsichtiger Klugheit durchsetzte, was er anstrebte. Eine vornehme Erscheinung von gemessenem Wesen verlangte er Beachtung seiner Stellung und zeigte, dass er zu herrschen gewohnt war.

Ein Jahr nach seinem 70. Geburtstage legte er die Geschäfte eines Directors der technischen Hochschule nieder, da sich Symptome des Nachlassens der Kräfte bemerklich machten; 1890 trat er auch vom Lehramte zurück. Es stellten sich die Anfänge eines schweren Leidens ein, dessen Qualen er mit Heldenmuth ertrug. Klaren Geistes nahm er Abschied von seiner Familie und seinen Freunden mit dem Bewusstsein sein Leben gut angewendet zu haben.

Karl von Haushofer.

Die mathematisch-physikalische Classe beklagt den allzufrühen Tod eines verdienten, reich veranlagten und höchst liebenswürdigen Collegen, welcher wissenschaftliche und künstlerische Befähigung in gleichem Grade in sich vereinigte.

Karl Haushofer erblickte am 28. April 1839 zu München als Sohn des Landschaftsmalers Max Haushofer das Licht der Welt. Letzterer gehörte zu denjenigen hiesigen Malern, welche damals begannen im bayerischen Gebirge Studien nach der Natur zu machen; es war eine idyllische Zeit voll Frohsinns und freudigen Schaffens. In der Sorge um seine Familie verliess er 1844 mit schwerem Herzen die Heimath, um einen Ruf als Professor an die Kunstakademie zu Prag anzunehmen, woselbst der Sohn die Jugendjahre verbrachte.

Letzterer hatte von dem Vater das Verständniss für die Schönheit der Natur und das Talent für die künstlerische Darstellung geerbt. Frühzeitig fing er an zu zeichnen und zu malen, und zwar Alles, was ihm vorkam, Landschaftliches und Figürliches. Dieser aufs Feinste ausgebildete Farben- und Formensinn und das Talent des Zeichnens kam ihm später bei seinen wissenschaftlichen Arbeiten, bei den von ihm entworfenen geologischen Wandtafeln und bei den Vorlesungen sehr zu Statten. Die Liebe zur Naturschönheit wurde gepflegt und entwickelt durch den Aufenthalt an dem Chiemsee, wo die Eltern Haushofer's, an beständigem Heimweh nach der bayerischen Heimath leidend, alljährlich zwei Sommermonate zubrachten. Die Bilder jener Landschaft: See, Wald und Hochgebirge senkten sich tief in die Seele des Knaben und noch in späteren Jahren suchte er dorten, bis kurz vor seinem Tode, Erholung nach den Mühen der Arbeit.

In Prag besuchte er das deutsche Gymnasium auf der Kleinseite (1849—1856), an welchem einsichtsvolle Lehrer

wirkten. Auch die Naturwissenschaften wurden daselbst eifrig gepflegt: Physik, Botanik, Zoologie und Mineralogie waren obligate Lehrgegenstände. Der junge Haushofer nahm das grösste Interesse daran und beschäftigte sich auch zu Hause mit physikalischen und chemischen Experimenten. Besondere Neigung brachte er der Mineralogie entgegen; der Vater besass eine nicht unbedeutende Mineraliensammlung, welche dem Sohn zur Anregung diente, so dass er schon als Gymnasiast jedes ihm vorkommende Mineral bestimmen lernte.

Nur ungern hatte sich der Vater von seinen beiden Söhnen (1856) getrennt, um dieselben in Bayern das Gymnasium absolviren zu lassen, da er wünschte, dass sie in der alten Heimath ihren künftigen Lebensweg suchen sollten, nicht in Böhmen, wo schon damals die Nationalitätenfrage das Dasein immer unerquicklicher gestaltete. So absolvirte der junge Haushofer (1857) das Maximilians-Gymnasium zu München und trat dann an die hiesige Universität über.

Es war fast selbstverständlich, dass die Liebe zur Natur und die schon erlangten Kenntnisse ihn bestimmten, sich den Naturwissenschaften, insbesondere der Mineralogie und Geognosie zuzuwenden. Nachdem er noch ein Semester in Prag zugebracht hatte, ging er (1859) an die sächsische Bergakademie zu Freiberg. Der Berghauptmann v. Beust war damals der Leiter dieser in höchstem Ansehen stehenden Anstalt, an welcher Studirende aus allen Welttheilen sich zusammenfanden; unter der Führung des alten Weishaupt wurden berg- und hüttenmännische Studien neben Chemie und Mineralogie betrieben.

Nach Vollendung der Freiberger Studien musste er sich entscheiden, ob er der Theorie oder dem praktischen Bergwesen sich zuwenden sollte. Namentlich auf eine Anregung aus den Kreisen von Prager Grossindustriellen hin und auch in der Hoffnung bälder zu einem selbständigen

Erwerb zu gelangen, entschloss er sich dazu, sich dem Eisenhüttenwesen zu widmen. Er trat (1861) in eines der grössten böhmischen Eisenhüttenwerke, in die Hermannshütte bei Stab nächst Pilsen, ein, um mit dem einfachsten Arbeiter die harte Arbeit bei der Gluth des Puddelofens zu theilen. Obwohl er bald zum Walzmeister und Betriebsassistent vorrückte, war es dem wissensdurstigen, feinfühlenden jungen Manne nicht möglich eine solche Beschäftigung und die Aufsicht über 400 Arbeiter weiter zu führen. Todmüde, mit Kohlenstaub bedeckt und häufig mit Brandwunden an den Händen von der Arbeit nach Hause kommend, vermochte er nicht mehr ein Buch zu lesen und sich weiter zu bilden.

Der Vater war sehr bestürzt, als er bei einem Besuche der Hütte eine gewisse Verwahrlosung des Sohnes bemerkte; er drang in ihn, die aufreibende praktische Laufbahn und die schon erlangte gute Stellung zu verlassen und zu der Wissenschaft zurückzukehren. Die in der Hütte erworbenen Erfahrungen waren jedoch für ihn nicht verloren; er konnte sie für seine späteren Vorlesungen an der technischen Hochschule gut verwerthen.

Er kam wieder an die Universität München, hörte Vorlesungen bei Liebig und Jolly, und arbeitete namentlich bei Kobell, welcher ihn als Assistenten aufnahm und den ihm in seinem ganzen Wesen sympathischen und in vielen Stücken gleichgesinnten jungen Forscher lieb gewann; er blieb ihm ein allzeit wohlwollender Gönner und Freund.

Im Jahre 1864 löste Haushofer eine von der philosophischen Facultät gestellte Preisfrage physikalischen Inhalts: „Untersuchungen über die bei Auflösung von Salzen in Wasser eintretenden Temperatur-Erniedrigungen". Die Aufgabe war von Jolly gestellt und in seinem Laboratorium bearbeitet worden. Nun promovirte Haushofer, habilitirte sich (1865) als Privatdozent an der Universität für das Fach der Mineralogie, und wurde, als die technische Hochschule

(1868) dahier gegründet wurde, Professor für Mineralogie und Eisenhüttenkunde an derselben. Als solcher hatte er die mineralogische und hüttenmännische Sammlung und das mineralogische Laboratorium einzurichten. Er war ein vorzüglicher, pflichtgetreuer Lehrer, befähigt durch ausgebreitete theoretische und praktische Kenntnisse in seinem Fache.

Durch diese seine Eigenschaften und durch sein einnehmendes Wesen erwarb er sich bald das Vertrauen seiner Collegen, die ihn wiederholt zum Vorstande der chemisch-technischen Abtheilung erwählten. Und als im Jahre 1889 der Geh. Rath v. Bauernfeind das Directorium der technischen Hochschule niederlegte, kam Haushofer an seine Stelle, welche er bis zu seinem Lebensende behielt. Er hat die in ihn gesetzten Erwartungen erfüllt; als ein gerechter, friedliebender, umsichtiger Vorstand hat er sein schwieriges Amt verwaltet, nur das Wohl der Anstalt berücksichtigend.

Die nicht sehr zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten Haushofer's zeichnen sich durch feine Beobachtung aus.[1])

In seiner Habilitationsschrift (1865) beschäftigte er sich mit den regelmässigen Vertiefungen, welche durch Aetzung mit Säuren auf den Flächen des Kalkspaths entstehen, und den durch Brewster entdeckten Lichtfiguren, welche derartige geätzte Platten hervorbringen. Nachdem er in den folgenden Jahren verschiedene Mineralanalysen und die trefflichen „Hilfstabellen zur Bestimmung der Gesteine“ veröffentlicht hatte, wandte er im Jahre 1873 sein Interesse der schwierigen Frage der chemischen Constitution der natürlichen Silikate zu. In einer Abhandlung in den Annalen der Chemie und in einer besonderen Schrift (1874) versuchte er, die modernen chemischen Anschauungen auf die in der Natur vorkommenden kieselsauren Verbindungen anzuwenden und für

---

1) Die Notizen über Haushofer's wissenschaftliche Thätigkeit verdanke ich der Güte des Herrn Collegen Groth.

dieselben Constitutionsformeln aufzustellen, welche den genetischen Beziehungen derselben Rechnung tragen. Da diese letzteren die einzige thatsächliche Grundlage einer solchen Aufstellung bilden, so können die so erhaltenen Formeln nicht denjenigen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzen, welche den Formeln von organischen Verbindungen zukommt, die entweder durch Synthese aus constitutionell bekannten Körpern gewonnen oder durch allmählichen Abbau in einfachere Verbindungen zerlegt werden können. Dazu kommt, dass die damalige Kenntniss der empirischen Zusammensetzung der natürlichen Silikate noch vielfach eine ungenügende war und in zahlreichen Fällen noch heute nicht zu einem Versuche, auf die Constitution derselben zu schliessen, berechtigt. Immerhin finden sich in Haushofer's Zusammenstellungen, welche er selbst nur als einen „Versuch" bezeichnet, manche Auffassungen, die auch jetzt noch als richtig anerkannt werden müssen.

Auf dem Gebiete der Krystallographie veröffentlichte Haushofer eine Reihe kleinerer Mittheilungen, meist Untersuchungen über die Krystallformen organischer Substanzen, theils in der Zeitschrift für Krystallographie, theils in den Arbeiten der Chemiker, welche jene Körper dargestellt hatten, seit dem Jahre 1877 bis zu seiner letzten Erkrankung.

Daneben gingen her Versuche über das Verhalten des Dolomits gegen Säuren, besonders aber seit 1880 Studien über die mikroskopischen Krystallformen in Niederschlägen. Der Gedanke, die Gegenwart gewisser Elemente durch mikroskopische Beobachtung der Krystallform von Verbindungen zu erkennen, war zuerst von einigen Petrographen zu mikroskopischen Reactionen auf Bestandtheile der Mineralien in Gesteinen benutzt worden. Haushofer wandte denselben nun als Hülfsmittel der qualitativen chemischen Analyse auf eine Reihe von Stoffen an, für welche es an empfindlichen Reactionen fehlt, und zeigte, wie man auf diesem Wege in

vielen Fällen, selbst bei sehr geringen Mengen verfügbarer Substanz noch den einen oder anderen darin enthaltenen Bestandtheil sicher nachweisen könne. Namentlich bei den sogenannten seltenen Erden ist durch ihn die mikroskopische Methode ein wichtiges Hülfsmittel bei der chemischen Analyse geworden. Eine systematische Zusammenstellung der mikroskopischen Reactionen, als Anleitung zur Erkennung verschiedener Elemente und Verbindungen unter dem Mikroskope und als ein Supplement zu den Methoden der qualitativen Analyse, gab er im Jahre 1885 heraus; auch führte er zahlreiche junge Chemiker durch ein von ihm abgehaltenes Practicum in diese Methode ein.

Seine rege Theilnahme an dem deutschen und österreichischen Alpenverein, zuerst als Redacteur der Vereinszeitschrift, dann als Präsident der Section München, hat auch der Wissenschaft Nutzen gebracht, denn er war stets bemüht, dem Verein wissenschaftliches Interesse zu verleihen, die Veröffentlichungen in der Zeitschrift gediegen zu gestalten und die bildliche Ausstattung derselben zu veredeln: seine Gebirgslandschaften zeichnen sich durch die scharfe Charakteristik der Bergprofile und seine Hochgebirgskarten durch ein besonderes landschaftliches Verständniss aus. Er wird auch in der Geschichte der Erschliessung der Ostalpen genannt als einer der ersten, welche die Zillerthaler Eispässe begingen, zu einer Zeit, wo das Führerwesen und der Wegbau noch in den Anfängen waren.

Sowie in der Natur suchte er auch im Leben das Rechte und Schöne. Er war ein ideal denkender Mensch, der höhere Ziele erstrebte und seinen Gedanken und Gefühlen auch in poetischer Form Ausdruck zu geben wusste.

Der im Jahre 1890 erfolgte Tod seiner geliebten Gattin wirkte auf den vorher so kräftigen Mann erschütternd ein; zwei Jahre darnach hatte er einen heftigen Anfall von In-

fluenza, von welchem er sich nicht mehr erholen konnte. Er starb nach langem Leiden am 8. Januar 1895, betrauert von Allen, welche seine edlen Eigenschaften gekannt haben.

August Kundt.

Die Physik hat in den letzten Jahren durch das Ableben ihrer hervorragendsten Vertreter in Deutschland die schmerzlichsten Verluste erlitten; nach dem viel betrauerten Heinrich Hertz ist August Kundt und nach diesem Hermann Helmholtz im Zeitraum von 9 Monaten gefolgt.

August Kundt ist am 21. Mai 1894 in vollem Schaffen, erst 54 Jahre alt; gestorben. Ein Schüler von Magnus ist er durch sein Talent in kurzer Zeit einer der ersten Physiker geworden; an den Hochschulen von Zürich, Würzburg, Strassburg und Berlin hat er als unübertrefflicher Lehrer, der eine überaus grosse Zahl wissenschaftlich thätiger Schüler in seinem Laboratorium vereinigte, und als hervorragender Forscher gewirkt.

Von seltener Frische des Geistes und unverwüstlicher Arbeitskraft war er ein von Wenigen erreichter Meister im Experiment, der mit ungewöhnlichem Geschick und Scharfsinn die Mittel fand, die schwierigsten Aufgaben durch den Versuch zu lösen, wodurch es ihm gelang, auf den verschiedensten Gebieten die Physik mit vielen wichtigen Thatsachen und Erkenntnissen zu bereichern. Er gehörte nicht zu den eigentlichen mathematischen Physikern, aber er ging bei seinen Arbeiten zumeist mit feinem Verständniss für die vorliegenden Fragen von theoretischen Betrachtungen aus.

Bei seinen ersten, auf dem Gebiete der Akustik sich bewegenden Arbeiten, gelang es ihm, eine neue höchst sinnreiche Methode der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zu finden, deren Anwendung ihn zu bedeutungsvollen Aufschlüssen führte. An seine Untersuchungen über die

Doppelbrechung des Lichtes in tönenden Stäben hatte sich ein Versuch über die Uebertragung der Bewegung longitudinal schwingender Röhren auf hineingesteckte Körper, sowie auf die Luft in denselben angeschlossen; es zeigte sich dabei die auffallende Erscheinung, dass an der Innenfläche der Glasröhre vertheilter feiner Staub sich in bestimmten Figuren, den Knotenpunkten stehender Schwingungen der eingeschlossenen Luft, anordnet, wenn man die an beiden Enden verschlossene Röhre durch Reiben in longitudinale Schwingungen versetzt. Daraus war er nun im Stande in einfachster und genauester Weise die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallwellen in den in der Röhre befindlichen Gasen und Dämpfen, sowie auch in festen Körpern zu bestimmen. Indem er diese Methode immer mehr vervollkommnete und verschiedene longitudinal schwingende Körper unter mannigfaltigen Bedingungen anwandte, ergaben sich ihm Resultate von allgemeiner Bedeutung, die auch zu dem chemischen Verhalten der Stoffe in Beziehung zu bringen waren. Hierher gehören auch seine Versuche über die Klangfiguren in Orgelpfeifen, über die Schwingungsform tönender Platten, die Erzeugung von Tönen durch Flammen, die Schwingungen von rechteckigen Luftplatten.

Nach diesen akustischen Studien ging er zu optischen Fragen über. Er war auf den Gedanken gekommen, dass Metalle und metallisch glänzende Körper Unregelmässigkeiten in der Brechung des Lichtes zeigen müssten. Durch einen genialen Kunstgriff besiegte er die der Beobachtung fast undurchsichtiger fester Körper und Lösungen entgegenstehenden Schwierigkeiten und that dar, dass in der That eine Anzahl von Lösungen von Stoffen, welche im festen Zustande Oberflächenfarben besitzen, anomale Dispersion zeigen.

In einer für die kinetische Gastheorie höchst folgereichen mit seinem Schüler K. Warburg ausgeführten Untersuchung bestimmte er die Reibung und Wärmeleitung der Gase und

die specifische Wärme des Quecksilberdampfes. Es war nämlich die Frage zu entscheiden, ob im Quecksilberdampf wie bei anderen Gasen mehrere Atome zu einem Molekül vereinigt sind oder ob es, wie unser College v. Baeyer vermuthete, ein einatomiges Gas sei. In letzterem Falle musste ein bestimmter Quotient der Wärmecapacität bei constanter Temperatur und constantem Druck sich ergeben, der aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich bestimmen liess. Dieser Quotient wurde nun auch wirklich durch den Versuch gefunden.

Mit Hilfe des Lichtenberg'schen Pulvers untersuchte er die elektrischen Erscheinungen an Krystallen, die Thermo-, Actino- und Piëzo-Elektrizität derselben. Es folgte der Nachweis der elektro-magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes in Gasen, z. B. im Schwefelkohlenstoffdampf, in der Luft, dem Sauerstoff, dem Kohlenoxydgas und Sumpfgas; und dann auch im Eisen, Nickel und Kobalt, indem er den Durchgang des polarisirten Lichtes durch dünne durchsichtige Schichten dieser Metalle, welche er starken elektrischen Strömen aussetzte, beobachtete. Ferner die Entdeckung der Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten, und die Untersuchung über die Doppelbrechung elektrisirter Flüssigkeiten.

Die Kunst der Darstellung äusserst dünner durchsichtiger Ueberzüge von Metallen auf Glasplatten benützte er in seiner letzten hervorragenden Arbeit zur ersten directen Bestimmung der Brechungsexponenten der Metalle.

Kundt's Name wird sich stets an die von ihm durch seine Experimentirkunst erschlossenen Gebiete der Physik knüpfen.

Nathanael Pringsheim.

Der am 6. Oktober 1894 zu Berlin im 71. Lebensjahre gestorbene Botaniker Nathanael Pringsheim war einer der ältesten Vertreter der durch Alexander Braun, Schleiden, Nägeli u. A. begründeten pflanzenphysiologischen Richtung, dem die Botanik vielfache Aufschlüsse über den Bau und das Leben der Pflanzenzellen verdankt; vor Allem sind es seine meisterhaften Untersuchungen der mikroskopischen Algen, womit er seinen Ruhm begründet hat.

Pringsheim widmete sich, angeregt durch Alexander Braun, frühe der Botanik zu, habilitirte sich an der Berliner Universität, wurde bald in Folge seiner Algenstudien auf Ehrenberg's Antrag in die dortige Akademie der Wissenschaften aufgenommen, folgte aber einem Rufe nach Jena als Nachfolger Schleiden's. In Jena gründete er das erste gut eingerichtete pflanzenphysiologische Institut, in welchem zahlreiche Schüler unter seiner Führung wissenschaftlich thätig waren. Er gab jedoch nach einigen Jahren diese Professur wieder auf und siedelte nach Berlin über, um als unabhängiger Mann und Privatgelehrter ungestört ganz der Wissenschaft leben zu können. Mit den reichen ihm zu Gebote stehenden Mitteln errichtete er daselbst abermals ein Laboratorium, worin er freigebig seine Schule aufnahm.

Er begann die lebenden Pflanzenzellen ihrem Bau und ihrer Entwicklung nach unter dem Mikroskope genau zu beobachten, wobei sich neue Auffassungen über das Protoplasma der Zellen und seine Beziehungen zur Membran, die man früher als das Wesentliche der Zelle angesehen hatte, ergaben. Er wurde dadurch zum Studium der mikroskopischen Algen geführt, deren gründliche Durchforschung wohl seine grösste Leistung ist. Er war der erste, der diese interessante Gruppe von niederen Pflanzen, welche die wichtigsten Aufschlüsse über allgemeine Fragen der Morphologie,

Physiologie und Systematik gegeben hat, aus dem Chaos vereinzelter und unvermittelter Beobachtungen zu erlösen angefangen hat, indem er mit unvergleichlicher Ausdauer die winzigen Pflanzen mit dem Mikroskop verfolgte, bis er ihre Geschichte erforscht hatte. Er ist es gewesen, der an ihnen (an der grünen Süsswasseralge Vaucheria terrestris und an Oedogonium) im Jahre 1855 zuerst den Befruchtungsact bei Pflanzen, als geschlechtliche Fortpflanzung und Zeugung, wirklich beobachtete, indem vor seinen Augen die männlichen Spermatozoen sich mit dem frei gelegten Inhalte der weiblichen Eizelle vereinigten und somit beide Theile sich an der Bildung des befruchteten Embryo betheiligten, während man früher die Befruchtung als eine Contactwirkung oder als Diffusion von gelösten Substanzen ansah; ein Jahr vorher war beim Thier (Frosch und Kaninchen) von de Bary das Eindringen der Spermatozoen in das Ei nachgewiesen worden. Pringsheim zeigte ferner dabei, wie bei den Algen geschlechtliche und ungeschlechtliche Fortpflanzung regelmässig mit einander abwechseln und wie die Species von der sexuell gebildeten Spore aus durch eine Reihe von Wachsthumsprocessen und geschlechtslosen Vermehrungen in gesetzmässigem Turnus zu dem nämlichen Ausgangspunkte zurückkehrt. Indem er so von einzelnen dieser Pflanzen eine ausführliche von Zelle zu Zelle fortführende Wachsthumsgeschichte und Entwicklung gab, wurde er zur Bildung natürlicher systematischer Abtheilungen in dem Gewirre räthselhafter Formen geführt, zur Aufstellung bestimmter Arten in diesen Gruppen, welche man bis dahin meist nur nur nach der Grösse der Zellen unterschieden hatte. Nur die in dieser Weise beobachteten mikroskopischen Algen können jetzt als wissenschaftlich erkannt gelten; sie erheben sich wie Inseln aus dem Meere der übrigen noch unbekannten Formen.

Er machte ferner zuerst die auffallende Wahrnehmung,

wie gewisse niedere parasitische Pilze in das Innere gesunder unverletzter Pflanzen eindringen, sich in letzteren weiter entwickeln und verbreiten, sodass sie durch den Eindringling allmählich erkranken und absterben; es ist dies ein Vorgang, der später manche Pflanzenkrankheiten erkennen liess und besonders durch den weiteren Nachweis des Entstehens epidemischer Erkrankungen des Menschen durch in ihn gelangte Spaltpilze von Bedeutung ward.

Von den weiteren Arbeiten Pringsheim's mögen nur einige der wichtigeren zur Charakterisirung seiner Thätigkeit noch Erwähnung finden: seine Untersuchung über die Entwicklung und die Dauerschwärmer des sogenannten Wassernetzes, über die Vorkeimfäden oder die Protonemen der Armleuchtergewächse, über die Keimung und den Aufbau der zierlichen Wasserfarn, über die Embryobildung der Gefässkryptogamen, über die Morphologie der Utricularia, deren Schläuche er auf Schwärmsporen zurückführte, über die männlichen Pflanzen und Schwärmsporen der Gattung Bryopsis.

Von grundlegender Bedeutung ist seine Arbeit über die Paarung der Schwärmsporen, in welcher er die Copulation der Schwärmsporen von Pandorina beschrieb und als morphologische Grundform der Zeugung im Pflanzenreiche darthat.

In mehreren Beiträgen zur Morphologie, zum Befruchtungsakt und zur Systematik der Saprolegnieen wies er die Copulationswarzen der Oogonien und die Copulation der Befruchtungsschläuche der Antheridien mit ersteren nach; auch dass bei ihnen häufig eine parthenogenetische Entwicklung der Oosporen unbefruchteter Oogonien stattfindet.

Die Abhandlung über den Gang der morphologischen Differenzirung in der Sphacelarienreihe bringt eine Darstellung des von den niederen Gattungen derselben zu den höheren fortschreitenden morphologischen Aufbaues in den Vegetations- und Reproduktionsorganen.

Von Wichtigkeit sind ferner die umfangreichen Untersuchungen über das Chlorophyll, in welchen er das spektroskopische Verhalten desselben, sowie die Einwirkung des directen Sonnenlichts auf dasselbe prüfte. Er sah in diesem grünen Farbstoff ein Athemorgan und ein Schutzorgan des Protoplasmas gegen die Wirkung des Lichtes.

Von grossem Interesse war der Nachweis, dass die Zellen der Mooskapseln, sowie die ihres Stieles unmittelbar zu den fadenförmigen Vorkeimen und zu den beblätterten Moospflanzen auswachsen können, wobei also die generative Sporenbildung übersprungen wird. Er hat daran später wichtige allgemeine Betrachtungen über den Generationswechsel der Thallophyten und seinen Anschluss an den Generationswechsel der Moose geknüpft.

Endlich hat er über die Absonderung von Kalk an gewissen Pflanzen, z. B. den Charaarten berichtet; da aus wässrigen Lösungen von kohlensaurem Kalk diese Ausscheidung nicht stattfindet, so musste sie durch die Lebensthätigkeit jener Gewächse bedingt sein.

Ein grosses Verdienst erwarb sich Pringsheim durch die 1858 erfolgte Gründung der Jahrbücher für wissenschaftliche Botanik, welche er bis zu seinem Tode leitete; ebenso durch die Gründung der deutschen botanischen Gesellschaft, deren ständiger Präsident er war.

Pringsheim hat wesentlich dazu beigetragen, der Botanik ihre heutige Gestaltung zu geben. Immer sind es Fragen von allgemeiner Bedeutung, welche er durch scharfe Beobachtung und kritische Betrachtung zu lösen unternahm; seine Arbeiten sind dauernde Fundamente für die Wissenschaft geworden.

Josef Hyrtl.

Mit Josef Hyrtl, welcher am 17. Juli 1894 im 83. Lebensjahre auf seinem Landgute zu Perchtoldsdorf bei Wien gestorben ist, ist der letzte Vertreter der berühmten Wiener medicinischen Schule dahingegangen. Er war einer der erfahrensten Anatomen seiner Zeit und ein unübertroffener, seine Schüler begeisternder Lehrer. Schon während seines Studiums an der Wiener Universität hatte er eine Vorliebe für die Formen der thierischen Organisation; er zeichnete sich durch eine seltene Geschicklichkeit in der Präparation der Theile aus, sodass sein Lehrer, der bekannte Anatom Berres, ihn zu seinem Prosektor machte. Bald nach seiner Promotion wurde der 26 jährige Gelehrte als Professor der Anatomie an die Prager Universität gerufen und erhielt dann nach dem Tode von Berres dessen Stelle in Wien, wo er bis zu seiner Emeritirung thätig war und in höchsten Ehren stand.

Hyrtl besass eine umfassende allgemeine Bildung, er war ein geistvoller origineller Mann, schrieb ein klassisches Latein und sprach gewandt viele neuere Sprachen; in der Literatur und Geschichte der Medicin war er wie Wenige bewandert.

Als feinsinniger Beobachter hat er die fast abgeschlossen erscheinende Anatomie des Menschen um eine grosse Anzahl neuer Thatsachen bereichert, besonders aber die vergleichende Anatomie, welche er mitbegründen half und in der seine zahlreichen Beiträge sich in ihrer Bedeutung nur mit denen von Johannes Müller vergleichen lassen.

Von ganz besonderer Wirkung für die Ausbreitung anatomischer Kenntnisse sind seine klassischen Lehrbücher geworden: das Lehrbuch der Anatomie des Menschen, welches 23 Auflagen erlebte und sein Lehrbuch der topographischen Anatomie. Es war in denselben nichts mehr von der gewöhnlichen trockenen Aufzählung der Theile zu bemerken,

es sind vielmehr darin die Formen in klarster plastischer Darstellung zu einem lebendigen Ganzen verbunden, das durch die Verwebung mit historischen Daten, sowie durch die Hervorhebung der physiologischen Bedeutung das lebhafte Interesse des Lesers erweckt.

Er war ein Meister in der anatomischen Technik und noch jetzt werden seine Präparate, namentlich seine Injectionen der feinsten Blutgefässe, als kostbare Objecte in den anatomischen Sammlungen aufbewahrt. Hyrtl wird stets zu den geschicktesten Anatomen gezählt werden.

Hermann von Helmholtz.

Mit Hermann Helmholtz ist der berühmteste und bedeutendste Naturforscher unserer Zeit, welcher auf vielen Gebieten, in der Mathematik, Physik, Physiologie, Philosophie und der Aesthetik, ganz neue Bahnen geebnet hat, geschieden. Uebersehen wir jetzt das vor uns abgeschlossen liegende Leben und Wirken dieses mächtigen Geistes, so gewahren wir, wie von frühester Jugend an in ihm das erkennbar, was sich später so glänzend entfaltete, wie er mit einer wunderbaren Klarheit die schwierigsten Probleme erfasste und durchdachte und mit unerreichtem Geschick dem Experiment zugänglich machte, bis er die Lösung gefunden hatte, so weit als es überhaupt möglich war. Mit Ehrfurcht und Dankbarkeit gedenken wir seiner, der trotz aller äusserlichen Anerkennung und Bewunderung stets ein schlichter bescheidener Gelehrter und edelgesinnter Mensch blieb, und nur nach der Erkenntniss der Ursachen der Dinge und nach der Wahrheit strebte.

Der Lebensgang von Helmholtz ist in der letzten Zeit so oft und in so vorzüglicher Weise geschildert worden, dass ich hier nur einen Ueberblick über seine hauptsächlichsten Leistungen auf dem Gebiete der Physiologie geben will, um

uns die Bedeutung des Forschers und Denkers nochmals zu vergegenwärtigen und ihm auch von Seite unserer Akademie den schuldigen Tribut der Verehrung darzubringen.

Für Alles, was sich begreifen und logisch entwickeln lässt, zeigte er schon als Knabe eine Vorliebe und ein ausgeprägtes Talent, für die Sätze der Geometrie und dann für die Lehren der Physik. Es ist für die Wissenschaft ein Glück zu nennen, dass ihm seine Mittel nicht erlaubten sich alsbald der Physik zuzuwenden, sondern dass er vorerst Mediciner werden musste; viele und zum Theil die wichtigsten seiner Arbeiten wären sonst kaum entstanden. So wurde er zunächst zu derjenigen medicinischen Wissenschaft geführt, welche vor Allem sich mit der Erklärung der Erscheinungen befasst, zu der Physiologie, und von da erst später zu den rein physikalischen Vorgängen. Den weiten Ueberblick über andere Wissensgebiete, sowie die Neigung zu philosophischer Betrachtung verdankt er der Physiologie mit ihren engen Beziehungen zu der Philologie, Aesthetik, Philosophie und Psychologie. Aber auch für die Physiologie war es ein Glück, dass ein so grosses Talent für Mathematik und Physik sich ihr widmete und zwar zu einer Zeit, wo eine Menge der wichtigsten physikalischen Probleme der Lösung harrten.

Es war auf seine Entwicklung sicherlich von bestimmendem Einfluss, dass er als Lehrer in der Anatomie und Physiologie Johannes Müller fand, welcher, obwohl er noch längere Zeit in der Lehre von der Lebenskraft befangen war, doch die Lebensvorgänge durch Beobachtung und durch den Versuch zu erforschen trachtete und dadurch die neuere Physiologie anbahnte; er stellte z. B. den künstlichen Kehlkopf zur Erläuterung des Zustandekommens der Stimme her und wagte es zuerst von einer Physik der Nerven zu sprechen. Es ist gewiss kein Zufall, dass sich um diesen äusserst anregend wirkenden Mann so viele talentvolle und strebsame Jünger sammelten, wie Henle, Schwann, du Bois-Reymond,

Brücke, Virchow, Helmholtz, lauter spätere Koryphäen der Wissenschaft, welchen man vorzugsweise den Ausbau der Physiologie in physikalischer Richtung verdankt. Die Mehrzahl der Freunde fand sich auch im Laboratorium des Physikers Gustav Magnus, des Meisters im Experiment, sowie in der physikalischen Gesellschaft zusammen.

Nach kaum vollendeter Lernzeit an der Universität begann Helmholtz in bemerkenswerther Weise wissenschaftlich sich zu beschäftigen; stets waren es Fragen von principieller Bedeutung, denen er sich zuwandte.

Er arbeitete mit einem aus seinen Ersparungen angeschafften Mikroskop seine Dissertation aus, in welcher er den für die damaligen Hilfsmittel nicht leicht zu beobachtenden Zusammenhang der vorher von Ehrenberg entdeckten Ganglienzellen mit den Nervenfasern bei wirbellosen Thieren sicher nachwies; es hatte zwar schon vorher Remak diesen Zusammenhang beschrieben, aber keinen Glauben gefunden. Mit dieser Erkenntniss war zuerst ein Aufschluss über die Bedeutung dieser Zellen als nervöse Centralorgane gegeben. Später hat sich Helmholtz nochmals mit anatomischen Aufgaben befasst: mit der Beschreibung der Rippenmuskeln für die Athembewegungen und der äusserst sorgfältigen Beobachtung der Form der Gehörknöchelchen und ihrer Gelenke.

Es folgte die Abhandlung über das Wesen der Fäulniss und Gährung. Schwann hatte durch ingenieuse Versuche gezeigt, dass keine Gährung eintritt, wenn man geglühte Luft zu den Gährkölbchen zutreten lässt, und dass die Hefezellen die Ursachen der Gährung sind; Helmholtz that Liebig gegenüber dar, dass der Sauerstoff keinen Einfluss auf die Fäulniss hat; er drang aber nicht zu der Erkenntniss vor, dass auch hier niedere Organismen die alleinige Ursache sind.

In dem Artikel „Wärme“ im encyklopädischen Wörterbuch der medicinischen Wissenschaften versuchte er aus den damals vorliegenden wenig genauen Daten über die Kohlen-

säureausscheidung und die Sauerstoffaufnahme des Menschen, den in ihm im Tag verbrannten Kohlenstoff und Wasserstoff zu berechnen und daraus die im Körper erzeugte Wärmemenge zu entnehmen; er kam dabei aber doch zu einem Werth (2,7 Mill. W. E.), der sehr wohl mit den jetzt bekannten genauen Zahlen übereinstimmt.

Zu der Studienzeit von Helmholtz waren bekanntlich die meisten Physiologen Deutschlands, in Folge der unseligen naturphilosophischen Richtung, Anhänger der Lehre einer besonderen unerforschbaren Lebenskraft, welche die Lebensvorgänge bedingen und die physikalischen und chemischen Kräfte der anorganischen Natur beherrschen sollte. E. H. Weber war einer der Wenigen, der besonders darauf drang, die Erklärung der Lebenserscheinungen auf Grund der Beobachtung und des Versuchs wie die der physikalischen Processe zu finden und die unfruchtbaren naturphilosophischen Speculationen zu verlassen. Ein Geist wie Helmholtz, der in Allem nach den Ursachen suchte, konnte sich mit solchen Anschauungen auch nicht zufrieden geben. Er erkannte bald, dass die Lebenskraft in Widerspruch stehe mit dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft. Die Erkenntniss dieses Gesetzes ist nicht, wie man so häufig meint, eine Errungenschaft unseres Jahrhunderts, sie ist vielmehr sehr alt, man möchte fast sagen, so alt als eine erklärende Naturwissenschaft existirt; Leibnitz hat das Gesetz gekannt und es ist namentlich durch Daniel Bernouilli für die damals bekannten Kräfte mit aller Sicherheit bewiesen worden. Was in unserer Zeit hinzugekommen ist, das ist nicht die Erkenntniss des Princips selbst, sondern die Ausdehnung desselben auf diejenigen Vorgänge, welche man durch die Fortschritte der Wissenschaft neu hat kennen lernen; dadurch erfuhr das schon bekannte Gesetz eine Verallgemeinerung, namentlich auch auf die Lebensvorgänge. Es ist gewiss von Bedeutung, dass es vorzüglich zwei Mediciner, Julius Robert Mayer und Hermann

Helmholtz, waren, welche zu gleicher Zeit, im Gefühle der Absurdität der Annahme einer wie ein perpetuum mobile wirkenden Lebenskraft und in dem Bestreben auch die Lebenserscheinungen auf die bekannten Kräfte der leblosen Natur zurückzuführen, zur bestimmten Formulirung des alle Vorgänge umfassenden Naturgesetzes gelangten. Ersterer hat besonders die Beziehungen der mechanischen und auch der chemischen Energie zur Wärmebewegung erörtert und das mechanische Aequivalent der Wärme gemessen, letzterer hat auch die statische Elektrizität, die magnetischen, galvanischen und thermoelektrischen Bewegungen in das Gesetz aufgenommen. Helmholtz hat in der denkwürdigen Tischrede bei der Feier seines Jubiläums, die man immer wieder mit gleichem Genusse liest, in einzig dastehender Bescheidenheit geschildert, wie er die von ihm aufgestellten Sätze eigentlich für schon bekannt gehalten habe. Unzweifelhaft ist es aber, dass bald die Wirkung derselben eine mächtige war und von da an die Aufmerksamkeit Aller auf jenen Zusammenhang der Kräfte gerichtet war; auf die Physiologie hat die Anwendung des Gesetzes umgestaltend gewirkt, denn von da an beginnen mit voller Zuversicht die Anstrengungen die Lebensvorgänge durch das Experiment zu erforschen.

Helmholtz suchte in seinen nächsten Arbeiten Beweise für die Giltigkeit des Gesetzes von der Erhaltung der Energie für die Lebenserscheinungen zu bringen.

Wenn die Muskelkraft wirklich von dem Stoffwechsel oder von der Zersetzung complicirter chemischer Verbindungen in einfachere herrührt, und nicht von einer sich stets aus sich selbst erzeugenden Lebenskraft, dann musste man im arbeitenden Muskel einen Verbrauch gewisser Stoffe und die Entstehung von Zersetzungsprodukten finden. Lavoisier hatte wohl schon erwiesen, dass der arbeitende Mensch mehr Sauerstoff verbraucht wie der ruhende, aber für den isolirten Muskel war dies nicht dargethan; Helmholtz erhielt

aus dem tetanisirten Muskel eine Vermehrung des in Alkohol löslichen Theils der Fleischbrühe und eine Verminderung des in Wasser löslichen Theils. Welche Stoffe dabei in Betracht kommen, vermochte er nicht zu entscheiden; erst lange Zeit darnach erkannte man, dass bei der Muskelthätigkeit der Zerfall des stickstoffhaltigen Eiweisses gewöhnlich nur in geringem Grade erhöht ist, dass dagegen von den stickstofffreien Stoffen, Fett und Kohlehydrat, sehr beträchtlich mehr zersetzt wird.

Der grösseren Stoffzersetzung im thätigen Muskel musste eine grössere Entwicklung kinetischer Energie entsprechen und dies bewies nun auch Helmholtz durch den thermoelektrischen Nachweis einer höheren Temperatur des ausgeschnittenen tetanisirten, nach aussen hin keine Arbeit leistenden Muskels; im thätigen Nerven dagegen war nichts der Art zu bemerken. Er wandte hier zum ersten Male für die Untersuchung physiologischer Vorgänge feine physikalische Apparate an, in deren Erfindung er, wie sein Freund du Bois-Reymond, eine so grosse Meisterschaft zeigte.

Es folgte die Untersuchung des Verlaufes der mechanischen Veränderungen des Muskels während einer Zuckung mittelst des Myographions. Nachdem Carl Ludwig durch die Aufzeichnung der Schwankungen des Blutdruckes durch das Kymographion die graphische Methode in die Physiologie eingeführt hatte, liess Helmholtz den zuckenden Muskel die Contraction aufschreiben. Die Zuckung des Muskels geht so schnell vorüber, dass man nicht im Stande ist ihre Einzelheiten mit dem Auge zu verfolgen; indem er nun den Muskel mit einem Hebel in Verbindung setzte, der die Bewegung auf einem rasch rotirenden berussten Glascylinder aufzeichnete, gelang es die Muskelcurve mit allen ihren Details zu erhalten. Das Myographion ist einer der sinnreichsten und auch einer der wichtigsten Apparate der messenden Physiologie. Später kam Helmholtz nochmals auf die Vorgänge

im Muskel zurück bei der Untersuchung des Tons, welchen man im contrahirten Muskel wahrgenommen hatte; er that dar, dass die diesem Ton zukommende Anzahl von Schwingungen der Reizzahl entspricht, d. h. dass das Gehirn, wenn es durch den Willen einen Muskel zur Zusammenziehung bringt, dem letzteren 19 $^{1}/_{2}$ Reize in der Secunde durch den Nerven zusendet.

Daran schloss sich eine der denkwürdigsten und geistreichsten Arbeiten an, die Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erregung im Nerven. Man dachte sich, dass diese Geschwindigkeit eine ungemein grosse sei, so gross wie etwa die des Lichtes oder des elektrischen Stromes, da man glaubte im Momente der Berührung der Haut auch die Empfindung zu haben oder im Momente der Willensaction auch schon die Muskelcontraction wahrzunehmen. Selbst Johannes Müller, der doch den Ausdruck „Nervenphysik" zuerst gebraucht hatte, hielt eine solche Messung wegen der Kürze des Nerven für unmöglich, und 15 Jahre darauf war dieselbe auf zwei ganz verschiedene Weisen durch Helmholtz mit aller Sicherheit durchgeführt. Zu der ersten benützte er die galvanometrische Methode der Messung kleinster Zeittheilchen von Pouillet; zu der zweiten die Verschiedenheit des Beginnes der Muskelcurven am Myographion bei Reiz des Nerven möglichst weit weg und nahe am Muskel; beide Methoden gehören zu den feinst ausgedachten und genauesten der Physiologie. Da sich dabei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Nerven nur zu etwa 30 Meter in der Secunde ergab, wesentlich geringer wie die vieler anderer Bewegungen, so kam man zu der Vorstellung, dass im Nerven verhältnissmässig grosse Widerstände entgegenstehen. In gleicher Weise wurde von Helmholtz die Geschwindigkeit bei einer Reflexbewegung gemessen d. i. die Zeit bei der Leitung der Erregung von einem sensibeln Nerven durch ein nervöses Centralorgan auf einen motorischen Nerven und den Muskel,

welche noch wesentlich länger ist, als die der Leitung im Nerven; die Vorgänge in den Centralorganen nehmen also noch mehr Zeit in Anspruch.

Die Erfindung, welche Helmholtz mit einem Schlage in der ganzen Welt berühmt gemacht hat, ist die des Augenspiegels. Wir sehen für gewöhnlich nichts von den Gebilden im Innern des Auges, wesshalb die Pupille schwarz erscheint, obwohl Lichtstrahlen von dem Augenhintergrunde reflectirt werden. Cumming und Brücke hatten aber das menschliche Auge unter gewissen Umständen leuchten sehen; Helmholtz wollte dies seinen Zuhörern mit Hilfe einer einfachen Vorrichtung erläutern und machte sich dabei alsbald durch den Gang der Lichtstrahlen klar, warum man für gewöhnlich vom Augenhintergrunde nichts wahrnimmt, und damit war die Möglichkeit gegeben, durch den Augenspiegel die Netzhaut eines Auges nicht nur leuchten zu sehen, sondern auch alle Einzelheiten auf ihr zu erkennen. Es war dadurch ein Instrument geschaffen, welches die Augenheilkunde mächtig gefördert und der leidenden Menschheit die grössten Dienste geleistet hat. Gerade der Umstand, dass mehrere ausgezeichnete Forscher der Lösung der Frage schon ganz nahe standen, Helmholtz aber sie in wenigen Tagen gefunden hatte, zeigt seine Geisteseigenschaften im hellsten Lichte.

Diese Entdeckung gab offenbar für ihn den Anstoss, sich mit der Physiologie des Auges näher zu beschäftigen. Er prüfte zuerst genau die beim Mischen von Farben entstehenden Empfindungen, indem er nicht, wie es bisher geschehen war, Pigmente mischte, sondern die reinen Spectralfarben, welche er durch eine besondere Einrichtung des Spectralapparates erhielt. Er legte so eine neue feste Grundlage für die Lehre von den Farbenmischungen und erklärte dann die erhaltenen Thatsachen durch die schon von Thomas Young ausgesprochene Theorie, wornach drei Grundfarben existiren, aus deren Mischung sämmtliche Farben-

empfindungen hervorgehen, und wornach ferner jedes Netzhautelement aus drei Fasern besteht, von denen jede nur durch eine bestimmte Grundfarbe erregt wird. Auf Grund dieser Theorie war es ihm möglich viele andere Erscheinungen am Auge, z. B. die farbigen Nachbilder, die Contrastfarben und die Farbenblindheit zu erklären.

Er wandte sich dann der Untersuchung nach den Vorgängen im Innern des Auges beim Sehen in die Ferne und in die Nähe, der sogenannten Accommodation, zu. Max Langenbeck und der Holländer Cramer hatten schon die drei Purkinje-Sanson'schen Reflexbildchen am Auge hiezu benützt und daraus geschlossen, dass die vordere Linsenfläche beim Sehen in die Nähe gewölbter wird. Helmholtz erfand zu diesem Zwecke das Ophthalmometer, ein Instrument, um trotz der Bewegungen des Auges die Durchmesser jener Reflexbildchen und die Radien der gekrümmten Flächen der durchsichtigen Medien des Auges genau zu bestimmen, womit die Veränderungen im Auge bei der Accommodation sicher gestellt wurden. Ferner muss in dieser Richtung noch erwähnt werden die Bestimmung der Lage der Gesichtslinie, die Ermittlung der Verzerrung der Bilder in Folge der Abweichung der brechenden Flächen, die Darstellung des Sehens mit zwei Augen, die Zurückführung der Augenbewegungen auf das Princip der leichtesten Orientirung im Raum, die Sichtbarmachung der übervioletten Lichtstrahlen ohne fluorescirende Mittel durch Verstärkung derselben mittelst Prismen und Linsen von Quarz.

Alle seine eigenen reichen Erfahrungen auf diesem Gebiete, sowie die früherer Zeiten sammelte Helmholtz in seinem grossen Werke der physiologischen Optik. Es ist ein Musterwerk. Alles hat er nochmals nachgeprüft und mit äusserster Gewissenhaftigkeit und Gerechtigkeit verzeichnet. Es wäre nur zu wünschen, dass wir in allen Theilen der Physiologie gleichwerthige Darstellungen besässen.

Von der Physiologie des Auges ging er zu der des Gehörorganes über und schuf durch eine Reihe meisterhafter Untersuchungen seine Lehre von den Tonempfindungen. Er legte sich zunächst die Frage vor, woher der verschiedene Klang der musikalischen Instrumente bei gleicher Tonhöhe kommt. Georg Simon Ohm hatte den Gedanken ausgesprochen, dass das Ohr die musikalischen Klänge in ihre harmonischen Partialtöne zerlege; dies bewies Helmholtz, indem er mit Zuhilfenahme der die zusammengesetzten Töne zerlegenden Resonatoren zeigte, dass die Töne der musikalischen Instrumente und der menschlichen Stimme nicht rein sind, sondern dass dem Grundton verschiedene höhere Obertöne beigemischt sind, welche die Klangfarbe bedingen. Indem er im Corti'schen Organ der Schnecke eine Claviatur erblickte, von welcher jede Saite nur durch einen bestimmten Ton in Schwingung versetzt wird, erklärt er die Fähigkeit des Ohrs aus einer Summe von Tönen die Componenten herauszuhören und die Resultirende zu empfinden. Und indem er Stimmgabeln von verschiedener Tonhöhe, den Grundton und verschiedene höhere Obertöne, gleichzeitig ertönen liess, erhielt er die Vocale der menschlichen Stimme, deren Nachahmung bis dahin nur ganz unvollständig geglückt war. Die Anschaffung dieses grossen elektrisch betriebenen Stimmgabelapparates ist ihm durch die Munificenz des für die Wissenschaft begeisterten Königs Maximilian II. von Bayern ermöglicht worden.

Er studirte sodann die Ursache der Consonanz und der Dissonanz der Töne. Man war bis dahin der Meinung, der Eindruck der Consonanz entstehe, wenn die Schwingungszahlen der gleichzeitigen Töne in einem einfachen Verhältniss zu einander stehen; aber damit war nur eine Thatsache und nicht die Erklärung gefunden. Helmholtz erkannte als Ursache der Dissonanz intermittirende Tonempfindungen, welche durch Schwebungen zweier gleichzeitiger Töne entstehen.

Diese Studien lenkten seine Aufmerksamkeit auf die Geschichte und die Theorie der Musik; indem er die innere Gesetzmässigkeit der Tonleitern und die Regeln der Musik aus seinen Erfahrungen ableitete, hat er einen bestimmenden Einfluss auf die Musikwissenschaft ausgeübt. Mit seinem unvergänglichen Werke der Lehre von den Tonempfindungen hatte er den Höhepunkt seiner physiologischen Leistungen erreicht; wenigstens zeigte er darin, dass er auf den verschiedensten Gebieten, der Physik, der Physiologie, der Musik und der Philosophie ein Meister war.

Später hat er sich in seiner letzten physiologischen Arbeit noch einmal mit dem Gehörorgan: den Gehörknöchelchen und dem Trommelfell befasst, worin er die Bedeutung dieser Gebilde für die Schallbildung aufs Genaueste auseinandersetzte.

Bei der intensiven Beschäftigung mit der Bedeutung der Sinnesorgane und der nervösen Centralorgane für das Zustandekommen der Sinnesempfindungen und Vorstellungen wurde er auch auf das Grenzgebiet der physischen und psychischen Vorgänge geführt, zu der Erkenntnisstheorie. Es bietet sich hier eine der Eingangspforten für den Experimentator, durch welche er zu dem Psychischen zu dringen vermag; es war Anderen schon gelungen, das Verhältniss der Erregungen des Nerven zu den nachfolgenden Empfindungen festzustellen. Ohne die Kenntniss der materiellen Vorgänge wird man auch auf diesem Gebiete niemals zur sicheren Erkenntniss der Wahrheit kommen, denn das blosse Nachdenken führt höchstens zu Möglichkeiten. Es wird allerdings vielleicht Jahrhunderte währen, bis man in diesen complicirtesten Processen der Erkenntnisstheorie nach und nach zu einigen der nächsten Ursachen gelangt. Helmholtz ist einer der Forscher, welcher in dieses dunkle Grenzgebiet mit leuchtender Fackel eintrat und aus den Ergebnissen der Beobachtung weitere Schlüsse zog und dadurch der Philosophie neue Vorstellungen brachte.

In dieser Weise wird wohl fast immer der Naturforscher, welcher neue Thatsachen erkannt hat, auch der beste Interpret derselben sein und am geeignetsten sein, philosophische Betrachtungen darüber anzustellen.

Ich suchte aus den physiologischen Arbeiten von Helmholtz darzuthun, dass er sich immer höhere Aufgaben stellte und sich allmählich zu einem der vielseitigsten Forscher und Gelehrten entwickelte: er war ein feiner Beobachter, ein findiger Experimentator, ein klarer tiefer Denker, der seine Gedanken auch in klassischer Form darzustellen wusste. Sein Ansehen wird in der Zukunft sich nicht mindern, sondern es wird noch wachsen. Es ist noch nicht die Zeit, zu entscheiden, ob er der hervorragendste Naturforscher unseres Jahrhunderts war; sicherlich aber ist er der umfassendste gewesen.

Sitzung vom 2. März 1895.

1. Herr C. v. Kupffer macht eine Mittheilung: „Ueber die Entwicklung der Kiemenknorpel bei Petromyzon Planeri." Wird anderweit veröffentlicht.

2. Herr Ad. v. Baeyer berichtet die Resultate seiner fortgesetzten Untersuchungen: „Ueber das Caron." Soll an einem anderen Orte publicirt werden.

Sitzung vom 4. Mai 1895.

1. Herr ROBERT HARTIG hält einen Vortrag: „Ueber den Drehwuchs der Kiefer."

2. Herr F. LINDEMANN macht eine Mittheilung: „Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird."

3. Herr H. SEELIGER legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Julius Bauschinger, Observator an der k. Sternwarte: „Ueber eine neue Bestimmung der Refractions-constante auf astronomischem Wege" vor.

4. Herr W. DYCK spricht: „Ueber die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristiken eines Functionensystems durch bestimmte Integrale."

Ueber den Drehwuchs der Kiefer.

Von **Robert Hartig.**

(Eingelaufen 4. Mai.)

Bei keiner deutschen Holzart treten die Erscheinungen des „Drehwuchses" in so auffälliger und so verschiedenartiger Form auf, als bei der gemeinen Kiefer (Pinus silvestris). A. Braun[1]) erwähnt die ältere Literatur und weist darauf hin, dass schon Göthe in dem Aufsatze „über die Spiraltendenz der Vegetation" sich darüber folgendermassen ausspricht: „Herr Oberlandjägermeister von Fritsch äusserte Ende August in Ilmenau, dass unter den Kiefern Fälle vorkämen, wo der Stamm von unten bis oben eine gedrehte, gewundene Wirkung annähme; man habe geglaubt, da man dergleichen Bäume an der Brahne gefunden, eine äussere Wirkung durch heftige Stürme sei die Veranlassung; man finde aber dergleichen auch in den dichtesten Forsten und es wiederhole sich der Fall nach einer gewissen Proportion, so dass man 1 bis 1½ Procent im Ganzen das Vorkommen rechnen könnte. Solche Stämme würden in mehr als einer Hinsicht beachtet, indem das Holz derselben nicht wohl zu Scheiten zerschnitten, in Klaftern gelegt werden könnte,

1) „Ueber den schiefen Verlauf der Holzfaser und die dadurch bedingte Drehung der Bäume" im Sitzungsberichte der Kgl. Pr. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1854. 7. August.

auch ein solcher Stamm zu Bauholz nicht brauchbar sei, weil seine Wirkung immer fortdauernd durch ein heimliches Drehen eine ganze Contignation aus ihren Fugen zu rücken die Gewalt habe." Seitdem sind Fälle von Drehwuchs bei der Kiefer wie bei anderen Holzarten oft beschrieben und A. Braun hat am angegebenen Orte den Nachweis geliefert, dass unter 167 Holzarten, über die sich seine Untersuchungen erstreckten, bei 111 Arten der schiefe Verlauf der Holzfaser regelmässig auftritt. Allerdings wird dadurch in den meisten Fällen nur eine schwache Drehung herbeigeführt, die einer technischen Verwendung des Holzes nicht hinderlich ist.

Die anatomische Erklärung, welche A. Braun für diese Erscheinungen gab, trifft das Wesen der Sache richtig, wie wir aus den nachfolgenden Darstellungen erkennen werden, wenn auch im Einzelnen die Dinge anders gelagert sind, als Braun sich dieselben dachte und nach dem damaligen Stande der anatomischen Kenntniss vorstellen konnte. Auf eine anatomische Untersuchung drehwüchsiger Bäume im Vergleich zu geradwüchsigen Individuen scheint sich Braun nicht eingelassen zu haben. Mir ist nicht bekannt, dass inzwischen von anderer Seite der Drehwuchs eine anatomische Bearbeitung gefunden hat, und da ich in den letzten Jahren in den Besitz einer Reihe von sehr interessanten drehwüchsigen Kiefern gelangte, so lag darin eine directe Aufforderung, dieselben eingehender zu untersuchen.

Den Ergebnissen schicke ich eine kurze Darstellung des Untersuchungsmaterials voran.

Stamm I.

Im Forstamt Freising bei München liess ich im Jahre 1889 eine 147jährige Kiefer von 31,4 m Höhe und 53 cm Brusthöhendurchmesser (ohne Rinde) fällen, welche bis zum 130sten Jahre im geschlossenen Bestande erwachsen und dann in Folge einer Niederlegung der meisten Bäume durch einen

Sturm völlig freigestellt war. Der Einfluss der Lichtstellung auf Zuwachsgrösse und Holzbeschaffenheit wurde von mir schon früher veröffentlicht.[1]) Dieser Stamm zeigte sich sehr geradspaltig und nur in der Jugend drehte derselbe, wie vielleicht jede Kiefer, etwas nach links.[2]) Die in 1,3 m Höhe entnommene Querscheibe zeigte noch 137 Jahresringe und von ihr stammen die Untersuchungsresultate Tab. I (S. 203).

Stamm II.

Etwa 20 Schritt von obigem Stamme entfernt stand eine 30,5 m hohe Kiefer von 66,0 cm Brusthöhendurchmesser. Dieser Baum, dessen Beschreibung ich in derselben Abhandlung[1]) gegeben habe, liess eine ausserordentliche Mannigfaltigkeit im Verlaufe der Holzfasern erkennen. In den ersten Jahrzehnten drehte derselbe stark nach links bis zu 9° Abweichung von dem Loth. Im 40sten Ringe von innen waren die Fasern lothrecht; dann begann eine Abweichung nach rechts bis zu 5°. Im 70sten Ringe verliefen die Fasern wieder lothrecht. Dann trat starke Drehung nach rechts ein bis zu 19° Abweichung vom Loth. Vom 100sten Ringe an nimmt die Neigung wieder etwas ab und zeigt in den letzten Jahrzehnten nur 10°. Bemerkenswerth ist dabei, dass in derselben Wuchsperiode der Drehungswinkel keineswegs in allen Theilen des Umfanges derselbe, sondern an einem Punkte oft erheblich grösser ist, als an anderen Theilen. Wenn man aus einem Holzabschnitt einen Keil abspaltet, so zeigt die Spaltfläche einen unregelmässig welligen Verlauf. Das Holz derselben Wachsthumszone zeigt ferner in einem Baumtheile eine Richtung von 10°, in einem etwa 20 cm darüber gelegenen Theile von 15°.

---

[1]) Allg. Forst- u. Jagdzeitung 1889. „Ueber den Lichtstandszuwachs der Kiefer."

[2]) „Links" im subjectiven Sinne, d. h. für den Beschauer verlaufen die Fasern von rechts unten nach links aufwärts.

Stamm III.

Eine 223 Jahrringe zählende Kiefernscheibe aus der Pfalz, die ich der Sammlung des botanischen Instituts verdanke, zeigt in der Jugend Linksdrehung bis zum 100sten Jahr. Von da an tritt Rechtsdrehung ein, die im letzten Decennium 11° erreicht. Abnahme und Zunahme der Drehung erfolgen ziemlich regelmässig.

Stamm IV.

Im Jahre 1894 fand ich an einer Sägemühle bei Kirchseeon (Oberbayern) einen circa 5 m langen Kiefernbloch, welcher unten 76 cm, oben 54 cm Durchmesser besass und ausserordentlich stark links drehte.

Am unteren Ende (IV), welches 190 Ringe zählte, begann die Linksdrehung von Jugend auf schnell und fast völlig gleichmässig zunehmend bis zu 55° Abweichung von der lothrechten Richtung.

Stamm V.

Am oberen Ende desselben Bloches zeigte das Holz von Anfang an eine sehr starke Drehung (15°) nach links. Dieselbe stieg nur langsam und erreichte im letzten Jahrzehnt 43°.

Stamm VI.

Herr Professor Tursky aus Moskau sandte mir vor zwei Jahren ein Kiefernstammstück, von dem der innere Theil, der wahrscheinlich etwa 70 Ringe umfasst haben mochte, durch Polyporus vaporarius zerstört worden war. Der noch gesunde Theil, der 150 Ringe zählte, liess in den innersten 10 Ringen völlige Geradfaserigkeit erkennen. Von da an begann anfangs langsam, dann schnell zunehmende Rechtsdrehung, die im letzten Jahrzehnt einen Grad erreichte, dass die Fasern in welligem Verlaufe, also im Durchschnitt mit 90° rings um den Stamm herum liefen.

Stamm VII.

Ein 280 Jahresringe zeigendes, 8 cm starkes Lärchenstammstück, das, aus den österreichischen Alpen stammend, mir bei Gelegenheit einer Forstausstellung zur Verfügung gestellt wurde, war so interessant, dass ich dasselbe in die Untersuchung einbezog. Bis zum 60sten Ringe von innen war der Faserverlauf ein völlig gerader. Von da an begann Rechtsdrehung, die zuletzt 70° erreichte. Seit 200 Jahren ist der Zuwachs ein ausserordentlich geringer, so dass jeder Jahrring meist nur aus zwei Tracheiden besteht. Eine vorübergehende Zuwachssteigerung im 110—150. Lebensalter ist aber sehr interessant wegen der später zu erwähnenden Beeinflussung der Organlänge. Vom 150. Jahrringe an trennt sich der Holzkörper in ähnlicher Weise wie bei der Borkenbildung. Es entstehen Risse, und die neu sich bildenden Holzringe verlaufen nur noch wie ein Band spiralig um den Stamm herum.

Stamm I.

Alter	Länge der Leitungstracheiden			Länge der Fasertracheiden			Mittlere Länge aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel		Quertheilung der Tracheiden	
	Minimum	Mittel	Maximum	Minimum	Mittel	Maximum			links	rechts	links	rechts
		mm			mm			qcm				
137	2,38	2,72	3,13	1,19	3,19	4,10	2,96	14,3	—	—	16	18
130	2,70	3,17	3,78	2,16	3,39	4,32	3,28	22,7	—	—	—	—
120	2,16	3,47	4,32	1,67	3,51	4,64	3,49	12,1	1	—	19	18
110	2,81	3,28	4,00	1,73	3,39	5,29	3,34	14,1	1	—	—	—
100	2,11	3,06	4,16	2,05	3,21	4,00	3,14	18,0	1	—	—	—
90	2,05	2,98	4,10	2,38	3,22	4,16	3,10	20,5	—	—	—	—
80	1,94	2,67	3,46	1,40	2,83	3,46	2,75	12,5	—	—	23	27
70	2,81	3,30	3,78	2,54	3,55	4,00	3,42	11,2	—	—	—	—
60	1,84	3,05	3,67	2,70	3,46	4,21	3,25	13,5	—	—	—	—
50	2,05	2,86	3,73	2,05	3,31	4,10	3,08	15,0	—	—	—	—
40	1,92	3,06	3,56	2,59	3,28	3,78	3,17	17,5	1	—	—	—
30	2,05	2,76	3,78	1,73	3,01	3,78	2,88	20,1	—	—	—	—
20	0,76	2,20	3,08	1,73	2,42	3,13	2,31	19,2	1	—	19	17
10	0,86	2,05	2,86	0,81	2,20	2,92	2,12	3,9	2	—	21	17
2	0,92	1,13	1,67	0,92	1,24	1,73	1,18	—	3	—	24	19

Stamm II.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Länge der Leitungstracheiden Mittel	Länge der Leitungstracheiden Maximum	Länge der Fasertracheiden Minimum	Länge der Fasertracheiden Mittel	Länge der Fasertracheiden Maximum	Mittlere Länge aller Tracheiden	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm						
137	1,62	2,80	3,89	2,59	3,39	4,21	3,09	—	10	23	13
130	1,13	3,03	4,05	2,54	3,57	4,97	3,30	—	10	—	—
120	1,93	2,94	4,32	1,57	3,64	4,32	3,29	—	15	13	26
110	2,38	3,53	4,32	2,38	3,52	4,64	3,52	—	17	—	—
100	2,27	3,07	4,43	2.16	3,30	3,78	3,19	—	17	11	30
90	2,16	2,99	3,67	1,40	3,25	4,10	3,12	—	19	14	23
80	2,05	2,84	3,51	1,46	2,58	3,35	2,71	—	6	—	—
70	2,05	2,87	4,05	2,27	3,14	4,00	3,00	—	0	20	16
60	1,51	2,64	3,83	1,08	2,89	3,83	2,77	—	5	13	21
50	1,62	2,96	3,89	1,02	2,75	4,32	2,85	—	5	—	—
40	1,30	2,29	3,78	1.77	2,80	4,10	2,55	—	0	15	17
30	1,30	2,42	3,46	1,62	2,38	3,13	2,40	7	—	—	—
20	1,51	2,47	3,08	1.40	2,56	3,24	2,52	9	—	29	15
10	1,29	1,59	1,89	1,13	1,69	2,00	1,64	4	—	7	5

Stamm III.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Länge der Leitungstracheiden Mittel	Länge der Leitungstracheiden Maximum	Länge der Fasertracheiden Minimum	Länge der Fasertracheiden Mittel	Länge der Fasertracheiden Maximum	Mittlere Länge der Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm			qcm				
223	2,05	2,87	4,05	2,37	3,37	4,21	3,12	26,2	—	11	9	13
203	1,94	2,67	3,67	2,70	3,30	3,78	2,98	21,4	—	8	—	—
183	2,32	2,91	3,67	2,70	3,28	3,89	3,10	36,7	—	9	—	—
163	2,27	3,19	4,00	2,27	3,21	4,05	3,20	40,6	—	7	10	22
143	1,94	3,12	4,21	2,16	3,37	4,10	3,25	47,2	—	3	—	—
123	2,92	3,28	4,26	2,81	3,47	4,32	3,37	48,7	—	1	10	19
103	1,35	2,96	3,94	2,38	3,20	3,78	3,08	53,6	0	0	—	—
83	2,00	2,68	3,35	2,48	3,26	4,00	2,97	60,2	3	—	11	17
63	1,46	2,68	3,29	1,94	2,85	3,89	2,76	51,8	3	—	—	—
43	1,84	2,39	2,92	2,00	2,88	3,62	2,64	39,2	4	—	15	16
23	2,16	2,56	3,13	1,57	2,59	3,29	2,57	19,0	5	—	—	—
13	0,92	1,99	3,02	1,62	2,27	2,92	2,13	7,9	5	—	22	8
3	0,49	0,77	1,08	0,97	1,15	1,40	0,95	—	2	—	20	11

Stamm IV.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Länge der Leitungstracheiden Mittel	Länge der Leitungstracheiden Maximum	Länge der Fasertracheiden Minimum	Länge der Fasertracheiden Mittel	Länge der Fasertracheiden Maximum	Durchschnitts-Länge aller Tracheiden	Durchschnitts-Breite aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm			mm/100	qcm				
190	1,84	2,52	3,35	1,51	2,53	3,24	2,53	3,6	4,7	55	—	25	1
180	1,51	2,55	3,56	1,57	2,66	3,24	2,60	3,6	5,9	55	—	—	—
170	2,11	2,56	3,46	2,48	3,27	3,89	2,92	3,4	11,7	52	—	—	—
160	1,73	2,87	3,89	2,16	3,19	3,73	3,03	3,2	14,9	49	—	—	—
150	1,13	2,89	3,46	1,13	2,82	3,56	2,86	3,2	23,6	47	—	—	—
140	1,89	2,78	3,46	2,48	2,88	3,35	2,88	3,4	34,6	45	—	46	16
130	2,16	2,95	3,56	1,94	3,28	4,43	3,11	3,1	34,1	45	—	—	—
120	1,84	2,59	3,56	2,82	2,81	3,35	2,70	3,3	53,8	43	—	—	—
110	1,46	2,76	3,89	1,51	3,07	3,78	2,91	3,3	77,7	38	—	26	12
100	2,16	2,72	3,35	1,84	2,89	3,67	2,80	3,1	22,1	33	—	—	—
90	0,97	2,23	3,29	1,62	2,58	3,56	2,41	3,4	22,8	30	—	—	—
80	1,84	2,50	3,40	1,51	2,58	3,35	2,54	3,0	33,0	25	—	—	—
70	1,51	2,28	2,92	1,73	2,59	3,67	2,44	2,8	33,8	20	—	—	—
60	1,84	2,42	3,02	1,62	2,49	3,56	2,45	2,8	34,3	15	—	13	15
50	1,51	2,51	3,08	1,62	2,81	3,56	2,66	2,8	25,2	18	—	—	—
40	1,51	2,14	2,70	1,57	2,32	2,75	2,23	2,8	16,0	13	—	30	19
30	1,73	2,08	2,43	1,73	2,23	3,19	2,15	2,6	2,5	9	—	29	9
20	1,51	1,74	2,21	1,62	2,10	2,43	1,92	2,3	0,3	7	—	—	—
10	1,08	1,36	1,78	1,29	1,73	2,27	1,54	1,9	0,1	3	—	16	7
2	0,78	0,92	1,29	0,54	0,99	1,19	0,95	—	—	—	—	—	—

Stamm VII.

Alter	Länge der Tracheiden Minimum	Länge der Tracheiden Mittel	Länge der Tracheiden Maximum	Jahres-Zuwachs an Querfläche	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm		qcm				
280	1,03	1,70	2,65	0,09	—	70	4	18
220	0,86	1,65	2,32	0,11	—	50	—	—
170	1,10	2,30	3,34	0,18	—	30	16	27
140	0,92	2,08	2,81	0,17	—	20	—	—
120	0,86	1,90	2,48	0,13	—	10	11	25
80	1,19	2,84	3,62	0,30	—	3	9	17
60	1,84	3,20	3,89	0,42	0	0	—	—
40	2,05	3,11	4,27	0,46	0	0	—	—
20	1,89	2,62	3,24	0,43	0	0	—	—
10	1,19	1,86	2,81	0,53	0	0	15	16
2	0,65	0,84	1,08		0	0	—	—

Stamm V.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Leitungstracheiden Mittel	Leitungstracheiden Maximum	Fasertracheiden Minimum	Fasertracheiden Mittel	Fasertracheiden Maximum	Mittlere Länge aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel links	Drehungswinkel rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm			qcm				
155	0,97	2,75	4,10	0,76	2,68	4,10	2,71	2,1	43	—	16	12
145	1,24	2,85	4,16	1,08	2,63	4,10	2,74	2,8	40	—	—	—
135	2,27	3,01	3,89	2,70	3.26	3,89	3,13	4,8	35	—	—	—
125	1,84	2,66	3,56	1,08	2,47	3,89	2,57	6,7	35	—	25	15
115	1,73	3,40	4,32	1,73	2,64	3,89	3,02	7,9	25	—	—	—
105	1,73	3,13	4,32	1,73	3,25	4,97	3,19	13,2	20	—	—	—
95	1,94	3,31	4,43	2,38	3,30	4,64	3,30	14,8	20	—	21	17
85	3,02	3,62	4,37	1,94	3,65	4,37	3,63	16,5	20	—	—	—
75	0,86	3,23	4,10	2,05	3,35	3,89	3,29	17,9	20	—	—	—
65	2,16	3,77	4,54	1,62	3,73	4,37	3,75	8,2	15	—	—	—
55	3,02	3,48	4,86	2,81	3,49	4,86	3,49	10,1	15	—	12	11
45	2,05	3,26	4,43	1,46	3,34	4,75	3,30	9,6	15	—	—	—
35	2,49	3,30	4,10	1,73	3,35	4,10	3,38	15,4	15	—	—	—
25	2,16	3,26	3,89	1,62	3,51	4,37	3,38	16,5	15	—	—	—
15	1,73	2,85	3,67	1,94	3,07	3,89	2,96	9,9	15	–	21	19
2	0,75	1,34	1,94	0,75	1,41	2,48	1,37	—	—	—	26	13

Stamm VI.

Alter	Länge der Leitungstracheiden Minimum	Leitungstracheiden Mittel	Leitungstracheiden Maximum	Fasertracheiden Minimum	Fasertracheiden Mittel	Fasertracheiden Maximum	Durchschnittslänge aller Tracheiden	Jahreszuwachs an Querfläche	Drehungswinkel der Tracheiden links	Drehungswinkel der Tracheiden rechts	Quertheilung der Tracheiden links	Quertheilung der Tracheiden rechts
		mm			mm			qcm				
220	1,51	2,66	3,67	1,73	2,90	4,10	2,78	17,8	-	90	12	21
210	1,26	2,39	3,35	1,40	2,65	4,00	2,52	21,7	—	85	--	—
200	0,54	2,12	2,86	1,19	2,37	3,29	2,25	16,9	—	80	10	19
190	1,84	2,61	3,12	2,48	3,06	3,67	2,83	20,6	—	65	—	—
180	1,73	2,54	4,32	1,73	2,85	3,67	2,70	21,9	—	60	7	27
170	2,48	3,68	4,64	2,38	3,62	5,51	3,65	22,1	—	40	—	—
160	2,70	3,26	4.43	2,70	3,80	4,86	3,53	21,1	—	30	11	24
150	2,92	3,42	4,21	3,24	4,15	4,54	3,78	26,4	—	20	—	—
140	2,81	3,36	3,67	3,45	4,39	6,53	3,88	29,8	—	20	—	—
130	2,48	3,44	4,32	2,05	4,07	4,86	3,76	18,8	—	20	11	15
120	2,48	3,66	4,54	3,02	4,02	4,86	3,84	20,7	—	10	—	—
110	2,38	3,41	4,75	2,16	3,74	4,54	3,58	20,8	—	10	—	—
100	2,48	3,89	4,75	2,97	3,92	4,75	3,91	25,6	—	5	18	23
90	2,81	3,96	4,97	2,05	3,94	4,97	3,95	17,5	—	3	—	—
80	2,59	3,76	4,32	2,92	3,75	4,97	3,76	15,1	0	0	31	38
70	3,29	3,70	4,21	2,70	3,70	4,43	3,70	—	0	0	7	12

Ueberblicken wir die an den Stämmen I—VI auftretenden Drehungsrichtungen, so erkennen wir zunächst, dass alle Kiefern in der ersten Jugend links drehen. Wahrscheinlich gilt das auch für Stamm VI, dessen innerer Holztheil verfault war. Vom 20. bis 30. Ringe an tritt entweder Geradfaserigkeit ein (I), oder die Linksdrehung setzt sich in gesteigertem Grade in der Folge fort (IV und V), oder der Drehungswinkel nimmt ab und geht aus der Linksdrehung in die Rechtsdrehung über. Diese Aenderung kann schon frühzeitig (II) oder erst nach dem 100sten Jahrring (III) eintreten. Die Abnahme oder Zunahme der Schrägstellung erfolgt entweder gleichmässig oder periodisch sich ändernd, so dass auf starke Drehungen schwache und umgekehrt folgen (II). Der Drehungswinkel ist am ganzen Stamme zu derselben Zeit nicht derselbe, kann vielmehr nach oben abnehmen (IV, V). Auf den verschiedenen Seiten des Baumes ist der Winkel der Drehung ein verschiedener.

Da Braun den Drehwuchs in Beziehung zu dem Längenwachsthum der Cambialzellen gebracht hat, so schien es mir zunächst wünschenswerth zu sein, einen klaren Einblick in die Längenverhältnisse der Tracheiden bei geradfaserigen und drehwüchsigen Bäumen zu erhalten. Sanio[1]) kam durch seine Untersuchungen an einem 110jährigen Kiefernstamm zu dem Ergebnisse, dass die mittlere Länge der Tracheiden im ersten d. h. im innersten Ringe am kürzesten und zwar unter 1 mm lang sei, dass diese Länge in den nächsten Jahrringen schnell zunehme und im 30sten Jahre 2,60 mm erreicht. Nach dem 30sten Jahre blieb sich die Länge entweder gleich, oder zeigte nur eine sehr geringe Zunahme.

Ich habe schon für die Rothbuche[2]) und Fichte[3]) nach-

---

[1]) Pringsheim's Jahrb. VIII p. 401 ff.

[2]) Das Holz der Rothbuche. 1888 p. 25. Berlin.

[3]) Die Verschiedenheiten in der Qualität und im anatomischen Bau des Fichtenholzes. In Forstl. naturw. Zeitschr. 1892 p. 232.

gewiesen, dass die Organlänge von einem gewissen Alter an wieder abnimmt, und zwar bei Bäumen, welche im Bestande bedrängt sind, früher als bei den dominirenden Bäumen. Neuerdings hat Omeis[1]) gefunden, dass in einem geringwüchsigen 110jährigen Kiefernbestande bei Brusthöhe die Tracheidenlänge schon im 50sten Jahre ihr Maximum erreichte und darnach schnell abnahm. Auch Bertog[2]) bestätigt die Abnahme der Organlänge etwa vom 80sten Jahre an für Fichte und Tanne.

Das Ergebniss meiner Messungen an dem vorbezeichneten Untersuchungsmateriale ist ein in mehrfacher Beziehung interessantes.

In den beigefügten Tabellen I—VII habe ich nicht allein die Mittellänge aus etwa je 60 Einzelmessungen, sondern auch die grösste und geringste Länge beigefügt. In jedem Holztheile befinden sich Tracheiden der verschiedensten Länge, und es bedurfte einer grossen Zahl von Messungen, um eine brauchbare Mittelzahl zu erhalten.

Ehe wir die Verhältnisse besprechen können, welche auf die Länge der Organe einen Einfluss ausüben, erscheint es nothwendig, die Zelltheilungsvorgänge in der Initialschicht des Cambiummantels ins Auge zu fassen, durch welche die Initialzellen selbst sich vermehren. Da der tangentiale Durchmesser der Initialzellen eine beschränkte Grösse besitzt, so muss mit der Umfangszunahme des Axentheiles eine Vermehrung derselben eintreten. Diese Vermehrung beruht auf einer Quertheilung der Cambialzellen. Allerdings ist es ausserordentlich schwierig, diese Quertheilung in der Initialschicht selbst zu beobachten. Da aber die Streckung der aus der Initialzelle hervorgegangenen Gewebezellen bei der

---

1) Wachsthumsgang und Holzbeschaffenheit eines 110jährigen Kiefernbestandes. Das. 1895, April.

2) Wuchs und Holz der Weisstanne und Fichte. Ebend. 1895, Mai.

Kiefer nur eine geringe ist, so darf man aus dem Gestaltungsverhältnisse der Tracheiden selbst einen Schluss auf die Grössenverhältnisse der Initialzellen ziehen. Die Quertheilung erfolgt zwar in der Mehrzahl der Fälle annähernd in der Mitte der Organe, nicht selten wird aber von einer langen Initialzelle nur ein ganz kurzes Stück abgeschnitten. So kommen Fälle vor, in denen eine Zelle von 5,5 mm Länge in zwei Tochterzellen zerlegt wird, von denen die eine 4,8 mm, die andere 0,7 mm lang ist.

Wahrscheinlich erfolgt die Theilung an dem Punkte der Initialzelle, wo durch die peripherische Ausdehnung auf die Entstehung neuer Initialzellen der grösste Reiz ausgeübt wird. Die beiden Tochterzellen strecken sich nun in der durch die Stellung der Querwand vorgezeichneten Richtung an einander vorbeigleitend. (Fig. IIc.) Das obere Ende der unteren Zelle wächst nach oben. Das untere Ende der oberen Zelle streckt sich nach unten, und dieses Strecken veranlasst nicht allein eine von Jahr zu Jahr zunehmende Länge der Organe, sondern auch eine immer steilere Richtung der Querwände. In einer gegebenen Querfläche vermehrt sich also die Zahl der Initialzellen dadurch, dass die Enden der aus Quertheilung hervorgegangenen neuen Zellen von oben und von unten her zwischen die vorhandenen Initialzellen sich einschieben. Raatz,[1]) der diesen Theilungsprozess richtig erkannt und gedeutet hat, ist darüber in Zweifel, ob nicht von Anfang an die Querwände rechtwinklig zur Längsaxe der Cambialzellen stehen und erst nachträglich eine schräge Stellung in Folge des Längenwachsthums einnehmen.

Aus meinen Untersuchungen habe ich die Ansicht gewonnen, dass die Querwände von Anfang an entweder nach rechts oder nach links aufwärtssteigend sind. Es beruht

---

[1]) Die Stabbildungen im secundären Holzkörper der Bäume und die Initialtheorie. In Pringsheim's Jahrb. 1892 p. 631.

darauf, wie wir sehen werden, die Erscheinung des Drehwuchses der Bäume.

Der Umstand, dass wir jederzeit die verschiedensten Organlängen nebeneinander vorfinden, erklärt sich also daraus, dass dieselben aus jungen und alten Initialzellen entstanden sind, d. h. aus solchen, die eben erst eine Quertheilung erfahren haben, und solchen, die schon eine Reihe von Jahren sich zu strecken Zeit hatten.

Es ist nun leicht verständlich, wesshalb in den innersten Jahresringen die Organe noch klein sind. Sie sind aus jungen Initialzellen entstanden. In den beigegebenen Tabellen habe ich auch die Organlängen des zweiten oder dritten Ringes angegeben, und wird man daraus ersehen, dass die grössten Längen nur etwa den dritten Theil derjenigen Faserlänge erreichen, die in höherem Alter auftreten.

Im weiteren Entwicklungsgange des Baumes oder Baumtheiles wird nun die Organlänge bedingt durch die Ernährung des Baumes, insofern eine nachhaltige Steigerung in dem Wachsthumsgange des Baumes auch auf das Längenwachsthum der Initialzellen günstig, ein andauerndes Sinken des Baumzuwachses ungünstig einwirkt, während schnell vorübergehende Steigerungen oder Störungen des Zuwachses ohne Einfluss sind. Im entgegengesetzten Sinne wirkt natürlich die mit dem Zuwachse verbundene Umfangszunahme des Baumtheiles. Je schneller sich die Peripherie und der Cambiummantel vergrössert, um so lebhafter erfolgt die Zellvermehrung durch Quertheilung der Initialzellen. Das Durchschnittsalter und die mittlere Länge der Initialzellen wird damit herabgedrückt.

Berechnet man den Zuwachsgang an Querfläche (siehe in den Tabellen die Spalte über Jahreszuwachs) und vergleicht ihn mit der Länge der Tracheiden, so ist eine Beziehung zwischen beiden gar nicht zu verkennen. Ein völliger Parallelismus besteht freilich nicht, aber dem Steigen

und Sinken des Zuwachses folgt nach einiger Zeit ein Zunehmen oder Abnehmen der Organlänge in ersichtlichem Grade.

Es wird nunmehr auch verständlich, woher es kommt, dass im untern Theile eines Baumes die Organe immer erheblich kleiner sind, als höher im Stamme aufwärts bis zum Kronenansatz. Wir wissen, dass die Zuwachsgrösse im dominirenden, d. h. noch nicht unterdrückten Kiefernstamme von oben nach unten zunimmt und dass insbesondere der untere Stammtheil einen viel lebhafteren Querflächenzuwachs besitzt, wie die oberen Schafttheile. Schon ein Vergleich zwischen den Stammstücken IV und V, die 5 m von einander entfernt lagen, zeigt den grossen Unterschied im Zuwachse gleicher Wuchsperioden. Am unteren Ende des Stammes nimmt der Umfang jährlich mit einem höheren Procentsatze zu als in dem oberen Schafttheile, und die Zellvermehrung durch Quertheilung muss demgemäss schneller vor sich gehen, als oben. Die Initialfasern erreichen somit unten ein geringeres Alter, als im oberen Stammtheile, sind desshalb kürzer als dort.

Untersucht man die Organlänge an einem excentrisch gewachsenen Stammtheile auf der breitringigen und auf der engringigen Seite, so überrascht ferner die Thatsache, dass auf letzterer die Organe im Durchschnitt länger sind, als auf der ersteren. Am Stammstück V hatten die Tracheiden der schmalen Seite die auf Seite 212 zusammengestellten Längen, welche mit denen der breiten Seite (siehe auch Seite 206 Tab. V) zu vergleichen sind.

Es scheint mir zweifellos zu sein, dass die langsamere Ausdehnung des Cambiumringes und dem entsprechend die sich seltener wiederholende Quertheilung der Initialfasern die Ursache der grösseren Länge der Tracheiden auf der schmalen Seite des Baumes ist. Sie werden auf dieser Seite älter, als auf der breiten Seite.

Irgend welche Beziehungen zwischen der O r g a n l ä n g e und der D r e h w ü c h s i g k e i t der Bäume lässt sich aber n i c h t erkennen.

Alter	Schmale Seite			Breite Seite
	Leitungs-tracheiden	Faser-tracheiden	Mittellänge aller Tracheiden	Mittellänge
155	3,81	3,63	3,72	2,71
145	—	—	—	2,74
135	3,67	3,59	3,63	3,13
125	3,26	2,83	3,05	2,57
115	3,60	3,83	3,71	3,02
105	3,64	3,87	3,75	3,19
95	3,79	3,83	3,81	3,30
85	3,50	3,73	3,62	3,63
75	4,11	3,69	3,90	3,29
65	4,00	3,95	3,97	3,75
55	3,84	4,01	3,93	3,49
45	3,14	3,48	3,31	3,30
35	3,41	3,70	3,56	3,33
25	3,18	3,64	3,41	3,38
15	2,87	3,35	3,11	2,96
2	1,34	1,41	1,37	1,37

Die Geradspaltigkeit und der schräge Verlauf der Holzfasern hängt vielmehr, wie die weiteren Untersuchungen ergeben haben, von dem Verhältnisse ab, in welchem die beiden Quertheilungen der Initialfasern zu einander stehen. Untersucht man auf Tangentialschnitten, wie viele der jüngeren, d. h. der noch nicht sehr steil aufsteigenden Querwände von rechts nach links, wie viele von links nach rechts aufsteigen, so ergibt sich zunächst, dass stets beide Arten von Quertheilungen vorkommen, dass aber das Verhältniss derselben keineswegs immer das annähernd gleiche ist. In den Tabellen I—VII habe ich in den letzten beiden Spalten angegeben, wie viele Rechts- und wie viele Linkstheilungen ich in dem betreffenden Alter vorfand.

Vergegenwärtigen wir uns die Wirkung, welche das Längenwachsthum der aus der Quertheilung einer Initialfaser hervorgegangenen beiden Tochterzellen auf die Richtung der Fasern ausüben muss, so ist ersichtlich, dass bei einer Quertheilung nach rechts das obere Ende der unteren Zelle, indem es, dem unteren Ende der Schwesterzelle ausweichend,

nach rechts vorbeiwächst, eine Ablenkung nach rechts erhält, wogegen das untere Ende der oberen Schwesterzelle bei seiner Verlängerung nach unten eine Ablenkung nach links erfährt. Ein Baum, dessen Initialzellen sich von Jugend auf immer nur in vorgedachter Weise theilen würden, müsste bald eine Schrägstellung aller Fasern von links nach rechts zeigen.

In den ersten Jahrzehnten drehen alle Kiefern mehr oder weniger links, und dies kommt daher, dass die Zahl der Quertheilungen nach links in den ersten Jahrzehnten immer überwiegt, so z. B. bei Stamm I mit 24 zu 19 im 2. Ringe, mit 21 zu 17 im 10. Ringe. Bei den im späteren Alter geradfaserig wachsenden Kiefern schwankt nun die Zahl der Rechts- und Linkstheilungen je nach dem Baumtheile und Jahrringe, ohne ein Vorherrschen der einen oder andern Theilungsrichtung erkennen zu lassen. (Siehe Figur II.) Dadurch gleicht sich aber die Wirkung beider Theilungsarten in Bezug auf den Faserverlauf im Ganzen aus. Sehr instructiv ist Stamm II. Bis zum 20. Ringe zeigt derselbe starke Linksdrehung (9°) und 29 Linkstheilungen gegenüber 15 Rechtstheilungen. Dann stellen sich die Fasern mit dem 40. Ringe senkrecht, und zwar in Folge davon, dass die Rechtstheilungen die Ueberhand gewinnen.

Im 60. Jahre ist die Schrägstellung nach rechts 5° und zwar in Folge der grossen Ueberzahl der Rechtstheilungen (21 r. zu 13 l.). In den nächsten 40 Jahren überwiegen wieder die Linkstheilungen mit 20 zu 16, in Folge dessen die Fasern die lothrechte Richtung einnehmen. Von da an überwiegen wieder die Rechtstheilungen, so dass die Rechtsdrehung sehr stark wird. In den letzten Jahrzehnten vermindert sich die Schrägstellung wieder, weil die Linkstheilungen wieder überwiegen (23 gegen 13).

Bei Stamm III erreicht die Linksdrehung der Jugend mit 5° ihr Maximum in Folge überwiegender Linkstheilungen.

Vom 43. Jahre an überwiegt für alle Folgezeit die Rechtstheilung. In Folge dessen geht schon von da an die Linksdrehung aus 5° in 4° über, mindert sich immer mehr, erreicht mit 103 Jahren die Senkrechte und geht nun in die Rechtsdrehung über.

Stamm IV zeigt von Jugend auf ein Ueberwiegen der Linkstheilungen und dem entsprechend eine immer stärker werdende Linksdrehung bis zu 55°. Nur im 60. Jahre findet einmal eine Abschwächung des Drehungswinkels von 18° auf 15° statt und der betreffende Holztheil liess in der That ein Ueberwiegen der Rechtstheilungen erkennen.

Für Stammstück V gilt dasselbe, nur mit dem Unterschiede, dass die Fasern gleich in den ersten Jahren sehr stark links (15°) drehen und dann in der Folge der Drehungswinkel nur langsam grösser wird.

Der Moskauer Stamm VI, dessen innerer Kern durch Holzparasiten zerstört wurde, zeigt im 70. Jahre schon ein Ueberwiegen der Rechtstheilungen, da offenbar in den vorhergehenden Jahrzehnten der Stamm nach links gedreht hatte, und erst durch länger anhaltendes Ueberwiegen der Rechtstheilungen in die senkrechte Faserstellung gelangen musste. In der Folge überwogen die Rechtstheilungen so sehr, dass nach dem 200. Jahre der Faserverlauf nahezu ein horizontaler wurde.

Der Lärchenstamm VII zeigt bis zum 60. Jahre Geradfaserigkeit und Gleichheit in den Rechts- und Linkstheilungen. Von da an überwiegt die Rechtstheilung, so dass der Drehungswinkel schliesslich 70° ausmacht. Dieser Stamm ist noch dadurch interessant, dass in dem letzten Jahrhundert die Ernährung des Baumes eine so geringe war, dass die Streckung der Initialfasern und damit die Vermehrung derselben im Querschnitt nicht genügte, das Aufreissen des Holzkörpers zu verhindern. Der jüngere Holzkörper bildete

schliesslich nur noch ein schmales Spiralband, welches den alten Holztheil umschlingt.

In den beigefügten Figuren ist der geradfaserige, und linksdrehende Wuchs der Kiefer zur Darstellung gebracht. Wenn nach dem Vorstehenden auch verständlich geworden sein dürfte, worauf die Abweichungen des Faserverlaufs von der senkrechten Richtung zurückzuführen sind, so bleibt es anderentheils völlig unerklärlich, wesshalb die eine Kiefer bei ihren Zelltheilungen in der Initialschicht vorwiegend nach der einen, die andere vorwiegend nach der anderen Richtung hin die schrägen Quertheilungen ausführt. Aeussere Einflüsse scheinen dabei völlig ausgeschlossen zu sein und es ist höchst wahrscheinlich, dass es sich dabei lediglich um innere, individuelle und wahrscheinlich innerhalb gewisser Grenzen auch vererbliche Eigenschaften handelt.

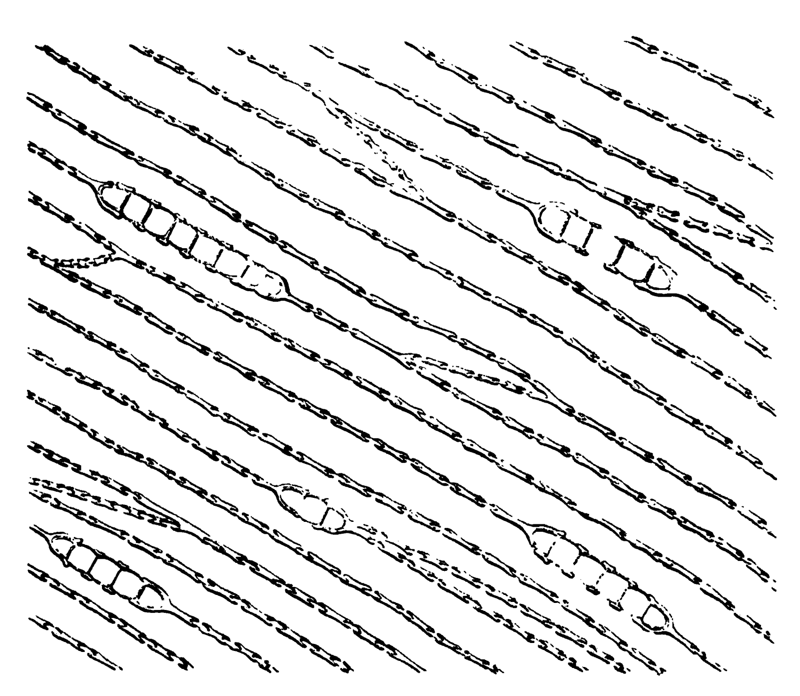
Zum Schlusse mag noch auf eine Eigenthümlichkeit im anatomischen Bau der stark drehwüchsigen Stammtheile hingewiesen werden. Bei dem geradfaserigen Holze (Fig. II) strömt naturgemäss das Wasser in der Längsrichtung der Tracheiden aufwärts und der Uebergang aus einer Tracheide zu der nächst höher stehenden erfolgt durch die mehr oder weniger schräg stehenden Querwände. Diese sind durch dicht nebeneinanderstehende Hoftipfel ausgezeichnet, die als Durchgangspforten dienen. Die Längswände sind relativ tipfelarm, wenn auch immerhin die Tipfelzahl genügt, um eine seitliche Bewegung des Wassers in radialer Richtung zu ermöglichen.

Der anatomische Bau der stark drehwüchsigen Kiefern ist nun dadurch ausgezeichnet, dass die Seitenwände mit Hoftipfeln ebenso dicht bedeckt sind, als die Querwände. Daraus ist wohl mit Sicherheit zu schliessen, dass

das Wasser nicht dem schrägen Verlaufe der Tracheiden folgt, sondern seinem Ziele, der Baumkrone, direct zuströmt.

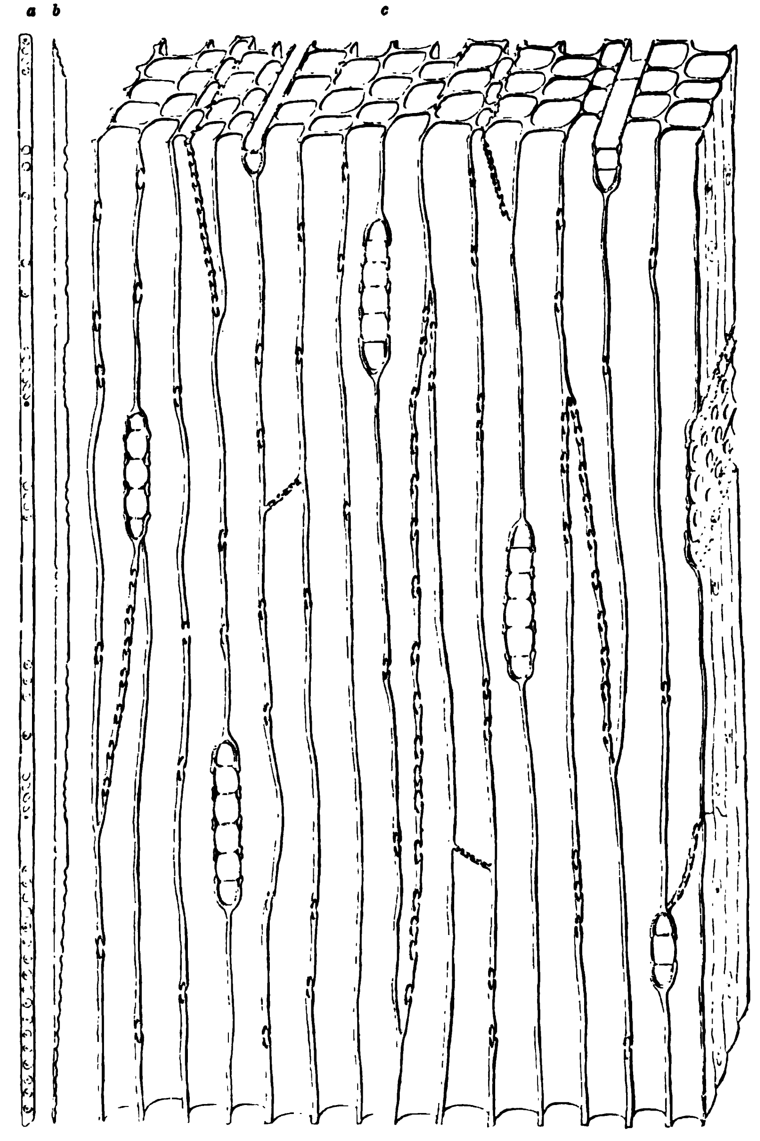
Erwähnenswerth dürfte ferner noch die Thatsache sein, dass bei den stark drehwüchsigen Kiefern die Tangentialwände der letzten Herbstholztracheiden mit kleinen Hoftipfeln ebenso dicht besetzt sind, als dies bei der Fichte, Tanne und Lärche der Fall ist, während an geradfaserigen Kiefern bekanntlich Hoftipfel auf den Tangentialwänden in der Regel fehlen.

Figur I.

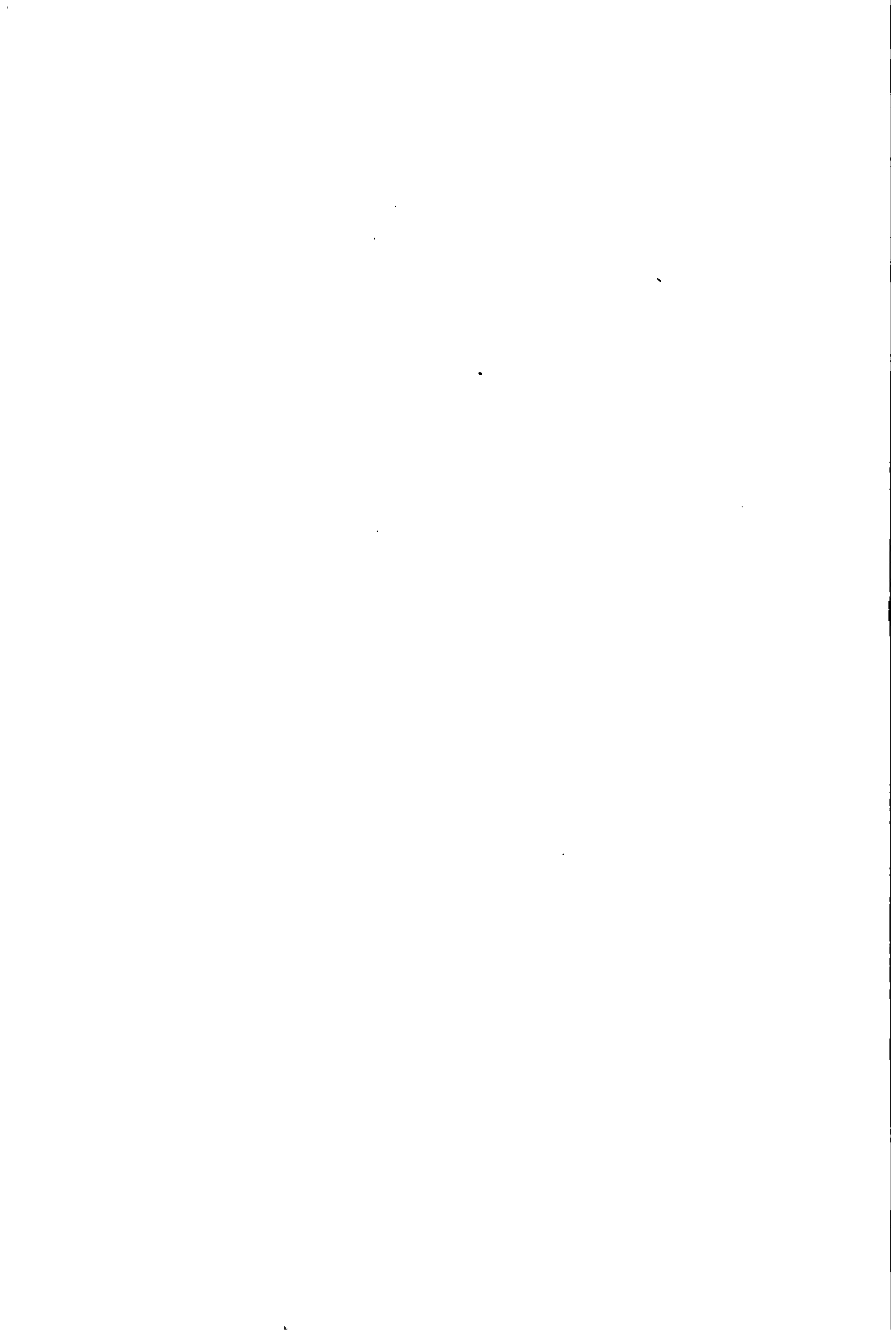


Linksdrehendes Kiefernholz in Tangentialansicht. Auf fünf nach links aufsteigende Querwände kommt nur eine Rechtstheilung. Längswände mit zahlreichen Hoftipfeln.

Figur II.



Geradfaseriges Kiefernholz. *a* Leitungstracheide in radialer, *b* in tangentialer Ansicht. Vergr. 50 : 1. *c* Tangentialansicht eines körperlich dargestellten Holzstückes. Vier Querwände nach rechts, vier nach links aufsteigend. Vergr. 200 : 1.



Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 4. Mai.)

Es sind zahlreiche Beispiele genau durchgeführt, bei denen es sich um die conforme Abbildung einer complexen Ebene auf eine andere handelt, und bei denen man die Abbildungsfunction als gegeben betrachtet, um die durch sie dargestellte Beziehung geometrisch zu verfolgen. Versucht man aus solchen Beispielen andere für die Hauptaufgabe der Abbildungstheorie (nämlich eindeutige conforme Abbildung eines gegebenen Flächenstückes auf den Einheitskreis oder die Halbebene) abzuleiten, so ist die Ausbeute eine sehr geringe; denn die verlangte Eindeutigkeit wird durch die Verzweigungspunkte der studirten Function in der Regel gerade da gestört, wo es sich um ein wesentlich neues Problem handeln würde. In manchen Fällen kann man indessen diese Störungen heben; und dies an einem Beispiele vollkommen durchzuführen, erschien mir als eine lehrreiche Aufgabe, der die folgenden Ausführungen dienen mögen.

1. Setzt man $z = x + iy$, $z_1 = x - iy$ und schreibt die Gleichung einer in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve in der Form

$$f(z, z_1) = 0, \tag{1}$$

so besteht die Relation

$$\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} = -\frac{dz_1}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \tag{2}$$

und aus letzterer lässt sich nach meiner früheren Darstellung in manchen Fällen die conforme Abbildung eines von der Curve $f = 0$ umschlossenen Ovals auf die Halbebene $(Y > 0)$ ableiten; es beruht dies darauf, dass in Folge von (2) die Function

$$\frac{d\eta}{dZ} = \cdot i \frac{dz}{dZ} \cdot \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z_1}} \tag{3}$$

auf dem Rande des Ovals reell ist, wenn $Z = X + iY$ einen Punkt der Bildebene bezeichnet.[1])

Die Curve (1) gehöre einem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln an, das durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$$

definirt sei; dann geht die Gleichung (1) über in

$$\begin{aligned}(z^2 + z_1^2)(b^2 - a^2) + 2\, z\, z_1 (a^2 + b^2 - 2\lambda) \\ - 4(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) = 0;\end{aligned} \tag{4}$$

und es wird

$$\begin{gathered}\eta' = \frac{d\eta}{dZ} = \frac{i}{4\sqrt{z^2 - e^2}\ \sqrt{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}} \cdot \frac{dz}{dZ}, \\ \text{wenn } e^2 = a^2 - b^2,\end{gathered} \tag{5}$$

eine Function, die längs der Curve (4) reell ist; dasselbe gilt von ihrem logarithmischen Differentialquotienten

---

1) Vergl. Sitzungsbericht der phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. vom 7. Juni 1894.

$$(6)\quad \frac{d\log\eta'}{dZ} = \frac{d\log z'}{dZ} - \frac{z}{z^2-e^2}\cdot z', \quad \text{wo } z' = \frac{dz}{dZ}.$$

Letzterer ist von λ unabhängig; er ist gleich $\frac{d\log v'}{dZ}$, wenn

$$(7)\quad v = \int\frac{dz}{\sqrt{z^2-e^2}} = \log(z+\sqrt{z^2-e^2}) = \log\zeta$$

gesetzt wird. Es ist vortheilhaft v oder ζ als neue Variable eingeführt zu denken. Vermöge der Substitution

$$(8)\quad \frac{z}{e} = \frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \qquad \zeta = z+\sqrt{z^2-e^2}$$

wird bekanntlich[1]) das System confocaler Ellipsen (mit den Brennpunkten $\pm e$) in der z-Ebene übergeführt in ein System concentrischer Kreise in der ζ-Ebene (mit dem Mittelpunkte $\zeta = 0$); die zugehörigen confocalen Hyperbeln gehen in die Radienvectoren der Kreise über; der Verbindungslinie der Brennpunkte (doppelt gezählt) entspricht in der ζ-Ebene der Einheitskreis. Jedem von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzten Polygone, das keinen Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande enthält, entspricht ein von Bögen concentrischer Kreise und deren Radien begrenztes Polygon.

Erstreckt sich keine Seite eines solchen Kegelschnittpolygons ins Unendliche, so sind alle Winkel an den Ecken gleich $\frac{\pi}{2}$ oder gleich $\frac{3\pi}{2}$. Bildet man die ζ-Ebene vermöge der Gleichung (7) auf eine v-Ebene ab, so wird das Polygon in ein geradliniges verwandelt, dessen Abbildung auf die Halbebene nach Christoffel sofort ausgeführt werden kann. Liegt kein Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande des abzubildenden Polygons, so haben wir also

[1]) Vergl. z. B. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, p. 130 ff. und Taf IX.

(9) $$v = \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} dZ + C'.$$

Hiebei bedeuten $B_1, B_2, \ldots B_n$ diejenigen Stellen der Axe $Y = 0$, denen je eine Ecke mit dem Winkel $\frac{3\pi}{2}$ im gegebenen Polygon entspricht, während den Punkten A_1, $A_2 \ldots A_m$ Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ zugeordnet sind. Es ist immer

(9a) $$m = n + 4,$$

so dass der Punkt $Z = \infty$ keine singuläre Stelle für die Abbildung liefert (wenn nicht zufällig eine der Grössen A_s, B_t unendlich gross wird).

2. Ist das gegebene Polygon im Endlichen geschlossen, wie im vorigen Falle, liegt aber ein Brennpunkt auf dem Rande (etwa $z = e$), so betrachten wir wieder die durch (6) gegebene Function $\frac{d \log v'}{dZ}$. Da jetzt die Relation

(10) $$m = n + 3$$

erfüllt ist, so ist die Function

$$\frac{d \log v'}{dZ} - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{Z - B_t} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{Z - A_s} + \frac{1}{2} \frac{1}{Z - E},$$

wo der reelle Punkt E dem Brennpunkte e zugeordnet sei, überall (auch für $Z = \infty$) holomorph, also gleich einer Constanten. Das Verhalten im Brennpunkte bedarf nur noch einer Besprechung. Es besteht für $z = e$ eine Entwicklung der Form

(11) $$z - e = \varepsilon_1 (Z - E) + \varepsilon_2 (Z - E)^2 + \ldots,$$

und es ist demnach

$$\frac{z}{z^2-e^2}\frac{dz}{dZ}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+e}+\frac{1}{z-e}\right)\frac{dz}{dZ}=\frac{1}{2}\frac{1}{Z-E}+\mathfrak{P}(Z-E)$$

wenn $\mathfrak{P}(Z-E)$ eine nach positiven Potenzen geordnete Reihe bedeutet; die betrachtete Function verhält sich also an der Stelle $Z=E$ in der That nicht singulär. Die Abbildung wird sonach durch eine Formel der folgenden Gestalt vermittelt:

$$\text{(10a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2}) = C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}\frac{dZ}{\sqrt{Z-E}}+C'.$$

Liegen beide Brennpunkte auf dem Rande des Polygons und entspricht der Werth $Z=E'$ dem Werthe $z=-e$, so finden wir in gleicher Weise:

$$\text{(12)}\qquad m=n+2,$$

$$\text{(12a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2})=C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}\frac{dZ}{\sqrt{(Z-E)(Z-E')}}.$$

3. Es kann auch vorkommen, dass der Brennpunkt nicht nur auf dem Rande des Polygons liegt, sondern auch eine Ecke desselben bildet; das Polygon erscheint dann längs eines Stückes der reellen Axe, das vom betr. Brennpunkte ausgeht, aufgeschlitzt. Die Entwicklung (11) ist zu ersetzen durch

$$z-e=\delta_2(Z-E)^2+\delta_3(Z-E)^3+\dots.$$

Wir finden in gleicher Weise, da die Function $\frac{d\log v'}{dZ}$ an der Stelle $Z=E$ nicht unendlich wird:

$$\text{(13)}\qquad m=n+4,$$

$$\text{(13a)}\quad \log(z+\sqrt{z^2-e^2})=C\int\frac{\sqrt{\Pi(Z-B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z-A_s)}}\,dZ+C'.$$

Sind beide Brennpunkte Ecken des Polygons, so wird:

$$(14) \qquad m = n + 4,$$

$$(14\text{a}) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} dZ + C'.$$

Liegt ein Brennpunkt auf dem Rande, während der andere als Ecke auftritt, so ist

$$(15) \qquad m = n + 3,$$

$$(15\text{a}) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{Z - E}} + C'.$$

4. Liegt ein Brennpunkt im Innern des abzubildenden Polygons, so gilt wieder eine Entwicklung der Form (11); es bedeutet nun jetzt E einen Punkt im Innern der Halbaxe $Y > v$. Damit die Function (6) auf dem Rande reell sei, muss dann der conjugirte Punkt E_1 in gleicher Weise als singuläre Stelle vorkommen; es wird also:

$$(16) \qquad m = n + 2,$$

$$(16\text{a}) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z - E)(Z - E_1)}} + C'.$$

Liegen beide Brennpunkte im Innern, so ist:

$$(17) \qquad m = n,$$

$$(17\text{a}) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z - E)(Z - E_1)(Z - E')(Z - E'_1)}} + C'.$$

Für $m = n = 0$ ergibt sich hieraus insbesondere die Schwarzsche Formel für das Innere einer Ellipse.

Liegt $z = e$ im Innern, $z = -e$ auf dem Rande des Polygons, so haben wir

$$(18) \qquad m = n + 1,$$

$$(18a) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z - E)(Z - E_1)(Z - E')}} + C'.$$

Liegt $z = e$ im Innern und ist $z = -e$ eine Ecke des Polygons, so wird

$$(19) \qquad m = n + 2,$$

$$(19a) \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{\sqrt{(Z - E)(Z - E_1)}} + C'.$$

5. Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dass sich der unendlich ferne Punkt der z-Ebene im Innern des Polygons befindet, d. h. dass es sich um die Abbildung der Halbebene auf das Aeussere eines Polygons von der bisher betrachteten Gestalt handelt. Die Aufgabe erledigt sich in derselben Weise, wie die entsprechende Aufgabe bei geradlinigen Polygonen durch Christoffel[1]) Erledigung fand. Es sei $A + iB$ der Punkt, welcher dem Punkte $z = \infty$ zugeordnet wird, so dass eine Entwicklung der Form

$$(20) \qquad \frac{1}{z} = \gamma_1 (Z - A - iB) + \gamma_2 (Z - A - iB)^2 + \dots.$$

besteht. Ist dann n die Zahl der Ecken mit den Winkeln $\frac{3\pi}{2}$, m diejenige mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, so können wir alle möglichen Fälle in den Gleichungen

---

1) Annali di Matematica, Serie 2, Bd. 4, 1870.

$$n = m + \nu \tag{21}$$

$$\log(z + \sqrt{z^2 - e^2}) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{U} + C', \tag{21a}$$

wo $U = (Z-E)^{\alpha}(Z-E_1)^{\alpha_1}(Z-E')^{\beta}(Z-E_1')^{\beta_1}[(Z-A)^2+B^2]$

zusammenfassen; zur Ableitung der letzten Gleichung hat man die Function (6) an den einzelnen singulären Stellen zu entwickeln. Die einzelnen Fälle unterscheiden sich nun in folgender Weise:

1) Kein Brennpunkt liegt im Innern des abzubildenden Polygons (welches den unendlich fernen Punkt enthält):

$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

2) Ein Brennpunkt auf dem Rande:

$\nu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

3) Beide Brennpunkte auf dem Rande:

$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0.$

4) Ein Brennpunkt als Ecke:

$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

5) Beide Brennpunkte als Ecken:

$\nu = 0, \quad \alpha = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

6) Beide Brennpunkte auf dem Rande und einer von ihnen als Ecke:

$\nu = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

7) Ein Brennpunkt im Innern:

$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$

8) Beide Brennpunkte im Innern:

$$\nu = 4, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{2}.$$

9) Ein Brennpunkt auf dem Rande, der andere im Innern:

$$\nu = 3, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0.$$

10) Ein Brennpunkt im Innern, der andere als Ecke:

$$\nu = 2, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \beta_1 = 0.$$

Der Fall 1) liefert für $n = m = 0$ insbesondere die Schwarz'sche Formel für die Abbildung des Aeussern einer Ellipse. Der Fall 5) führt für $m = n = 0$ zu der bekannten (z. B. für die Kugelfunctionen wichtigen) Abbildung:

$$\frac{Z - A - iB}{Z - A + iB} = a\left(z + \sqrt{z^2 - e^2}\right) + \beta.$$

6. Liegt der unendlich ferne Punkt der z-Ebene auf dem Rande des Polygons, ohne eine Ecke desselben zu bilden, so sind die Formeln (21) und (21a) zu ersetzen durch:

$$m = n + \nu, \tag{22}$$

$$\log\left(z + \sqrt{z^2 - e^2}\right) = C \int \frac{\sqrt{\Pi(Z - B_t)}}{\sqrt{\Pi(Z - A_s)}} \frac{dZ}{U} + C', \tag{22a}$$

wo $U = (Z - E)^{\alpha}(Z - E_1)^{\alpha_1}(Z - E')^{\beta}(Z - E_1')^{\beta_1}(Z - A)$

und wo der reelle Punkt $Z = A$ dem Punkt $z = \infty$ entspricht. Für die eben unterschiedenen 10 Fälle haben wir jetzt bez.:

$$\nu = 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -1,\ 0$$

zu setzen, während die zugehörigen Werthe von $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ ungeändert bleiben.

7. Ein neuer Ansatz wird nöthig, wenn der unendlich ferne Punkt der z-Ebene als Ecke des abzubildenden Polygons einfach oder mehrfach vorkommt, d. h. wenn sich das gegebene Flächenstück nach einer Richtung oder nach mehreren Richtungen (zwischen je zwei Hyperbelzweigen) ins Unendliche erstreckt. Vermöge der Abbildung (8) entspricht jetzt dem gegebenen Flächenstücke das Innere eines Kreisbogenpolygons, dessen Begrenzung durch concentrische Kreise und deren Radien gebildet wird und bei dem das gemeinsame Centrum mehrfach als Ecke vorkommt. Zwei im Centrum zusammentreffende Radien bilden den Winkel $\lambda\pi$, wenn in der z-Ebene die Asymptoten der entsprechenden Hyperbeläste denselben Winkel einschliessen. Statt des Punktes $\zeta = 0$ kann auch der Punkt $\zeta = \infty$ als Ecke des Kreisbogenpolygons vorkommen; es können auch beide Punkte gleichzeitig als Ecken in Betracht zu ziehen sein. Unser Problem ist hierdurch, falls die Brennpunkte nicht im Innern oder auf dem Rande liegen auf das Schwarz'sche Problem reducirt; es wird gelöst durch eine Differentialgleichung der Form

$$\{\zeta, Z\} = R(Z), \tag{23}$$

wenn in bekannter Weise

$$\{\zeta, Z\} = \frac{d^2 \log \frac{d\zeta}{dZ}}{dZ^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \frac{d\zeta}{dZ}}{dZ}\right)^2$$

gesetzt wird, und wenn $R(Z)$ eine rationale Function bezeichnet. Es seien wieder A_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ die reellen Punkte der Z-Ebene, welche aus den Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ hervorgehen, B_s $(s = 1, 2, \ldots m)$ diejenigen Punkte, denen Ecken mit den Winkeln $\frac{3\pi}{2}$ entsprechen, C_t die Punkte der Axe $Y = 0$, denen der Punkt $\zeta = 0$ als Ecke des Polygons entspricht und $\lambda_t \pi$ der zugehörige Winkel, endlich

D_u diejenigen Punkte, die aus einer Ecke $\zeta = \infty$ mit dem Winkel μ_u hervorgehen. Man findet:

$$\{\zeta, Z\} = \{z, Z\} + \frac{3\,e^2}{2\,(z^2 - e^2)^2}\left(\frac{d\,z}{d\,Z}\right)^2.$$

Die Differentialgleichung des Problems ist daher von der Form:

$$(24) \qquad \{z, Z\} + \frac{3\,e^2}{2\,(z^2 - e^2)^2}\left(\frac{d\,z}{d\,Z}\right)^2$$

$$= \sum_r \left[\frac{3}{8}\frac{1}{(Z-A_r)^2} + \frac{a_r}{Z-A_r}\right] + \sum_s \left[-\frac{5}{8}\frac{1}{(Z-B_s)^2} + \frac{\beta_s}{Z-B_s}\right]$$

$$+ \sum_t \left[\frac{1-\lambda_t^2}{2\,(Z-C_t)^2} + \frac{\gamma_t}{Z-C_t}\right] + \sum_u \left[\frac{1-\mu_u^2}{2\,(Z-D_u)^2} + \frac{\delta_u}{Z-D_u}\right];$$

und zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen:

$$(25)\left\{\begin{aligned} &\Sigma\,a_r + \Sigma\,\beta_s + \Sigma\,\gamma_t + \Sigma\,\delta_u = 0, \\ &\Sigma\,A_r\,a_r + \Sigma\,B_s\,\beta_s + \Sigma\,C_t\,\gamma_t + \Sigma\,D_u\,\delta_u + \frac{3}{8}\,n - \frac{5}{8}\,m \\ &\qquad + \frac{1}{2}\,\Sigma(1-\lambda_t^2) + \frac{1}{2}\,\Sigma(1-\mu_u^2) = 0, \\ &\Sigma A_r^2 a_r + \Sigma B_s^2 \beta_s + \Sigma C_t^2 \gamma_t + \Sigma D_u^2 \delta_u + \frac{3}{4}\,\Sigma A_r - \frac{5}{4}\,\Sigma B_s \\ &\qquad + \Sigma(1-\lambda_t^2)\,C_t + \Sigma(1-\mu_u^2)\,D_u = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Integration der Gleichung (24) ist vermöge (23) in bekannter Weise auf die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung zurückgeführt. Die rechte Seite von (24) ist hierbei gleich $R(Z)$, d. h. gleich der rechten Seite von (23), zu setzen.

8. Lassen wir zu, dass ein Brennpunkt im Innern oder auf dem Rande des abzubildenden Flächenstückes liege, so sind an der rechten Seite von (24) gewisse Modificationen

anzubringen. Handelt es sich um den Brennpunkt $+e$, so besteht eine Entwicklung von der Form (11). Entwickelt man dann die linke Seite von (24) nach Potenzen von $Z-E$ und beachtet, dass, wenn E im Innern der Halbebene $Y>0$ liegt, der conjugirte Punkt E_1 in entsprechender Weise singulär sein muss, so wird das Problem im allgemeinsten Falle durch eine Gleichung der folgenden Form gelöst:

$$(26) \qquad \{z, Z\} + \frac{3e^2}{2(z^2-e^2)^2}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

$$= R(Z) + \frac{3}{8}\left[\frac{\varrho}{(Z-E)^2} + \frac{\varrho_1}{(Z-E_1)^2} + \frac{\varrho'}{(Z-E')^2} + \frac{\varrho'_1}{(Z-E'_1)^2}\right]$$

$$+ \frac{\varkappa \cdot \sigma}{Z-E} + \frac{\varkappa_1 \cdot \sigma_1}{Z-E_1} + \frac{\varkappa' \cdot \sigma'}{Z-E'} + \frac{\varkappa'_1 \cdot \sigma'_1}{Z-E'_1}.$$

Hier bedeutet $R(Z)$ die rechte Seite von (24); $\varkappa_1$ ist zu $\varkappa$, $\varkappa'_1$ zu $\varkappa'$ conjugirt; $\varrho, \varrho_1, \varrho', \varrho'_1, \sigma, \sigma_1, \sigma', \sigma'_1$ sind gleich 0 oder 1 je nach Lage der Brennpunkte; und zwischen den Constanten der rechten Seite bestehen die Relationen:

$$(27) \quad \begin{cases} B + \varkappa + \varkappa_1 + \varkappa' + \varkappa'_1 = 0, \\ B' + \sigma\varkappa E + \sigma_1 E_1 + \sigma'\varkappa' E' + \sigma'_1\varkappa'_1 E'_1 = 0, \\ B'' + \sigma\varkappa E^2 + \sigma_1\varkappa_1 E_1^2 + \sigma'\varkappa' E'^2 + \sigma'_1\varkappa'_1 E_1'^2 + \frac{3}{4}(\varrho E \\ \qquad + \varrho_1 E_1 + \varrho' E' + \varrho'_1 E'_1) = 0, \end{cases}$$

wo mit B, B', B'' die linken Seiten der entsprechenden Gleichungen (25) bezeichnet sind.

Die verschiedenen möglichen Fälle unterscheiden wir in derselben Weise durch Zahlen, wie dies in Nr. 5 geschah. Dann haben wir folgende Resultate:

1) Alle Grössen ϱ, σ sind Null; die Gleichung (26) ist mit (24) identisch.

2) $\varrho = \sigma = 1, \quad \varrho_1 = \varrho' = \varrho'_1 = \sigma_1 = \sigma' = \sigma'_1 = 0.$

3) $\varrho = \varrho' = \sigma = \sigma' = 1, \quad \varrho_1 = \varrho'_1 = \sigma_1 = \sigma'_1 = 0.$

4) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 0, \quad \sigma = 1.$

5) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0, \quad \sigma = \sigma' = 1.$

6) $\varrho = \sigma = \sigma' = 1, \quad \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1 = \sigma_1' = 0.$

7) $\varrho = \varrho_1 = \sigma = \sigma_1 = 1, \quad \varrho' = \varrho_1' = \sigma' = \sigma_1' = 0.$

8) $\varrho = \varrho_1 = \varrho' = \varrho_1' = \sigma = \sigma_1 = \sigma' = \sigma_1' = 1.$

9) $\varrho = \varrho' = \varrho_1' = \sigma = \sigma' = \sigma_1' = 1, \quad \varrho_1 = \sigma_1 = 0.$

10) $\varrho = \varrho_1 = \sigma = \sigma_1 = \sigma' = 1, \quad \varrho' = \varrho_1' = \sigma_1' = 0.$

Ist $m = n = 0$, so findet man aus (1) insbesondere die Abbildung des von den beiden Zweigen einer Hyperbel eingeschlossenen Ebenenstückes; sie geschieht durch die Formel

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - e^2} = \alpha \left(\frac{Z-C}{Z-D}\right)^\lambda + \beta, \tag{28}$$

wo $\lambda\pi$ den von den Asymptoten eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Die Formel (28) folgt direct aus der bekannten Gleichung für die Abbildung eines Kreisbogen-Zweiecks.

9. Aus (7) leiten wir die Abbildung des von einem Hyperbelzweige eingeschlossenen Flächenstückes ab. Hat λ dieselbe Bedeutung wie in (28), so ist der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel hier gleich $(1-\lambda)\pi$. Sei $\mu = 1-\lambda$, $E = i$, $E_1 = -i$, so ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\{\zeta, Z\} = \frac{1-\mu^2}{2}\frac{1}{(Z-C)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-i)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(Z+i)^2} + \frac{\gamma}{Z-C} + \frac{\varkappa}{Z-i} + \frac{\varkappa_1}{Z+i},$$

und die Gleichungen (25) werden:

$$\gamma + \varkappa + \varkappa_1 = 0,$$
$$\gamma C + \varkappa E + \varkappa_1 E_1 + \frac{3}{4} + \frac{1-\mu^2}{2} = 0,$$
$$\gamma C^2 + \varkappa E^2 + \varkappa_1 E_1^2 + C(1-\mu^2) = 0.$$

Wir wählen $C = \infty$ und finden dann:

$$\gamma = 0, \quad \varkappa = -\varkappa_1 = i\frac{1+2\mu^2}{8};$$

die Differentialgleichung wird:

$$(29) \qquad \{\zeta, Z\} = \frac{3}{4}\frac{Z^2-1}{(Z^2+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1+2\mu^2}{Z^2+1};$$

ihre Integration geschieht durch die lineare Gleichung:

$$(Z^2+1)\frac{d^2\Theta}{dZ^2} + Z\frac{d\Theta}{dZ} - \frac{\mu^2}{4}\Theta = 0.$$

Die particulären Integrale der letzteren sind:

$$\Theta_1 = (Z+\sqrt{Z^2+1})^{\frac{\mu}{2}}, \qquad \Theta_2 = (Z-\sqrt{Z^2+1})^{\frac{\mu}{2}}$$

Das allgemeine Integral von (29) ist eine lineare Function von $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$, also

$$(30) \qquad \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d} = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = (Z+\sqrt{Z^2+1})^{\mu}.$$

Durch diese Formel wird die Abbildung der Halbebene auf den von einem Hyperbelaste begrenzten Theil der Ebene vermittelt; und zwar liegt letzterer auf der concaven Seite der Hyperbel, wenn $\mu < 1$ ist, auf der convexen Seite im andern Falle; $\mu\pi$ ist der von den Asymptoten eingeschlossene Winkel.

Dasselbe Resultat erhält man nach einer früher von mir angegebenen Methode. Es sei die Gleichung einer Cassinischen Curve in der Form

$$(31) \qquad (z-a)(z_1-a)(z+a)(z_1+a) = c^2$$

gegeben, so dass die reellen Punkte a und $-a$ als gemeinsame Brennpunkte der vom Parameter c abhängigen Curvenschaar auftreten. Ausserdem hat die Curve zwei andere Brennpunkte:

man findet sie, indem man die vom unendlich fernen Kreispunkte $z = 0$ ausgehenden Tangenten mittelst der Relation $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$ bestimmt; nun ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = z_1^2 (z^2 - a^2)^2 = (z^2 - a^2)[c^2 + a^2 (z^2 - a^2)];$$

wir haben also die vier Brennpunkte

$$z = \pm a \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^4 - c^2}.$$

Ist $a^4 > c^2$, so besteht die Curve aus zwei Ovalen; von dem einen wird die positive Axe in den Punkten $\sqrt{a^2 - c}$ und $\sqrt{a^2 + c}$ getroffen; zwischen beiden liegen die Brennpunkte a und $\frac{1}{a}\sqrt{a^4 - c^2}$. Die Abbildung eines solchen Ovals, das zwei Brennpunkte umschliesst, auf die Halbebene $Y > 0$ geschieht nach jener Methode durch die Gleichung

$$(32) \quad \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)[c^2 + a^2 (z^2 - a^2)]}} = C \int \frac{dZ}{\sqrt{(Z - A)(Z - A_1)(Z - B)(Z - B_1)}} + C',$$

wenn die Punkte A, B den beiden inneren Brennpunkten entsprechen und wenn A_1, B_1 bez. zu A, B conjugirt sind.

Wird jetzt $c = a^2$, so erhält die Curve (31) einen Doppelpunkt im Anfangspunkte, in den auch der von c abhängige Brennpunkt hineinrückt; auch B fällt mit B_1 zusammen und wird reel; und die Formel (32) geht über in:

$$(33) \quad \frac{1}{a} \int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = C \int \frac{dZ}{(Z - B)\sqrt{(Z - A)(Z - A_1)}} + C'.$$

Hierdurch ist die Abbildung des Innern einer Schleife einer Lemniscate auf die Halbebene vermittelt.

Schliessen die Tangenten des Doppelpunktes den Winkel $\mu\pi$ ein, so muss für $z = 0$ eine Entwicklung der Form

$$z = (Z - B)^{\mu}\, \mathfrak{P}(Z - B)$$

bestehen; es wird also

$$\frac{dz}{z} = \mu \frac{dZ}{Z - B} + \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}\, dZ.$$

In (33) müsste daher $a^2 C = i\mu(A - B)$ gesetzt werden. Für eine eigentliche Lemniscate muss allerdings $\mu = \frac{1}{2}$ genommen werden, denn sie wird aus einer gleichseitigen Hyperbel durch die Transformation $z = t^{-1}$ gewonnen. Durch letztere Transformation werden aber aus beliebigen Hyperbeln Curven erhalten, die den Lemniscaten ganz analog sind, und bei denen μ beliebig bleibt (vgl. unten Nr. 9). Sie haben gleichfalls nur zwei Brennpunkte, und für sie gilt also auch die Formel (33). Lassen wir $B = \infty$, $A = i$, $A_1 = -i$, $a = e^{-1}$ werden, so folgt:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - e^2}} = \mu \int \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 + 1}} + C,$$

woraus wiederum die Gleichung (30) gewonnen wird; es ist nur nachträglich t mit z zu vertauschen.

Denkt man sich den Punkt i der Z-Ebene durch einen beliebigen Punkt B der Halbebene $Y > 0$ ersetzt, ebenso $-i$ durch den conjugirten Punkt B_1 und lässt sodann $e = 0$ werden, so nähern sich auch B und B_1 demselben reellen Werthe B_0 und die Gleichung (30) gibt

$$\frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = (2Z - B_0)^{\mu}.$$

Es entsteht also in der That die bekannte Formel für die Abbildung der Halbebene auf den von zwei Geraden

(hier den Asymptoten der Hyperbel, in welche letztere für $e = 0$ zerfällt) eingeschlossenen Winkelraum.

10. Die hier befolgte Methode wird man auch in anderen Fällen anwenden können, in denen die Abbildung eines gegebenen Curvensystems der z-Ebene auf ein System von Kreisen der ζ-Ebene bekannt ist, sobald nur $\{\zeta, z\}$ eine rationale Function von z ist. Selbstverständlich gelingt dies bei dem Systeme confocaler Parabeln, da dasselbe aus dem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln durch Grenzübergang gewonnen werden kann.

Ferner kommt das System von Curven in Betracht, das aus den confocalen Ellipsen und Hyperbeln durch die Transformation $t = z^{-1}$ hervorgeht. Sei $t = \sigma + i\tau$, so sind dies die Curven:

$$(34) \qquad \begin{aligned} (\sigma^2 + \tau^2)^2 (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda) + 4\lambda(\sigma^2 + \tau^2) \\ - 4a^2\sigma^2 - 4b^2\tau^2 = 0. \end{aligned}$$

Sie haben sämmtlich im Anfangspunkte einen Doppelpunkt. Für $\lambda < b^2$ $(a^2 > b^2)$ ist derselbe isolirt, für $\lambda > b^2$ hat die Gestalt der Curve Aehnlichkeit mit derjenigen einer gewöhnlichen Lemniscate; eine solche findet man für $2\lambda = a^2 + b^2$, sie entspricht der gleichseitigen Hyperbel

$$\sigma^2 - \tau^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2).$$

Ist $t_1 = \sigma - i\tau$, und wird die linke Seite von (34) für den Augenblick mit φ bezeichnet, so sind die Brennpunkte durch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}$ bestimmt. Wir haben $\varphi(t_1, t_1) = t^2 t_1^2 f(z, z_1)$, also:

$$\frac{1}{t^2 t_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} - \frac{2}{t^2 t_1^3} \varphi = \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial t_1} = - \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{1}{t_1^2}$$

Nun war in Nr. 1:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = 16\,(z^2 - e^2)\,(a^2 - \lambda)\,(b^2 - \lambda),$$

also vermöge $\varphi = 0$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)^2 = t^4 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 = 16\,(1 - e^2 t^2)\,t^2\,(a^2 - \lambda)\,(b^2 - \lambda)$$

Jede Curve des Systems (34) hat daher nur die beiden (allen gemeinsamen) Brennpunkte $t = \pm e^{-1}$, wie es geometrisch nach der Theorie der Cremona'schen Transformation selbstverständlich ist.

Ein anderes Beispiel gibt die Transformation

$$\zeta = z^2$$

Den Parallelen zu den Axen der ζ-Ebene entsprechen zwei Orthogonalschaaren von gleichseitigen Hyperbeln.[1] Die Abbildung eines von letzteren gebildeten Polygons geschieht also, indem man die Function

$$\frac{d \log \frac{d\zeta}{dZ}}{dZ} = 2 \frac{d}{dZ} \log \left(z \frac{dz}{dZ}\right)$$

als rationale Function von Z bestimmt. Einer beliebigen geraden Linie der ζ-Ebene entspricht eine gleichseitige Hyperbel mit dem Mittelpunkte $z = 0$; auch für Polygone, deren Begrenzung durch beliebige concentrische gleichseitige Hyperbeln gegeben wird, ist also diese Methode anwendbar.[2])

Einem beliebigen Kreise der ζ-Ebene entspricht eine Cassini'sche Curve der z-Ebene, deren Mittelpunkt an der

---

[1]) Vgl. Holzmüller a. a. O. p. 105 ff.

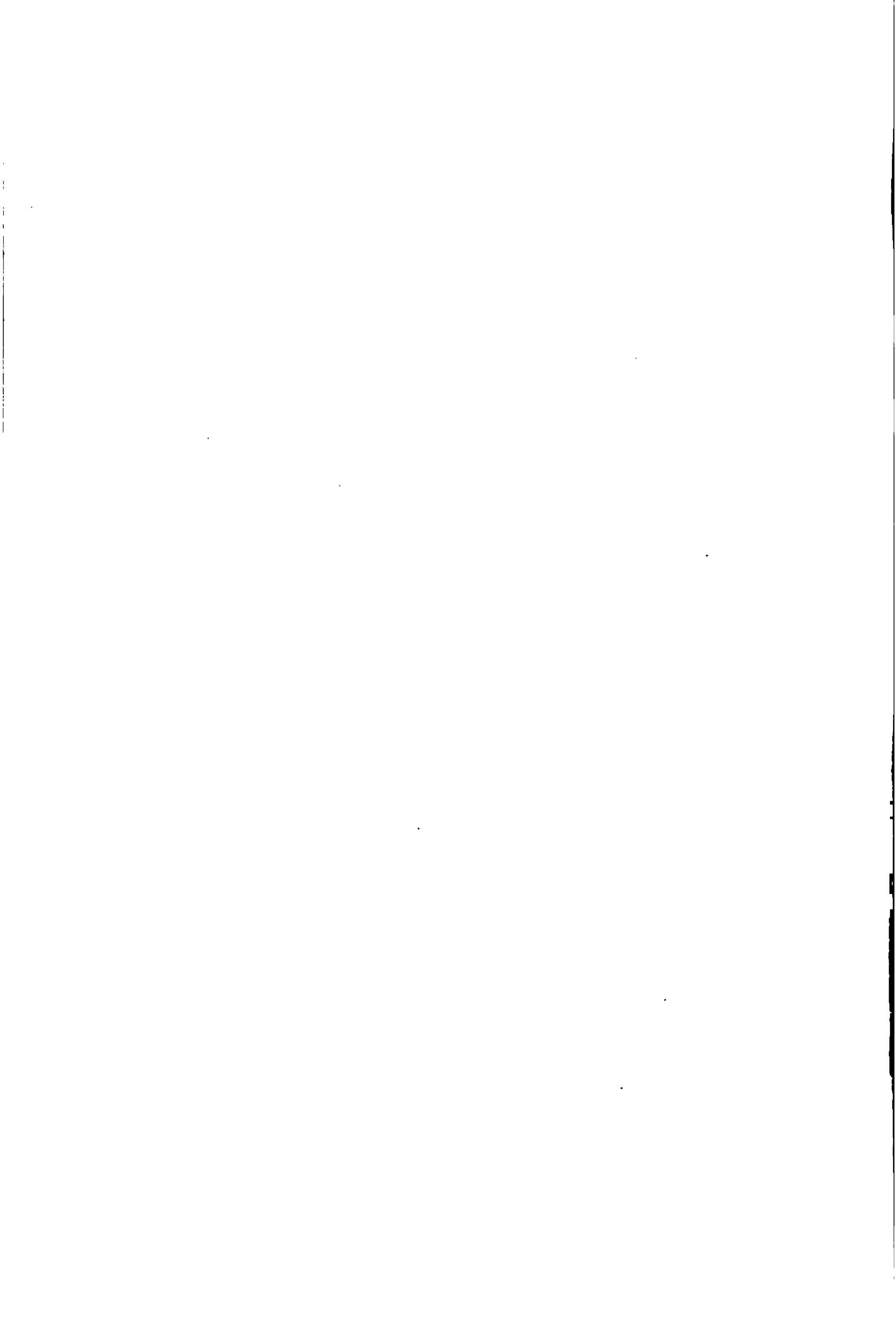
[2]) Es ist dies schon von Sanio angegeben: Die Abbildung des Aeusseren eines Kreisbogenpolygons. Königsberger Inauguraldissertation 1885.

Stelle $z = 0$ liegt; dieselbe ist eine gewöhnliche Lemniscate, wenn der Kreis durch den Punkt $\zeta = 0$ hindurchgeht. Die Abbildung der Halbebene $Y > 0$ auf Polygone, deren Begrenzung durch Bögen concentrischer Cassini'scher Curven gebildet wird, ist also zurückgeführt auf Bestimmung der Function

$$\{\zeta, Z\} = \{z, Z\} + \frac{3}{2}\frac{1}{z^2}\left(\frac{dz}{dZ}\right)^2$$

in ihrer Abhängigkeit von Z.

In ähnlicher Weise wird man zahlreiche Beispiele, die von Holzmüller und Anderen behandelt sind, verwerthen können.



Ueber eine neue Bestimmung der Refractions-constante auf astronomischem Wege.

Von J. Bauschinger.

(Eingelaufen 4. Mai.)

Die Bestimmung der Refractionsconstante, also physikalisch gesprochen des Brechungsexponenten der Luft gehört zu den schwierigsten und wichtigsten Aufgaben der praktischen Astronomie. Die Schwierigkeiten liegen einerseits in schwer zu bestimmenden Instrumentalfehlern, insbesondere den Biegungsverhältnissen des Fernrohrs, andererseits in der Complicirtheit der atmosphärischen Factoren, welche auf die Refraction von Einfluss sind und deren Wirkungen nur mit Mühe von einander zu trennen und zu bestimmen sind. Die Wichtigkeit einer möglichst genauen Erforschung aller auf die Refraction einwirkenden Umstände liegt darin, dass das ganze Declinationssystem der Gestirne, also die Hälfte der Coordinatenbestimmungen der messenden Astronomie, auf der Annahme über die Refractionsconstante beruht, und dass ein wirklicher Fortschritt in der Verfeinerung der absoluten Messungen erst dann constatirt werden kann, wenn er Hand in Hand geht mit einer genaueren Einsicht in die Refractionsverhältnisse.

Der schöne Repsold'sche Meridiankreis, welchen die Münchener Sternwarte im Jahre 1891 erhielt, zeigte bei den ersten Prüfungen so hervorragende Eigenschaften, dass der

Gedanke, dieselben zu einer neuen Untersuchung der Refraction auszunutzen, umsoweniger abzuweisen war, als in München eine derartige Untersuchung überhaupt noch nicht ausgeführt wurde, und als die mit diesem Instrument ersten Ranges in Aussicht genommenen fundamentalen Messungen ohne eine solche Untersuchung bei den möglicherweise vorhandenen localen Einflüssen einen bedenklichen Mangel der Fundirung aufweisen würden. Die ersten Jahre der Beobachtungsthätigkeit an diesem Instrument sind daher nach der Bestimmung des Herrn Professor H. Seeliger der Untersuchung der Refraction gewidmet worden. Eine demnächst im III. Bande der „Annalen der k. Sternwarte zu München" erscheinende umfangreiche Abhandlung gibt ausführliche Rechenschaft hierüber, während hier versucht werden soll, die wesentlichsten Resultate auszugsweise zusammenzustellen.

Die Methode der Untersuchung war die bekannte und mit dem Meridiankreis einzig mögliche durch Beobachtung der Circumpolarsterne in ihrer oberen und unteren Culmination. Ein Hauptaugenmerk wurde auf die Erlangung möglichst zahlreicher Messungen in geringen Höhen gerichtet, Beobachtungen, welche ebenso wichtig als schwierig zu erlangen sind und in dieser Menge, wie sie zu unserer Untersuchung verwendet werden konnten, auch kaum noch irgendwo vorliegen dürften. Die meteorologischen Elemente wurden an sorgfältig geprüften Instrumenten abgelesen und zwar sind nicht nur der Luftdruck und die äussere Lufttemperatur gemessen worden, sondern auch die Luftfeuchtigkeit und die Temperatur im Beobachtungsraume; letztere an fünf symmetrisch in der Beobachtungsspalte aufgehängten Thermometern. Die Fehler des Meridiankreises selbst sind genau untersucht worden, doch muss hierüber auf die Abhandlung verwiesen werden; hier sei nur angeführt, dass der mittlere Fehler der Theilung des Kreises bei Ablesung von vier Mikroskopen zu $\pm$ 0.″24 gefunden wurde; da die Gestirne symmetrisch in

beiden Lagen des Kreises beobachtet wurden, so stellt sich also der von der Theilung herrührende Fehler im Mittel auf $\pm 0''.17$; ferner muss erwähnt werden, dass jener Fehler, der bisher am verhängnissvollsten auf die Messungen der Zenithdistanzen von Gestirnen in geringen Höhen und in Folge dessen auf die Bestimmung der Refractionsconstante eingewirkt hat, nämlich die Biegung des Fernrohres, beim Repsold'schen Instrument als unmessbar klein gefunden wurde, sich also sicher nicht über $0''.1$ erhebt.

Die Beobachtungen sind von vorneherein so angelegt worden, dass es möglich war, die Veränderlichkeit der Polhöhe unabhängig von anderen Beobachtungen zu bestimmen und in Rechnung zu ziehen; die gefundenen Variationen sind in guter Uebereinstimmung mit den anderwärts ermittelten. Die Genauigkeit der Beobachtungen ist aus der Uebereinstimmung der Einzelmessungen eines Gestirnes untereinander bestimmt worden; es fand sich der mittlere Fehler einer absoluten Beobachtung der Zenithdistanz (abgesehen vom Theilungsfehler) zu

$$\mu = \sqrt{0''.32^2 + 0''.23^2\, tg\, z^2} \qquad (z = \text{Zenithdistanz})$$

eine Zahl, die am besten geeignet ist, die Vortrefflichkeit des Instrumentes zu erweisen und das Vertrauen in die Sicherheit der erlangten Resultate zu befestigen.

Die Untersuchung der auf die Refraction bezüglichen Verhältnisse wurde mit der Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten der Luft begonnen. Den bei der ersten Reduction der Beobachtungen angewandten Refractionstafeln von Radau liegt der Regnault'sche Werth 0.003663 (für Centigrade) zu Grunde, der sich von den bisherigen sichersten astronomischen Bestimmungen

Bessel	0.003644
Gyldén	0.003689
Pond (Chandler)	0.003650

so wenig unterscheidet, dass eine irgendwie bedeutende Correction desselben ausgeschlossen erschien. Die trotz dieser Aussicht begonnene Untersuchung hat aber nach einer anderen Richtung zu einem ziemlich sicheren Resultate geführt, das nicht ohne Bedeutung zu sein scheint. Das eingeschlagene Verfahren war folgendes: Es wurden nur beigezogen die Sterne zwischen 60° und 85° nördlicher Zenithdistanz, indem jene mit geringerer Z.D. nur einen minimalen Beitrag zur Lösung der Aufgaben liefern können, jene mit grösserer aber anderweitigen Störungen in einem Maasse unterliegen, dass sie die Einflüsse einer geringen Aenderung des Temperaturcoefficienten verwischen müssen. Von jedem Sterne wurden die bei den vier höchsten und die bei den vier niedrigsten Temperaturen erhaltenen Zenithdistanzen in je ein Mittel vereinigt und die Differenz $z_1 - z_0$ der beiden Gruppen genommen, zugleich mit der Differenz der Mittel der Temperaturen $t_1 - t_0$; dieses Verfahren bewirkt, dass die erlangten Differenzen unabhängig werden von der Refractionsconstante selbst und von der noch ungelösten Frage über den Einfluss der Saalrefraction. Die Unterschiede der Temperaturen steigen bis zu 21° und liessen ein sicheres Resultat erwarten. Ist $\left(1 + \frac{i}{100}\right)$ der Factor, mit dem der Ausdehnungscoefficient 0,003663 multiplicirt werden muss, um den den Beobachtungen entsprechenden zu erhalten, und ist R die Refraction für die Temperatur 0° C und den mittleren Barometerstand 718 mm, dann werden die Bedingungsgleichungen, wenn die ganz belanglosen Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden, von der Form:

$$(t_1 - t_0)\ 0.003663\ \frac{R}{100}\ i = z_1 - z_0.$$

Wider Erwarten fand sich aus 45 solchen Bedingungsgleichungen ein ungewöhnlich grosser Werth von i, nämlich $i = 3.19 \pm 0.91$, womit der Ausdehnungscoefficient wird

$$0.003663\,(1 + 0.0319) = 0.003780 \pm 0.000033.$$

Es ist kein Zweifel, dass diese Erhöhung des Ausdehnungscoefficienten um 3 Procent ganz unzulässig ist und zu unlösbaren Widersprüchen mit den physikalischen Bestimmungen führen würde. Es hat zwar Gyldén aus der Discussion von Sommerbeobachtungen einen ähnlichen Werth, nämlich 0.003769 gefunden und Mascart hat durch physikalische Methoden sogar noch einen grössern Werth, nämlich 0.00382 abgeleitet, allein diese Bestimmungen stehen vereinzelt und dürften nicht einwandfrei sein, ersterer schon desshalb, weil er eben nur für die Sommerbeobachtungen gilt, während die Winterbeobachtungen einen viel kleineren Werth ergeben; der Mascart'sche Werth aber ist durch neuere Versuche von Benoît widerlegt worden (siehe Kayser und Runge, Die Dispersion der Luft, Abh. der Berl. Akad. 1893).[1])

Es könnte die Ursache des grossen Unterschiedes zwischen dem oben gefundenen Werth und den früheren astronomischen Bestimmungen darin gesucht werden, dass bei ersterem der Dampfdruck in Rechnung genommen wurde, während dies bei den anderen nicht geschah, allein eine einfache Ueberschlagsrechnung zeigt, dass bei Nichtberücksichtigung des Dampfdruckes die Unterschiede $z_1 - z_0$ noch stärker positiv werden, also i noch grösser. Hierin liegt ein Beweis für die Nothwendigkeit, bei der Berechnung der Refraction den Dampfdruck beizuziehen, zugleich aber auch ein Hinweis auf eine andere mögliche Erklärung der durch die Beobachtungen gebotenen Differenzen $z_1 - z_0$. Ich suche deren Entstehung in der nicht ganz zutreffenden Inrechnungnahme

---

[1]) Nachträglich finde ich noch, dass Nyrén aus den Pulkowaer Vertikalkreisbeobachtungen 1882—1891 den Werth 0.003770 für 1° C abgeleitet hat, also einen mit dem von mir gefundenen fast identischen; er hat es aber ebenfalls nicht gewagt, denselben bei der Reduction der Beobachtungen zu benutzen.

des Dampfdruckes bei den Radau'schen Tafeln. Radau hat zur Berechnung der sogenannten „optischen Dichtigkeit" der Luft vorgeschlagen den Ausdruck

$$\left(1-\frac{1}{8}\frac{\pi}{760}\right)B \quad \text{statt } B \qquad \begin{cases}\pi \text{ Dampfdruck}\\ B \text{ Barometerstand}\end{cases}$$

zu benutzen, worin der Factor $\frac{1}{8}$ lediglich empirisch ist und aus den Experimenten von Fizeau und Jamin abgeleitet wurde. Die theoretische Berechtigung dieser Gegenüberstellung von optischer und physikalischer Dichtigkeit ist nun schwer einzusehen, während es viel näher liegt, die brechende Kraft der Luft proportional der physikalischen Dichtigkeit zu setzen, welche bekanntlich proportional

$$\left(1-0.378\frac{\pi}{760}\right)B \text{ oder nahe } \left(1-\frac{3}{8}\frac{\pi}{760}\right)B$$

anzunehmen ist. Um die Frage, welche Dichtigkeit für die Refraction massgebend ist, objectiv zu entscheiden, ist es offenbar der sicherste Weg, den Factor, mit welchem π in Rechnung zu setzen ist, aus den Beobachtungen selbst abzuleiten; dieser Weg führt aber unmittelbar zu den Differenzen $z_1 - z_0$, da die Extreme der Temperatur im Allgemeinen mit den Extremen des Dampfdruckes zusammenfallen. Ist $\frac{k}{8}$ der zu bestimmende Factor, so werden die Gleichungen von der Form

$$0.12\, m\,(\pi_1 - \pi_0)\,(k-1) = z_1 - z_0,$$

worin m die Aenderung der Refraction für 1 mm Quecksilberdruck bedeutet. Die Auflösung derselben ergab

$$k-1 = 3.37 \pm 0.69.$$

Die Beobachtungen entscheiden also für die Anwendung der physikalischen Dichtigkeit. Die dann übrig bleibenden Fehler

$z_1 - z_0$ lassen weder in der Anordnung nach der Zenithdistanz, noch in jener nach der Rectascension ein systematisches Verhalten erkennen, womit zugleich der Nachweis gegeben ist, dass nach Einführung des neuen Factors von π die Beobachtungen eine Aenderung des angewandten Ausdehnungscoefficienten der Luft nicht erheischen.

Die Ermittelung der Refractionsconstante geschah durch Vergleichung der in der oberen und unteren Culmination erhaltenen Declinationen. Ist

δ die Declination aus den oberen Culminationen,
δ' „ „ „ „ unteren „
r die Refraction für die obere Culmination,
r' „ „ „ „ untere „
$\Delta\varphi$ die Correction der angewandten Polhöhe,
$(1+n)$ der Factor, mit dem die benutzte Refraction, welche hier auf den Radau'schen Tafeln, also der Bessel'schen Refractionsconstante (Tab. Reg.) beruht, zu multipliciren ist, um die den Beobachtungen entsprechende zu erhalten,

so hat man die Beziehung

$$\delta - \delta' = -2\Delta\varphi \mp rn - r'n \quad \begin{cases} \text{obere Culm. nördl. v. Zenith} \\ \text{obere Culm. südl. v. Zenith} \end{cases}$$

oder wenn $-2\Delta\varphi = x$, $-100\,n = y$ gesetzt wird:

$$\delta - \delta' = x + y\frac{\pm r + r'}{100}.$$

Die hiesigen Beobachtungen gestatteten die Aufstellung von 76 solcher Gleichungen; die Zenithdistanzen in unterer Culmination geben von 43°6′ bis 88°49′, die Factoren $\pm r + r$ von 100″ bis 1420″. Die Auflösung ergab

$$x = -0\overset{''}{.}797, \qquad y = +0.510. \tag{1}$$

Die starke Verminderung der Bessel'schen Refractionsconstante, die sich in diesem Werth von y ausspricht, ist zwar auch schon durch die Discussion anderer neuerer Beobachtungsreihen gefunden worden, muss aber doch mit grosser Vorsicht aufgenommen werden. Wenn man nämlich die Bedingungsgleichungen in zwei Gruppen theilt, von denen die erste bis 76° Z.D. reicht, die andere bis in die Nähe des Horizontes, so ergibt die Auflösung der ersten Gruppe

$$x = -0''047, \qquad y = -0.028 \tag{2}$$

und die der zweiten

$$x = -0''575, \qquad y = +0.483. \tag{3}$$

Da die Resultate dieser beiden Auflösungen auf keine Weise zu vereinigen sind, hätte man zu schliessen, dass bei den grösseren Zenithdistanzen noch andere Factoren wirksam sind, als die bisher in Betracht gezogenen. Man wird zunächst den Grund der Missstimmung in der nicht völlig zutreffenden Hypothese über die Temperaturabnahme in der Atmosphäre suchen, von der ausschliesslich die Beobachtungen von 76° Z.D. ab beeinflusst werden, während bekanntlich die Refractionen bis 76° Z.D. von jeder Annahme über die Constitution der Atmosphäre völlig unabhängig sind. Den Radau'schen Tafeln liegt die Ivory'sche Hypothese zu Grunde mit dem Factor $f = 0.2$; nimmt man den wahren Werth von f zu $\frac{2+z}{10}$ an, so wird die durch z herbeigeführte Aenderung der Refraction gleich $-\lambda z$, wo der Factor λ der Radau'schen Tafel V entnommen werden kann, und die Bedingungsgleichungen erhalten folgende Form:

$$\delta - \delta' = x + y\,\frac{\pm r \pm r'}{100} + \lambda z.$$

Werden sie neu aufgelöst, so ergibt sich

$$x = -0''828, \quad y = +0.527, \quad z = -0.053, \tag{4}$$

woraus durch Vergleichung mit (1) zu erkennen ist, dass durch die Einführung von s eine wesentliche Verbesserung der Darstellung der Beobachtungen nicht erzielt wird, und zugleich, dass die Constante $f = 0.2$ der Ivory'schen Hypothese völlig den Beobachtungen entspricht. Also auch durch eine andere Annahme über f ist die Missstimmung zwischen den beiden Gruppen nicht zu beseitigen.

Man wird weiter daran denken, dass bei den tieferen Culminationen das Sternbild in ein Spectrum auseinandergezogen erscheint, und dass man den Brechungsexponenten für weisses Licht, den die höheren Culminationen liefern, aus ihnen nur dann erhalten wird, wenn man eine ganz bestimmte Stelle des Spectrums einstellt. Um hier klar zu sehen, wollen wir die Brechungsexponenten aus den Auflösungen (2) und (3) ableiten. Dieselben finden sich, reducirt auf 760 mm Quecksilberdruck, 0° C Temperatur und 6 mm Dampfdruck zu

aus (2)	1.000 2933
aus (3)	1.000 2918

Vergleicht man damit die Resultate, welche Kayser und Runge (a. a. O.) aus physikalischen Bestimmungen für die hier in Betracht kommenden Fraunhofer'schen Linien erhalten haben (für denselben Luftzustand):

A	1.000 2902
B	2908
C	2911
D	2919
E	2930
F	2940

so erkennt man, dass der Werth aus (2) in Grün liegt; der Werth aus (3) dagegen würde darauf hindeuten, dass bei den Beobachtungen der tiefer culminirenden Sterne die Ein-

stellung an der Grenze zwischen Roth und Gelb erfolgte. Es würde dies im Einklang stehen mit der Wahrnehmung, dass die Sternspectra, wenn sie deutlich sichtbar waren, immer nur rothe und gelbe Strahlen zeigten; in den weitaus zahlreichsten Fällen, wo das Sternbild sich als verwaschener Fleck darstellte, würde also die Einstellung nicht auf Gelb, wie beabsichtigt war, sondern auf eine Stelle zwischen Roth und Gelb erfolgt sein. Der Unterschied zwischen den Auflösungen (2) und (3) liesse sich damit erklären, zugleich aber wäre damit der Nachweis erbracht, dass tiefer culminirende Sterne, sobald ihr Spectrum eine gewisse Ausdehnung erreicht, überhaupt nicht mehr zur Ermittelung der Refractionsconstante herbeigezogen werden dürfen, wenn man nicht etwa Mittel besitzt, ganz bestimmte Stellen des Spectrums einzustellen, was vielleicht durch Blendgläser von genau bestimmten Spectralfarben zu erreichen wäre. Lässt man diese Erklärung als stichhaltig gelten, so hängt die Ermittelung der bei astronomischen Beobachtungen zu gebrauchenden Refractionsconstante jetzt von der Bestimmung der grössten Zenithdistanz ab, die man noch beiziehen darf, ohne über die unbekannte Constitution der Atmosphäre eine Hypothese machen zu müssen und ohne durch die Ausdehnung des Spectrums in Unsicherheit über den eingestellten Punkt zu gerathen. Man leitet leicht ab, dass diese Grenze bei etwa 80° Z.D. liegt; zieht man aber dieser Ueberlegung folgend nur die Sterne bis 80° Z.D. zur Bestimmung der Refractionsconstante heran, so erhält man folgendes Auflösungssystem

$$x = -0''.685, \qquad y = +0.442 \tag{5}$$

das so nahe mit (1) übereinstimmt, dass das Bedenken, das wir oben gegen (1) äusserten, nämlich dass gerade die genauesten Beobachtungen bis 76° Z.D. wesentlich besser durch die umgeänderte Bessel'sche Refractionsconstante dargestellt

werden als durch eine kleinere, fortbesteht und durch die eben versuchte Erklärung als nicht beseitigt gelten kann.

Wenn wir fortgesetzt die Ursache dieser Missstimmung in der Refraction suchen, so bleibt, so weit ich sehe, jetzt nur mehr die Refraction durch den Beobachtungsraum, herrührend von der Verschiedenheit der inneren und äusseren Temperatur übrig, deren Einfluss die widersprechenden Resultate beseitigen könnte. Dieselbe soll jetzt untersucht werden. Beachtet man, dass in dem Ausdruck der Refraction

$$R = \int_1^{\mu_0} \frac{\sin z}{\sqrt{\frac{\mu r}{\mu_0 r_0} - \sin z^2}} \cdot \frac{d\mu}{\mu} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \text{Brechungsindex}, \\ r = \text{Abstand der Schicht} \\ \quad \text{vom Erdmittelpunkt} \end{array} \right.$$

der Quotient $\frac{\mu r}{\mu_0 r_0}$ so nahe gleich 1 ist, dass man ihn behufs Ermittelung eines ersten Näherungswerthes von R damit identificiren darf, so ergibt sich als solcher

$$(R) = tg\, z \int_1^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mu} = tg\, z \text{ log. nat. } \mu_0$$

Hieraus ist ersichtlich, dass in der Hauptsache die Refraction lediglich von μ_0, d. h. von dem Zustande der Atmosphäre in der untersten Schicht abhängig ist. Dies weist darauf hin, dass gerade die Brechung in der letzten Schicht, wenn der Lichtstrahl in das Fernrohr eintritt, die massgebende ist, d. h. also die Schicht im Beobachtungsraum. Die Folge hievon wäre, dass man der Berechnung der Refraction die innere Temperatur zu Grunde legen muss und nicht die äussere. Natürlich kann dies nicht dadurch geschehen, dass man die innere statt der äusseren Temperatur setzt, weil durch die Begrenzung des Beobachtungsraumes der Parallelismus der Schichten gestört wird. Ich glaube, dass durch

die folgende Entwickelung wenigstens eine erste Näherung an die wahre Erscheinung angebahnt ist.

Der Lichtstrahl trifft in einer gewissen Richtung, die abhängig ist von der Temperatur im Freien, an der Grenzfläche ein, in der die äussere Temperatur in die innere übergeht. An dieser Grenzfläche findet eine neue Brechung statt, deren Betrag zu rechnen ist. Hiezu ist die Kenntniss der Grenzfläche nothwendig; dieselbe wird sich mehr oder minder der Begrenzung des Beobachtungsraumes anschliessen, da man annehmen muss, dass durch die Ausstrahlung der Wände die innere Temperatur bedingt ist. Jedenfalls kann man zur Durchführung einer ersten Näherung eine andere Annahme gar nicht machen, da die im Saal vertheilten 5 Thermometer innerhalb sehr enger Grenzen übereinstimmten. Legt man also diese Hypothese zu Grunde, so ist zu unterscheiden, ob der Strahl auf die obere Begrenzungsebene oder auf eine Seitenebene fällt. Die obere kann als parallel der allgemeinen Schichtung angenommen werden und die Brechung wird sich hier also nach demselben Gesetz vollziehen, wie an den anderen Schichten. Sind z' und z_0 die Zenithdistanzen des äusseren und des gemessenen Strahles, μ' und μ_0 die Brechungsindices der äusseren und der inneren Luft, ϱ' und ϱ_0 deren Dichtigkeiten, so ist nach dem Snellius'schen Gesetz

$$\frac{\sin z'}{\sin z_0} = \frac{\mu_0}{\mu'} = \sqrt{\frac{1+2c\varrho_0}{1+2c\varrho'}}$$

oder

$$\frac{\sin z_0^2 - \sin z'^2}{\sin z_0^2} = 2\alpha'\left(1 - \frac{\varrho_0}{\varrho'}\right),$$

wenn mit α' die Refractionsconstante $\frac{c\varrho'}{1+2c\varrho'}$ bezeichnet wird. Setzt man ferner

$$z_0 - z' = R,$$

und

$$1-\frac{\varrho_0}{\varrho'}=\frac{m\,(t_0-t')}{1+m\,t_0}\quad\begin{cases}m = \text{Ausdehnungscoefficient d. Luft,}\\ t_0 = \text{innere Temperatur,}\\ t' = \text{äussere Temperatur,}\end{cases}$$

so wird mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen von R_s

$$R_s=\left(\frac{m\,a'}{1+m\,t_0}\,tg\,z_0\right)(t_0-t')$$

Da die erste Klammer der Temperaturcoefficient ist, so ist ersichtlich, dass man die Brechung im Beobachtungsraum einfach dadurch berücksichtigen kann, dass man statt der Aussentemperatur die innere nimmt. Anders gestaltet sich der Ausdruck für eine Seitenwand; hier findet die Brechung senkrecht zur bisherigen Richtung statt und der Ansatz wird

$$\frac{\cos z'}{\cos z}=\frac{\mu_0}{\mu'},$$

aus dem sich ebenso wie oben der Ausdruck

$$R_s=-\left(\frac{a'm}{1+m\,t_0}\,tg\,z_0\right)cotg\,z_0^2\,(t_0-t')$$

ableitet. Die Brechung hat aber hier ihr Maximum oben und gegen den Horizont zu wird sie verschwindend. Ist

z die wahre Zenithdistanz, also jene Grösse, die in letzter Linie gesucht wird,

z' die scheinbare Z.D., mit der der Strahl an der Begrenzungsebene des Spaltes ankommt,

R die Refraction gerechnet mit der äusseren Temperatur,

z_0 die gemessene Zenithdistanz,

R_s die durch die eben abgeleiteten Formeln gegebene Refraction im Beobachtungsraum,

so hat man
$$z = z' + R$$
$$z' = z_0 - R_s$$
und daher
$$z = z_0 + R - R_s$$

$z_0 + R$ sind die wahren Zenithdistanzen, aus denen wir bis jetzt die Declinationen abgeleitet haben; von ihnen müssen also, um sie von dem Einfluss der Saalrefraction zu befreien, noch die R_s subtrahirt werden. Geschieht dies für unsere Beobachtungen, so erhält man neue $\delta - \delta'$ und damit neue Bedingungsgleichungen, deren Auflösung jetzt ergibt:

$$x = -1''018, \quad y = +0.553, \quad z = +0.033, \quad (6)$$

während, wenn nur die Sterne bei 76° Z.D. behandelt werden,

$$x = -0''912, \quad y = +0.445 \quad (7)$$

erfolgt.

Man erkennt, dass jetzt ein Widerspruch zwischen den Resultaten aus den kleineren und den grösseren Zenithdistanzen nicht mehr besteht. Ein zwingender Beweis dafür, dass unsere Behandlung der Saalrefraction die sachgemässe ist, ist zwar damit nicht erbracht, allein da eine andere Möglichkeit, den genannten Widerspruch zu beseitigen, nicht mehr ersichtlich ist und eine andere Behandlung der Saalrefraction mit den vorliegenden Mitteln nicht durchführbar ist, so denke ich, dass man sich mit dem erhaltenen Resultat beruhigen kann.

Zur endgiltigen Ermittelung der Refractionsconstante ist nun an die Beobachtungen noch die Correction anzubringen, die wir oben als nothwendig erkannten, nämlich wir haben statt mit der optischen mit der physikalischen Dichtigkeit der Luft zu reduciren. Geschieht dies, so ergiebt die Auflösung aller Gleichungen zusammen

$$x = -1''036, \quad y = +0.563 \quad (8)$$

und jener bis 76° Zenithdistanz

$$x = -0''952, \qquad y = +0.491 \tag{9}$$

Wir betrachten die Auflösung (8) als die definitive und ziehen aus ihr nunmehr die Resultate. Für 718 mm (bei 0° C) Quecksilberdruck, + 5° C Temperatur und 6 mm Dampfdruck wird die den Radau'schen Tafeln zu Grunde liegende Bessel'sche Refractionsconstante: 56''076; diese Zahl erheischt die Correction $-56''076 \times 0.00563 = -0''315$ und es wird daher aus ihr 55''761; das gibt für 760 mm Quecksilberdruck (bei 0° C Quecksilbertemperatur), 0° C Lufttemperatur und 6 mm Dampfdruck:

$$60''104.$$

Den mittleren Fehler dieser Grösse habe ich zu ± 0''025 ermittelt. Ihr entspricht der Brechungsindex für denselben Luftzustand:

$$1.00029152 \pm 0.00000012$$

Die Correction der Polhöhe, die natürlich fast ausschliesslich von der Correction der Refractionsconstante abhängig ist, wird

$$\Delta\varphi = +0''518 \pm 0''056$$

und da wir als mittleren Werth der Polhöhe + 48° 8′ 45''05 der Rechnung zu Grunde legten, so wird der definitive Werth

$$+48^{\circ}\,8'\;45''57.$$

Es ist versucht worden, die angestellten Refractionsbeobachtungen in sehr geringen Höhen noch nach einer anderen Richtung hin nutzbar zu machen. Man begegnet nämlich nicht selten der Meinung, dass man durch astronomische Refractionsbeobachtungen Aufschluss über die Temperaturvertheilung in den obersten Schichten der Atmo-

sphäre erhalten könne. Es ist dies nur sehr beschränkt der Fall. Denn der Einfluss des Gesetzes der Temperaturvertheilung auf die Refraction wird weit überwogen durch andere Factoren, deren genaueste Kenntniss vorausgehen müsste, ehe man sich mit einiger Sicherheit über jenes Gesetz aussprechen könnte; solche Factoren sind die Refractionsconstante selbst und ihre Abhängigkeit vom eingestellten Punkt des Sternspectrums, der Ausdehnungscoefficient der Luft, die Luftfeuchtigkeit und vor Allem die Temperatur der untersten Luftschichten. Aber auch, wenn es gelungen ist, die Einflüsse dieser Factoren zu trennen und zu bestimmen, bleibt der Spielraum, den die Refractionsbeobachtungen jenem Gesetz gestatten, noch ein weiter. Die vielen Rechnungen, die Herr Radau hierüber mitgetheilt hat, setzen dies ausser allen Zweifel; ich habe trotzdem anfangs geglaubt, durch recht zahlreiche und scharfe Beobachtungen in niederen Höhen, einigen Aufschluss zu erlangen; es ist dies aber nicht in Erfüllung gegangen. Man kann mit sehr verschiedenen Gesetzen die Beobachtungen noch darstellen, wenn man entsprechende Aenderungen an der Refractionsconstante vornimmt. Von den vielen Versuchen mit negativem Resultat ist in der Abhandlung jener ausführlicher dargestellt, der eine Entscheidung bringen sollte, ob die Ivory'sche oder die Gyldén'sche Ansicht über die Constitution der Atmosphäre den Wahrnehmungen besser entspreche. Es war aber nicht möglich, sich zu Gunsten einer derselben auszusprechen, obwohl die Verschiedenheit zwischen beiden nicht unbeträchtlich ist; stellt man beide Gesetze in derselben Form dar, so ist nach der Ivory'schen Hypothese $t_0 - t = 5^\circ\!.69\, h - 0^\circ\!.19\, h^2$ und nach der Gyldén'schen Hypothese $t_0 - t = 5^\circ\!.10\, h - 0^\circ\!.025\, h^2$, wo h die Höhe in Kilometern über dem Boden, t_0 und t die Temperaturen in den Höhen 0 und h bezeichnen. Betreff des Gesetzes der Temperaturabnahme wird man also immer auf meteorologische

Beobachtungen angewiesen sein und zwar hauptsächlich auf Beobachtungen im Luftballon. Die rege Thätigkeit der Luftschifffahrt-Vereine verspricht hier für die Zukunft gute Resultate; bis jetzt allerdings hat nur die ausserordentliche Veränderlichkeit des „Gesetzes“ constatirt werden können, namentlich für die Schichten bis etwa 2 km Höhe. Einige Nachtfahrten der Herren Professoren Sohncke und Finsterwalder haben für Höhen zwischen 300 m und 2000 m eine adiabatische Temperaturabnahme, also eine solche von 10° für 1 km in heiteren Sommernächten constatirt. Diesen raschen Temperaturabnahmen stehen jedoch vielfach, für die Nachtzeiten fast immer Temperaturumkehrungen, d. h. Zunahmen, namentlich in den Bodenschichten bis zu 300 m, entgegen. Soweit sich aus den wenigen bis jetzt vorliegenden systematischen Bearbeitungen Schlüsse ziehen lassen, scheint jedoch im grossen Mittel die Ivory'sche Hypothese bis zu 10 km das Richtige zu treffen. Darüber hinaus deuten die neuesten Hochfahrten des deutschen Vereines für Luftschifffahrt, die namentlich mit dem Registrirballon in bedeutende Höhen geführt haben, starke Abweichungen vom Ivory'schen Gesetz an, wogegen das Gyldén'sche Gesetz in ziemlicher Uebereinstimmung bleibt. Trotzdem bleibt für die Berechnung der Refraction die Ivory'sche Hypothese völlig ausreichend, weil der Einfluss der obersten Luftschichten bis zu Zenithdistanzen von 88° ein nahezu verschwindender ist; für sie sind lediglich die unteren Schichten massgebend und in diesen genügt die Ivory'sche Formel.

Wie schon oben erwähnt, ist für heitere Nächte, also gerade für jene Zeiten, in denen die meisten astronomischen Beobachtungen angestellt werden, eine Temperaturumkehr d. h. ein Maximum der Temperatur in mässiger Höhe als fast regelmässig bestehend constatirt worden. Sowohl zahlreiche nächtliche Ballonfahrten, als auch namentlich die Beobachtungen am Eiffelthurm in Paris haben dieses Maxi-

mum auf rund 2° C in 200 m Höhe festgelegt. Es ist für die Bestimmung der Refractionsconstante von grösster Wichtigkeit, den Einfluss eines solchen Maximums auf die Refraction kennen zu lernen. Durch eine Art mechanischer Quadratur habe ich die Differenzen berechnet, um welche das Vorhandensein der Temperaturumkehr die Refractionen gegenüber den normal gerechneten vergrössert, und gefunden:

z	Δ
74° 2′	+ 0.″06
79 4	+ 0.23
82 16	+ 0.63
84 7	+ 1.32
86 22	+ 5.08
87 56	+ 16.36

Diese Tabelle lehrt: 1) dass bis etwa 80° Z.D. der Einfluss der gewöhnlich beobachteten Temperaturinversionen auf die Refraction ein verschwindender ist, sodass man in der astronomischen Praxis, wo man schon aus anderen Gründen 80° Z.D. nur im Nothfalle überschreiten wird, darauf keine Rücksicht zu nehmen braucht; 2) dass unsere früher aufgestellten Differenzen $\delta - \delta'$, aus denen wir die Correction der Refractionsconstante abgeleitet haben, noch grösser würden, also eine noch stärkere Verkleinerung der Bessel'schen Refractionsconstante erheischen würden, wenn man die regelmässige Einwirkung einer Temperaturinversion auf die Beobachtungen annimmt.

Diese letztere Thatsache setzt uns meines Erachtens über das letzte Bedenken hinweg, das gegen eine Verkleinerung der Bessel'schen Refractionsconstante noch vorgebracht werden könnte. Es erscheint mir jetzt erwiesen, dass keine mit den meteorologischen Beobachtungen im Einklang stehende Constitution der Atmosphäre angenommen werden kann, welche die Differenzen $\delta - \delta'$ zu erklären im

Stande wäre. Dann aber bleibt nichts übrig als die Bessel-sche Refractionsconstante um den oben gefundenen Betrag zu verringern. Man wird sich um so leichter dazu entschliessen, die solange gebrauchte Constante zu verlassen, als eine ganze Reihe ausgezeichneter Beobachtungen an anderen Sternwarten zu einem ähnlichen Resultate führte. Ich stelle in der folgenden Tabelle die wichtigsten Bestimmungen zusammen. Hiebei ist die Refractionsconstante definirt durch

$$a = \frac{c\varrho}{1+2c\varrho},$$

wo ϱ die Dichtigkeit der Luft und c eine Constante ist, die mit dem Brechungsindex μ der Luft in der Beziehung

$$\mu^2 = 1 + 2c\varrho$$

steht; ferner sind alle Zahlen reducirt auf einen Luftzustand, der einem Quecksilberdruck von 760 mm bei 0° C Quecksilbertemperatur und der Schwere unter 45° Breite und Seehöhe, einer Lufttemperatur von 0° C und einer mittleren Luftfeuchtigkeit von 6 mm Dampfdruck entspricht.

	a	a''	μ
1. Bessel, Fund. Astr.	0.000 29244	60".320	1.000 29257
2. Bessel, Tab. Reg.	29302	440	29315
3. Tab. Pulkov.	29219	268	29232
4. Fuss.	29148	122	29161
5. Greenwich 1857—1865	29147	120	29160
6. Pulk. 1865	29190	209	29203
7. Greenwich 1877—1886	29182	192	29195
8. Pulkowa 1885	29117	058	29130
9. München	29139	104	29152

Grosses Interesse bietet die Vergleichung des auf astronomischem Wege gefundenen Brechungsexponenten der Luft mit

dem durch physikalische Methoden ermittelten. Die neueste und wohl zuverlässigste Bestimmung, die auch betreff ihrer Resultate ziemlich in der Mitte liegt zwischen den früheren besten Bestimmungen von Ketteler, Lorenz und Mascart, ist die schon oben citirte von den Herren Kayser und Runge. Diese finden durch eine photographische Methode für μ den Ausdruck

$$10^7(\mu - 1) = 2878.7 + 13.16\lambda^{-2} + 0.316\lambda^{-4},$$

wenn λ die Wellenlänge in Tausendsteln des mm bedeutet. Das Mittel aus den obigen astronomischen Beobachtungen mit Ausschluss der beiden Bessel'schen Werthe gibt:

$$a = 0.00029163, \quad a'' = 60''.153, \quad \mu = 1.00029176$$

Dieser astronomische Werth würde hiernach der Wellenlänge $\lambda = 0.601$ entsprechen. Umgekehrt findet man aus der Formel für die Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien folgende Werthe von μ:

	λ	μ
A	0.760	1.0002902
B	0.687	2908
C	0.656	2911
D	0.589	2919
E	0.526	2930
F	0.486	2940
Maximalintensität	0.575	2921

Hieraus würde folgen, dass bei astronomischen Beobachtungen nicht auf die Stelle der Maximalintensität des Spectrums eingestellt wird, sondern auf eine mehr gegen roth zu gelegene Stelle, nämlich etwa auf die Mitte zwischen den Linien *C* und *D*, die an der Grenze von Gelb und Roth liegt. Ob die Ursache hievon in der selectiven Extinction des Lichtes in der Atmosphäre zu suchen ist, wonach besonders bei starkem Wasserdampfgehalt der Luft die

blauen Theile des Spectrums stärker absorbirt werden als die rothen, muss bei dem Mangel an exacten Messungen hierüber dahingestellt bleiben. Die hiesigen Wahrnehmungen würden dafür sprechen, denn das Spectrum der Sterne zeigte fast ausnahmslos nur Gelb und Roth.

Mit der gefundenen Refractionsconstante und der davon abhängigen Polhöhe ist das Declinationssystem der gemessenen Sterne aufgestellt worden. Die Eigenthümlichkeiten der Reduction desselben, nämlich die Anwendung der auf einer neuen Analyse beruhenden Radau'schen Tafeln, die Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit und der Temperatur des Beobachtungsraumes und insbesondere der Gebrauch einer neuen, sowohl gegen die Bessel'sche als gegen die Gyldén-sche stark verminderten Refractionsconstante lassen von vorneherein starke systematische Unterschiede desselben gegen die bereits bekannten erwarten. Dieselben verschwinden, wie leicht zu zeigen war, vollständig, wenn mit den alten Mitteln reducirt wird; eine Ausnahme hievon besteht nur für die auf der südlichen Halbkugel der Erde beobachteten Sternkataloge; die Differenzen mit diesen sind systematisch, gleichviel ob mit der Bessel'schen oder einer verringerten Refractionsconstante reducirt wird; falls sich dieses Resultat bestätigt, wird man auch aus der Vergleichung von Beobachtungen, die auf der nördlichen und südlichen Halbkugel angestellt wurden, kein Kriterium für die Wahl der richtigen Refractionsconstante ziehen können.

Von den durchgeführten Vergleichungen der beiden Münchener Systeme M und M', von denen das erstere auf den Radau'schen Tafeln, das letztere auf der neuen Refractionsconstante beruht, soll hier nur jene mit dem Auwers-schen Fundamentalkatalog (*F. C.*) auszugsweise angeführt werden, weil sie auch die charakteristischen Merkmale der anderen wiedergibt.

Grenzen der Decl.	Mittl. Decl.	$M - F.C.$	$M' - F.C.$	Anz. d. Sterne
+ 88° 48′ ... + 81° 48′	+ 85° 0′	− 0″.19	− 0″.11	5
+ 78 7 ... + 70 59	+ 74 38	+ 0.31	+ 0.56	7
+ 69 59 ... + 62 37	+ 66 40	+ 0.22	+ 0.40	7
+ 62 7 ... + 58 51	+ 60 31	− 0.20	+ 0.15	7
+ 58 33 ... + 55 26	+ 57 4	+ 0.07	+ 0.54	9
+ 54 17 ... + 50 8	+ 52 10	− 0.09	+ 0.47	10
+ 49 58 ... + 48 22	+ 49 10	− 0.02	+ 0.49	10
+ 48 4 ... + 45 5	+ 46 37	+ 0.17	+ 0.69	10
+ 44 56 ... + 41 34	+ 43 18	+ 0.19	+ 0.78	15
+ 27 4 ... + 10 16	+ 14 42	− 0.34	+ 0.58	9
+ 9 22 . . + 2 41	+ 5 42	− 0.23	+ 0.85	11
− 0 8 ... − 15 34	− 8 9	− 0.15	+ 1.15	10
− 24 53 ... − 30 25	− 28 21	− 0.11	+ 1.64	6

Wie man sieht, würden die Differenzen $M - F.C.$ das jetzt als gesichert betrachtete Verhalten des $F.C.$, wonach seine südlichen Positionen vom Aequator ab, um $0''.50 - 0''.02\,\delta^0$ zu südlich wären, nicht bestätigen, wogegen die Differenzen $M' - F.C.$ eine Verschiebung des Systems nach Norden in noch erhöhtem Maasse verlangen würden. Es ist hieraus deutlich ersichtlich, in wie hohem Grade ein Declinationssystem von der Refractionsconstante abhängig ist und dass es einen geringen Fortschritt bedeutet, einen Wechsel des Declinationssystems eintreten zu lassen, wenn er nicht auf Grund gesicherter Annahmen über die Refractionsverhältnisse geschehen kann.

München, April 1894.

Beiträge zur Potentialtheorie.

Von **Walther Dyck.**

(Eingelaufen 6. Juli.)

I.

Ueber die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Functionensystems durch bestimmte Integrale.

Ein genaues Studium der Kronecker'schen Arbeiten über „Systeme von Functionen mehrer Variabeln" und die Beschäftigung mit den mannigfachen, schon von Kronecker hervorgehobenen Beziehungen derselben zu den hierhergehörigen fundamentalen Untersuchungen von Cauchy und Gauss, von Sturm und von Jacobi, sowie zu neueren Arbeiten zur Analysis situs und zur Gleichungstheorie hat mich zu einer näheren Auseinandersetzung jener gegenseitigen Beziehungen, zur Ausdehnung gewisser Formulirungen, sowie zur Verallgemeinerung einzelner Fragestellungen geführt, deren Resultate ich in einer Reihe kürzerer Berichte der hohen mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie vorzulegen mir erlauben möchte.

In dem gegenwärtigen Aufsatze handelt es sich um die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Systems von $n+1$ reellen Functionen von n reellen Veränderlichen mit Hilfe von bestimmten Integralen; die von Kronecker gegebene Integralformel ist als specieller Fall, die beiden Kronecker'schen Summenformeln zur Bestimmung der Charakteristik sind als Grenzfälle in jener Darstellung enthalten.

§ 1.
Darstellung der Charakteristik eines Functionen-Systems durch ein n-faches Integral.

Den Betrachtungen liegt zu Grunde das System von $(n+1)$ eindeutigen, reellen Functionen:

$$F_0, F_1, F_2, \ldots F_n \tag{1}$$

der n reellen unbeschränkt veränderlichen Grössen $z_1, z_2 \ldots z_n$; dabei setzen wir voraus, dass diese Functionen eine n-fach unendliche Anzahl sowohl positiver als negativer Werthe annehmen, dass sie im Allgemeinen stetig und nach den einzelnen Variabeln differentiirbar sind, dass keine der $n+1$ aus je n Functionen gebildeten Functionaldeterminanten zusammen mit den betreffenden Functionen für unendlich viele Werthsysteme der z verschwindet.

Wir führen jetzt $n+1$ neue, reelle, unbeschränkt veränderliche Grössen $x_0, x_1, \ldots x_n$, die wir, um uns zur Abkürzung geometrischer Sprechweise bedienen zu können, als „rechtwinklige Punkt-Coordinaten eines linearen $n+1$ dimensionalen Raumes L_{n+1}" bezeichnen und deuten wollen, und setzen:

$$\begin{aligned} x_0 &= F_0(z_1, z_2, \ldots z_n), \\ x_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_n), \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_n &= F_n(z_1, z_2, \ldots z_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Es definiren dann diese Gleichungen in unserem L_{n+1} eine n-dimensionale, geschlossene Mannigfaltigkeit M_n, deren Punkte durch die Gesammtheit aller reellen Werthsysteme der Parameter z_i ebenso, wie durch die zugehörigen Punktcoordinaten x_k bezeichnet sind.

Unter Zugrundelegung dieser Mannigfaltigkeit M_n im Raume der x_k definire ich:

I. Die Charakteristik K des Systems der Functionen $F_0, F_1, \dots F_n$ ist diejenige Zahl, welche angibt, wie oft die Mannigfaltigkeit M_n den Coordinatenanfangspunkt $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$ umgibt.

In § 2 wird bewiesen, dass die so definirte Zahl K identisch ist mit der Kronecker'schen Charakteristik.

Aus der Definition folgt sofort eine Darstellung der Zahl K mit Hülfe eines n-fachen Integrales, dessen Element eine directe Verallgemeinerung für das Element des „räumlichen Winkels" in der bekannten Gauss'schen Formel ist.[1])

Bildet man nämlich die M_n durch Centralprojection vom Coordinatenanfangspunkt aus auf die „n-dimensionale Kugeloberfläche" vom Radius 1

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \tag{3}$$

ab, so ist K die Anzahl der so erhaltenen Kugelbedeckungen.

Die Rechnung gestaltet sich folgendermassen:

Wir legen ein „parallelepipedisches" Element $d\Omega_n$ der Mannigfaltigkeit M_n durch einen Punkt

$$x_0, x_1, \dots x_n$$

und n Nachbarpunkte

$$x_0 + \overset{(i)}{d}x_0, \; x_1 + \overset{(i)}{d}x_1, \dots \; x_n + \overset{(i)}{d}x_n$$

Nach den Formeln der n-dimensionalen Analytik hat man dann für den Inhalt dieses Elementes die Formel

---

[1]) Gauss, Werke Bd. V, „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte" und „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus". Man vergl. auch die von Schering veranlasste Dissertation von O. Boeddicker, „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen", auf die noch später Bezug zu nehmen sein wird.

$$4)\qquad d\,\Omega_n = \sqrt{\left\| \begin{matrix} d\overset{(1)}{x_0} & d\overset{(1)}{x_1} & d\overset{(1)}{x_2} & \dots & d\overset{(1)}{x_n} \\ d\overset{(2)}{x_0} & d\overset{(2)}{x_1} & d\overset{(2)}{x_2} & \dots & d\overset{(2)}{x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d\overset{(n)}{x_0} & d\overset{(n)}{x_1} & d\overset{(n)}{x_2} & \dots & d\overset{(n)}{x_n} \end{matrix} \right\|^2}$$

Hiebei ist in bekannter symbolischer Schreibweise unter dem Quadrate der Matrix die Summe der Quadrate ihrer Determinanten verstanden. Diese Determinanten selbst haben die Bedeutung des Inhaltes der Projectionen von $d\,\Omega_n$ auf die durch je n der Coordinaten x_i bezeichneten Coordinatenmannigfaltigkeiten. Das Verhältniss einer solchen Projection zum Elemente $d\,\Omega_n$ kann daher als Cosinus des Neigungswinkels der auf beiden errichteten Normalen bezeichnet werden. Es ergibt sich so z. B. für den Winkel der Normalen N gegen die Axe X_0:

$$5)\qquad \cos(N X_0) = \frac{\left| \begin{matrix} d\overset{(1)}{x_1} & d\overset{(1)}{x_2} & \dots & d\overset{(1)}{x_n} \\ d\overset{(2)}{x_1} & d\overset{(2)}{x_2} & \dots & d\overset{(2)}{x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d\overset{(n)}{x_1} & d\overset{(n)}{x_2} & \dots & d\overset{(n)}{x_n} \end{matrix} \right|}{\sqrt{\left| \begin{matrix} d\overset{(1)}{x_0} & d\overset{(1)}{x_1} & d\overset{(1)}{x_2} & \dots & d\overset{(1)}{x_n} \\ d\overset{(2)}{x_0} & d\overset{(2)}{x_1} & d\overset{(2)}{x_2} & \dots & d\overset{(2)}{x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d\overset{(n)}{x_0} & d\overset{(n)}{x_1} & d\overset{(n)}{x_2} & \dots & d\overset{(n)}{x_n} \end{matrix} \right|^2}}$$

Man hat weiter für den Cosinus des Winkels des Radiusvector R gegen die Axe X_0:

$$6)\qquad \cos(R X_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \dots x_n^2}} = \frac{x_0}{r}$$

und bildet hieraus sofort für $\cos(RN)$ die Formel

$$\text{7)} \qquad \cos(RN) = \sum_{i=0}^{i=n} \cos(RX_i) \cdot \cos(NX_i)$$

Bezeichnet jetzt $d\omega_n$ die Centralprojection von $d\Omega_n$ auf die Einheitskugel, so ist

$$\text{8)} \qquad d\omega_n = d\Omega_n \cdot \cos(RN) \cdot \frac{1}{r^n},$$

wo der letzte Factor die Reduction des Elementes auf die Einheitskugel bewirkt.

Man erhält sonach unter Benützung der vorigen Beziehungen für $d\omega_n$ die Formel:

$$\text{9)} \qquad d\omega_n = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \overset{(1)}{dx_0} & \overset{(1)}{dx_1} & \overset{(1)}{dx_2} & \dots & \overset{(1)}{dx_n} \\ \overset{(2)}{dx_0} & \overset{(2)}{dx_1} & \overset{(2)}{dx_2} & \dots & \overset{(2)}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n)}{dx_0} & \overset{(n)}{dx_1} & \overset{(n)}{dx_2} & \dots & \overset{(n)}{dx_n} \end{vmatrix}}{\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}^{\,n+1}}$$

Zur Umsetzung dieser Formel in die Parameter z wähle man die n Nachbarpunkte $x_\sigma + \overset{(i)}{dx_\sigma}$ so, dass

$$\text{10)} \qquad \overset{(i)}{dx_\sigma} = F_{\sigma i}\, dz_i,$$

(wobei durch den zweiten Index bei F_σ die partielle Ableitung nach dem Parameter z_i bezeichnet ist), man schreite also auf den „Parameterlinien" der Mannigfaltigkeit M_n vorwärts.

Es ergibt sich dann für das auf M_n definirte Element $d\Omega_n$ die Formel:

$$11)\qquad d\Omega_n = \sqrt{\begin{matrix} F_{01} & F_{11} & F_{21} & . & . & F_{n1} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} & . & . & . & F_{n2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ F_{0n} & F_{1n} & F_{2n} & . & . & . & F_{nn} \end{matrix}^{\,2}}\; dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

und ebenso lassen sich sofort die Formeln für $\cos(RN)$ und r in den z_i schreiben.

Bezeichnet man noch durch $\tilde{\omega}_n$ die Oberfläche der Kugel vom Radius 1

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

so ergibt sich:

II. Die Charakteristik K des Systems der Functionen $F_0, F_1, \ldots F_n$, dargestellt als Windungszahl der Mannigfaltigkeit M_n um den Nullpunkt, ist gegeben durch das n-fache Integral

$$12)\qquad K = \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \cdot \int d\omega_n =$$

$$= \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \ldots & F_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2}^{\,n+1}}\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_n.$$

Das Integral ist dabei erstreckt über das gesammte Werthesystem der reellen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$, denn dieses Werthesystem ist im Allgemeinen den Punkten $x_0, x_1, \ldots x_n$ unserer Mannigfaltigkeit M_n umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Die Formel macht unmittelbar die Gleichberechtigung der Functionen $F_0, F_1, \ldots F_n$ ersichtlich.

Das Vorzeichen der Charakteristik K ist an eine bestimmte Reihenfolge der Functionen geknüpft und wechselt bei Vertauschung von je zweien derselben.

§ 2.

Die Kronecker'sche Summenformel.

Man entnimmt der vorstehenden Formel (12) sofort:

Die Elemente des Integrals werden nach dem Vorzeichen der Zählerdeterminante summirt. Dieses Vorzeichen aber unterscheidet die beiden Seiten der Mannigfaltigkeit M_n gesehen vom Coordinatenanfangspunkte aus, insoferne die gleich Null gesetzte Determinante die Bedingung für den „berührenden Kegel" vom Coordinatenanfangspunkt nach der M_n darstellt.[1])

Ein beliebiger, vom Coordinatenanfangspunkt auslaufender Strahl durchsetzt die Mannigfaltigkeit M_n in einer Anzahl von Punkten, die wir nach dem Vorzeichen der Determinante unterscheiden.

Zählt man nun diese Schnittpunkte dem Vorzeichen entsprechend je mit $+1$ bez. -1 gerechnet ab, so erhält man eine Zahl, die unabhängig ist von der speciellen Richtung des gewählten Strahles und also giltig für die Gesammtheit aller Strahlen, welche die Elemente der M_n auf die Einheitskugel projiciren.

Die Zahl gibt somit eben die Anzahl der Bedeckungen der Einheitskugel an und ist demnach identisch mit der in I. definirten Charakteristik K.

Bildet man aber andererseits speciell für einen der Axenstrahlen, z. B. für die positive Axe X_n

$$x_0 = 0, \; x_1 = 0, \ldots \; x_{n-1} = 0, \; x_n > 0$$

[1]) Das im Allgemeinen stets vorhandene Auftreten von Selbstdurchsetzungen unserer M_n (längs Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen) hindert die Bestimmung der „Flächenseite" durch jenes Vorzeichen nicht.

die algebraische Summe über die Schnittpunkte mit M_n, so folgt:

$$13)\qquad K = \sum \text{sign.} \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{n-11} & F_{n-12} & \dots & F_{n-1n} \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \sum \text{sign.} (\Delta_n)$$

wo Δ_n die Functionaldeterminante der $F_0, F_1, \dots F_{n-1}$ bezeichnet und die Summe sich erstreckt über die Punkte

$$F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots\ F_{n-1} = 0,\ F_n > 0.$$

Die so gewonnene Formel ist abgesehen vom Vorzeichen identisch mit der von Kronecker für die Charakteristik des Functionensystems gegebenen.

Addirt man die beiden für die positive und für die negative Halbaxe X_n aufgestellten Summenformeln, so folgt

$$14)\qquad 2K = (-1)^n \sum \text{sign.} (F_n \cdot \Delta_n)$$

die Summe erstreckt über alle Punkte

$$F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots\ F_{n-1} = 0,$$

die zweite Kronecker'sche Summenformel.

§ 3.

Weitere Darstellungen der Charakteristik durch vielfache Integrale.

Neben den ersten Integralausdruck für die Charakteristik unseres Functionensystems stellen sich eine Reihe weiterer mit Hilfe des aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen direct folgenden Satzes:

III. Jeder „lineare Schnitt"

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0, \ldots x_k = 0$$

der Mannigfaltigkeit M_n, der also eine Mannigfaltigkeit M_{n-k-1} von $n-k-1$ Dimensionen im linearen Raume L_{n-k} der $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n$ definirt, ist ebenso oft wie M_n selbst um den Nullpunkt gewunden.

Es ergibt sich aus diesem Satze die Darstellung von K durch ein $(n-1)$-faches, $(n-2)$-faches, ... $(n-k-1)$-faches, ... 2-faches, 1-faches Integral und schliesslich fliesst aus ihr als Grenzfall die Darstellung mit Hilfe einer Summenformel. Die letztere ist die von Kronecker für die Charakteristik aufgestellte Summenformel, und ebenso ist das $(n-1)$-fache Integral eben das von Kronecker hergeleitete.[1])

Für die Herstellung des durch den Satz III bezeichneten Integralausdruckes für die Charakteristik sind wesentlich dieselben Ueberlegungen massgebend wie bei den in § 1 gegebenen Formulirungen. In der durch

---

[1]) Kronecker benützt zur Ableitung dieses $(n-1)$-fachen Integrales unter Auszeichnung der Function F_0 die Abbildung des „Raumes der $z_1, z_2, \ldots z_n$" auf den Raum der $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch

$$x_1 = F_1,\ x_2 = F_2, \ldots x_n = F_n;$$

die reellen Punkte z_i des Raumes der z sind dabei eindeutig auf reelle Punkte x_i abgebildet, aber umgekehrt entsprechen den Punkten x_i im Allgemeinen verschiedene Punkte z_i. Die Function $F_0(z_1, z_2, \ldots z_n)$ geht bei der Abbildung über in $\Phi_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$, und dabei ist die Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ ihrerseits umkehrbar eindeutig auf $\Phi_0 = 0$ bezogen. Die Anzahl der Windungen von $\Phi_0 = 0$ (also in der obigen Bezeichnung des Schnittes der M_n mit $x_0 = 0$) um den Nullpunkt ist dann die gesuchte Charakteristik.

Dadurch, dass in der oben gewählten Form der Definition und Herleitung der Charakteristik jede Auszeichnung einer der Functionen des Systems vermieden ist, werden die Formulirungen allgemeiner und übersichtlicher. Der Satz von der Unveränderlichkeit der Charakteristik bei Vertauschung der Functionen des Systems ist direct gegeben.

15)
$$\begin{aligned}
x_0 &= F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
x_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
x_k &= F_k(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0; \\
x_{k+1} &= F_{k+1}(z_1, z_2 \ldots z_n), \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= F_n(z_1, z_2, \ldots z_n)
\end{aligned}$$

gegebenen M_{n-k-1} bestimmen wir ein $(n-k-1)$-dimensionales Element $d\Omega_{n-k-1}$ durch einen Punkt $x_{k+1} \ldots x_n$ und $n-k-1$ Nachbarpunkte

$$x_{k+1} + \overset{(i)}{d}x_{k+1}, \; x_{k+2} + \overset{(i)}{d}x_{k+2}, \ldots \; x_n + \overset{(i)}{d}x_n$$

Der Inhalt des Elementes $d\Omega_{n-k-1}$ ist somit analog wie oben gegeben durch:

16) $$d\Omega_{n-k-1} = \sqrt{\begin{Vmatrix} \overset{(1)}{d}x_{k+1} & \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(1)}{d}x_n \\ \overset{(2)}{d}x_{k+1} & \overset{(2)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(2)}{d}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+1} & \overset{(n-k-2)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(n-k-1)}{d}x_n \end{Vmatrix}^2}$$

und für die Centralprojection dieses Elementes auf die Einheitskugel

$$x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

ergibt sich

17) $$d\omega_{n-k-1} = \frac{\begin{vmatrix} x_{k+1} & x_{k+2} & \ldots & x_n \\ \overset{(1)}{d}x_{k+1} & \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(1)}{d}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+1} & \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+2} & \ldots & \overset{(n-k-1)}{d}x_n \end{vmatrix}}{\sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots x_n^2}^{\,n-k}}$$

Führen wir jetzt in der Mannigfaltigkeit M_{n-k-1} die Parameter $z_1, z_2, \ldots z_{n-k-1}$ als unabhängige, die übrigen als durch die Gleichungen $F_0 = 0$, $F_1 = 0, \ldots F_k = 0$ von ihnen abhängige Parameter ein, so kann man setzen:

$$18) \qquad 0 = \left[F_{\sigma i} + \sum_{\mu=n-k}^{\mu=n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i}\right] dz_i$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots k; \quad i = 1, 2, \ldots n-k-1$$

$$19) \qquad \overset{(i)}{dx_\sigma} = \left[F_{\sigma i} + \sum_{\mu=n-k}^{\mu=n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i}\right] dz_i$$

$$\sigma = k+1, \ldots n; \quad i = 1, 2, \ldots n-k-1$$

Aus den Gleichungen (16) folgt

$$20) \qquad \frac{\partial z_\mu}{\partial z_i} = \frac{\overset{(i)}{D_\mu}}{D},$$

wo D die aus den letzten $k+1$ Verticalreihen der Matrix

$$21) \quad M = \begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-k-1} & F_{0\,n-k} & \ldots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-k-1} & F_{1\,n-k} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{k\,n-k-1} & F_{k\,n-k} & \ldots & F_{kn} \end{Vmatrix}$$

gebildete Determinante ist, und $\overset{(i)}{D_\mu}$ diejenige, welche aus D durch Ersetzen der Verticalreihe mit dem Index μ $(\mu = n-k, \ldots n)$ durch die Verticalreihe mit dem Index i $(i = 1, 2, \ldots n-k-1)$ entsteht.

Es kann nunmehr jede Determinante der Matrix der dx (Formel 16) dargestellt werden als symbolisches Product zweier Matrices.

So ist:

$$
22)\qquad (D)^{n-k-1}\cdot\begin{vmatrix} \overset{(1)}{d}x_{k+2} & \overset{(1)}{d}x_{k+3} & \dots & \overset{(1)}{d}x_n \\ \overset{(2)}{d}x_{k+2} & \overset{(2)}{d}x_{k+3} & \dots & \overset{(2)}{d}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+2} & \overset{(n-k-1)}{d}x_{k+3} & \dots & \overset{(n-k-1)}{d}x_n \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{Vmatrix} F_{k+21} & F_{k+22} & \dots & F_{k+2n} \\ F_{k+31} & F_{k+32} & \dots & F_{k+3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} D & 0 & \dots & 0 & \overset{(1)}{D}_{n-k} & \overset{(1)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(1)}{D}_n \\ 0 & D & \dots & 0 & \overset{(2)}{D}_{n-k} & \overset{(2)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(2)}{D}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D & \overset{(n-k-1)}{D}_{n-k} & \overset{(n-k-1)}{D}_{n-k+1} & \dots & \overset{(n-k-1)}{D}_n \end{Vmatrix} \cdot dz_1\, dz_2 \dots dz_{n-k-1}.
$$

Die zweite dieser Matrices ist correspondirende Matrix zu der in Formel (21) gegebenen. Der Factor, um welchen sich je die entsprechenden Determinanten unterscheiden ist, D^{n-k-2}. Das Matrixproduct kann demnach in der Form geschrieben werden:

$$23)\qquad D^{n-k-2}\cdot\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+21} & F_{k+22} & \dots & F_{k+2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

Für das Oberflächenelement 17) auf der Einheitskugel ergibt sich hieraus durch eine einfache Zusammenziehung die Formel

$$24)\qquad d\omega_{n-k-1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+11} & F_{k+12} & \dots & F_{k+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n} & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{D\cdot\sqrt{F_{k+1}^2+\dots F_n^2}^{\,n-k}}\cdot dz_1\, dz_2 \dots dz_{n-k-1}$$

Führt man nun an Stelle von $z_1, z_2, \dots z_{n-k-1}$ andere Parameter z, also $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_{n-k-1}}$ ein, so erhält man für $d\omega_{n-k-1}$ eine analoge in den Differentialen

$$dz_{i_1}\; dz_{i_2} \dots dz_{i_{n-k-1}}$$

geschriebene Formel, in welcher die obige Determinante D der Matrix (21) ersetzt ist durch die Determinante D_i, welche durch Streichen der Verticalreihen mit den Indices $i_1, i_2, \dots i_{n-k-1}$ entsteht.

Jetzt fasse man die Ausdrücke

$$25)\qquad do_{n-k-1} = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2}}{D_i}\, dz_{i_1}\, dz_{i_2} \dots dz_{i_{n-k-1}}$$

als Elemente für die Integration in den z auf,[1]) so kann man den Integralausdruck für die Charakteristik in folgender allgemeiner Formel zusammenziehen:

$$26)\qquad K = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n-k-1}} \int^{*} \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2 + \dots + F_n^2}^{\,n-k} \sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2}}\, do_{n-k-1}$$

---

[1]) Deuten wir diese Formel, wovon später noch zu handeln sein wird, im linearen Raume rechtwinkliger Coordinaten $z_1, z_2, \dots z_n$, so stellt $d\,o_{n-k-1}$ ein „Oberflächenelement" der Mannigfaltigkeit $F_0 = 0,\ F_1 = 0, \dots F_k = 0$ dieses Raumes dar, dessen Projection auf die Coordinatenmannigfaltigkeit der $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_{n-k-1}}$ durch $dz_{i_1}, dz_{i_2}, \dots dz_{i_{n-k-1}}$ gegeben ist, während $\frac{D_i}{\sqrt{M^2}}$ als „Cosinus des Neigungswinkels jener Elemente gegen einander" zu bezeichnen ist.

Hiebei bezeichnet $\tilde{\omega}_{n-k-1}$ die Oberfläche der Kugel

$$x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Die Integration ist zu erstrecken über die Gesammtheit aller reellen Werthesysteme der s, für welche

$$F_0 = 0, \; F_1 = 0, \ldots \; F_k = 0$$

ist. Löst man die Zählerdeterminante dieses Ausdruckes nach den Determinanten D_i der Matrix M (Gl. 19) auf und führt für jedes einzelne der so entstehenden Theilintegrale die nach Formel (23) entsprechenden $ds_{i_1} \ldots ds_{i_{n-k-1}}$ als unabhängige Differentiale ein, so erkennt man:

IV. Die Charakteristik K lässt sich darstellen durch eine Summe von $\binom{n}{n-k-1}$ $(n-k-1)$-fachen Integralen, deren Grenzen ausschliesslich von einem ersten Theil unserer Functionen, den gleich Null gesetzten Functionen:

$$F_0, \; F_1, \ldots \; F_k$$

abhängen, während die unter dem Integralzeichen stehenden Differentiale nur von den übrigen Functionen

$$F_{k+1}, \; F_{k+2}, \ldots \; F_n$$

abhängen. Die Abnahme der Ordnung der einzelnen Integrale vom n-fachen bis zum 0-fachen findet dabei in der Zunahme der Anzahl der Bedingungsgleichungen für die Grenzen von 0 bis n gewissermassen ihren Ausgleich.

Für $k = 0$ ergibt sich das von Kronecker gegebene $(n-1)$-fache Integral. Für $k = n-1$ folgt die in § 2 (Gl. 19) abgeleitete Summenformel.

Zunächst folgt nämlich:

$$K = (-1)^n \cdot \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \sum \frac{F_n \cdot \Delta_n}{\operatorname{abs}(F_n) \cdot \operatorname{abs}(\Delta_n)} \cdot \varepsilon,$$

wenn wir mit ε den Grenzwerth für die Grösse der diskreten Punkte, über welche die Summation erfolgt, bezeichnen. Als Inhalt der aus zwei Punkten bestehenden quadratischen Mannigfaltigkeit

$$x_n^2 = 1$$

folgt dann

$$\tilde{\omega}_0 = 2\,\varepsilon$$

und damit ergibt sich direct die Kronecker'sche Formel

$$K = (-1)^n \frac{1}{2} \sum \operatorname{sign}(F_n \Delta_n).$$

§ 4.

Verallgemeinerungen.

Die Darlegungen des § 2, welchen zufolge die Zahl K sich durch die dem Vorzeichen der Determinante

$$\begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

entsprechend erfolgende Summation der Schnittpunkte der M_n mit einem beliebigen Axenstrahl bestimmt, gestatten die folgende für manche Fragen nicht unwesentliche Verallgemeinerung unserer Integraldarstellungen.

V. Es ist keineswegs nothwendig, die in den vorstehenden Formeln gegebenen Integrale über das ganze Gebiet einer Mannigfaltigkeit M_{n-k-1} zu erstrecken, man kann sich vielmehr auch beschränken auf diejenigen Theile derselben, welche durch einen vom Coordinatenanfangspunkt auslaufenden, sonst ganz beliebigen Kegel begrenzt sind, wenn man nur den Divisor $\tilde{\omega}_{n-k-1}$ ersetzt durch den Inhalt des

von diesem Kegel auf der Einheitskugel ausgeschnittenen Gebietes.

So kann man z. B. das durch

$$x_0 = F_0 = 0, \; x_1 = F_1 = 0, \; \ldots \; x_k = F_k = 0$$

bezeichnete Integrationsgebiet einschränken durch eine beliebige Anzahl weiter zutretender Ungleichungen

$$x_{k+1} = F_{k+1} > 0, \quad x_{k+2} = F_{k+2} > 0, \; \ldots \quad x_l = F_l > 0;$$

$\tilde{\omega}_{n-k-1}$ ist dabei zu ersetzen durch $\frac{\tilde{\omega}_{n-k-1}}{2^m}$, wenn m die Anzahl der Ungleichungen ist.

Auf anderweite mögliche Verallgemeinerungen unserer Formeln, wie sie etwa durch Deformationen der Mannigfaltigkeit M_n herbeigeführt werden können und wie sie bei allen derartigen Betrachtungen der Analysis situs Platz greifen, gehe ich hier nicht ein.

Sitzung vom 15. Juni 1895.

1. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „Ueber den Nadelschuttepilz der Lärche, Sphaerella laricina n. sp."

2. Herr Alfred Pringsheim bringt einen Nachtrag zu dem in der Januarsitzung eingereichten Aufsatze: „Zum Cauchy'schen Integralsatz."

3. Herr Ferdinand Lindemann macht eine Mittheilung: „Ueber die conforme Abbildung eines Flächenstückes, das durch Parabeln mit gemeinsamer Axe begrenzt wird."

Derselbe legt ferner ein aus Vorder-Asien stammendes antikes Modell (Bronze-Guss) eines Archimedischen Körpers (Rhomben-Triakontaëder) vor.

Die Berichte über die beiden Mittheilungen erfolgen im nächsten Hefte.

4. Herr Adolf v. Baeyer berichtet über seine weiteren Untersuchungen: „Ueber das Kümmelöl." Die Resultate werden an einem anderen Orte veröffentlicht.

Der Nadelschüttepilz der Lärche, Sphaerella laricina n. sp.

Von **Robert Hartig.**

(*Eingelaufen 15. Juni.*)

Die europäische Lärche ist aus ihrem natürlichen Verbreitungsgebiete, den Alpen und Karpathen erst zu Anfang unseres Jahrhunderts in die Vorberge und in das Flachland Mittel- und Nord-Europas hinabgestiegen. Sie wurde zuerst versuchsweise in kleinen Beständen, dann in immer grösserer Ausdehnung angebaut und zwar mit dem besten Erfolge. Sie zeigte ein schnelles Wachsthum, völlige Gesundheit und Anspruchslosigkeit an den Standort. Da das Lärchenholz von hoher Güte ist und geeignet erscheint, in vieler Beziehung das Eichenholz zu ersetzen, so bildeten um die Mitte unseres Jahrhunderts die ausgedehnten Lärchenbestände einen wichtigen Bestandtheil der Bewaldung Deutschlands und der Nachbarstaaten. Im Norden Schottlands war die Wiederaufforstung fast ausschliesslich mit der Lärche durchgeführt.

Etwa vor nunmehr 50 Jahren traten zum ersten Male Erkrankungen an der bisher gutwüchsigen Lärche auf und diese nahmen so schnell zu und waren so verderblicher Art, dass heute nur noch Reste jener Lärchenbestände übrig sind und vielfach der Anbau dieser werthvollen Holzart ganz aufgegeben worden ist.

Die Krankheitserscheinungen waren der mannigfachsten Natur. Insectenbeschädigungen zumal durch die Minirmotte der Lärche (Coleophora laricella Hbn.) und die Lärchenblattlaus (Chermes Laricis Hartig) wurden leicht als solche erkannt, waren aber doch nur in seltenen Fällen von der Bedeutung, dass ein Absterben der Bestände durch sie herbeigeführt wurde. Man glaubte desshalb zuerst, dass das wärmere Klima der neuen Heimath der Pflanze ungünstig sei. Dagegen sprach aber der Umstand, dass die in den ersten Decennien begründeten Bestände sich des besten Wohlseins erfreuten, wogegen die später erzogenen Lärchen oft schon im Saat- oder Pflanzbeete erkrankten. Die Erkrankung äusserte sich entweder durch das Absterben krebsartig grösser werdender Rindenstellen oder durch ein frühzeitiges Absterben und Abfallen der Benadelung. Im Jahre 1880 gab ich eine ausführliche Bearbeitung des Lärchenkrebses[1]) in welcher ich auf Grund geglückter Infectionsversuche nachwies, dass ein parasitärer Rindenpilz (Peziza Willkommii m.), der in den Alpen seine Heimath hat, die Krankheit verursacht. In den Hochalpen vertrocknen die Früchte vor der Sporenreife, da bei klarem Himmel im Sommer die Luft ausserordentlich trocken ist. Nur in der Nähe der Seen und in engen Thälern kann dort der Parasit sich erhalten. In den Vorbergen und im Flachlande fanden sich weit günstigere Verhältnisse für die Entwicklung dieses Pilzes, in Folge dessen der Lärchenkrebs sich schnell von Süden nach Norden verbreiten konnte, sobald einmal kleinere und grössere Lärchenbestände überall vorhanden waren. Vor 10 Jahren wies ich dann nach,[2]) dass im Frühjahre ein Erkranken der Lärchennadeln

---

[1]) Die Lärchenkrankheiten, insbesondere der Lärchenkrebspilz, Peziza Willkommii R. Hartig. In Untersuchungen aus dem forstbotanischen Institut in München I 1880. Berlin. Springer.

[2]) Allgemeine Forst- und Jagdzeitung 1885, Seite 326.

zuweilen in ausgedehnterem Maasse durch einen Pilz, Caeoma Laricis m. hervorgerufen werde, der seine Entwicklung während der übrigen Jahreszeit auf den Blättern der Zitterpappel als Melampsora Tremulae durchläuft, also immer an die Nachbarschaft dieser Holzart gebunden ist. Desshalb kann aber diesem Parasiten keine sehr grosse Bedeutung beigemessen werden. Das allgemeine Erkranken der Benadelung, das sich oft schon im Juli einstellt und in ganz Deutschland als die wichtigste Ursache der allmählich zunehmenden Schwächung der Wuchskraft der Lärche zu bezeichnen ist, wurde bisher als Folge ungeeigneten Standortes, insbesondere allzugrossen Feuchtigkeitsgehaltes der Luft betrachtet. Man war der Ansicht, dass die Lärche in feuchter, dumpfer Luft nicht genügend zu transpiriren vermöge. Allerdings sprach schon im Jahr 1883 ein scharfsichtiger Beobachter, Forstmeister Beling in Seesen[1]) die Vermuthung aus, dass diese Blatterkrankung einen parasitären Charakter habe und von einem kleinen Nadelpilz veranlasst werde, doch wurde die Krankheit, ihr Entstehen und ihre Ursache nicht näher untersucht. Ich selbst habe die Krankheit bisher nicht in Arbeit nehmen können, weil mich andere Untersuchungen seit einer Reihe von Jahren vollauf in Anspruch nahmen.

Im vorigen nasskalten Jahre trat nun aber die Braunfleckigkeit der Lärchennadeln in so ausserordentlichem Maasse in den Waldungen Oberbayerns ein, dass schon Anfang August der grössere Theil der Lärchennadeln abgeworfen und im September manche Bäume fast völlig entlaubt waren. Bei einer Reise über Salzburg ins Salzkammergut fand ich die Erkrankung auch dort allgemein verbreitet. Am 26. September konnte ich auf der Schmittenhöhe (1935 m) bei Zell am See feststellen, dass mit der zunehmenden Berghöhe die Erkrankung abnahm und bei 1500 m etwa verschwand.

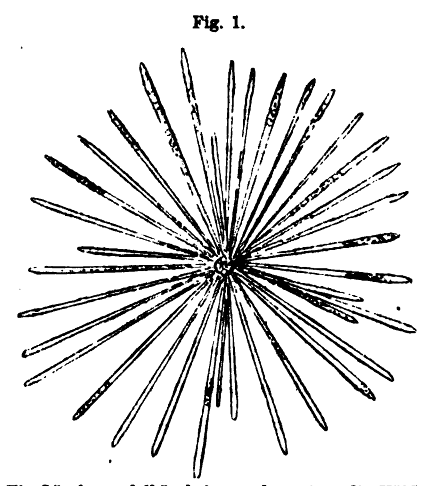
---

[1]) Allgemeine Forst- und Jagdzeitung, Jahrg. 1883.

In dieser Hochlage waren nur wenige Nadeln noch mit einzelnen braunen Flecken besetzt. Weiter aufwärts waren die Lärchen völlig gesund.

Die Krankheit äussert sich darin, dass die Nadeln der Lärche an einer oder an mehreren Stellen kleinere oder grössere braune Flecke bekommen. Die erkrankten Nadeln bleiben meist noch längere Zeit am Zweige sitzen und auf den Flecken treten sehr kleine schwarze Conidienpolster von 0.1—0.3 mm Grösse gruppenweise zusammenstehend auf (Fig. 1). Schon im Juli beginnt aber ein Abfallen der kranken und todten Nadeln, das sich besonders im unteren Theile der Baumkrone zu völliger Entnadelung steigern kann, wenn anhaltend nasses Wetter herrscht.

Fig. 1.



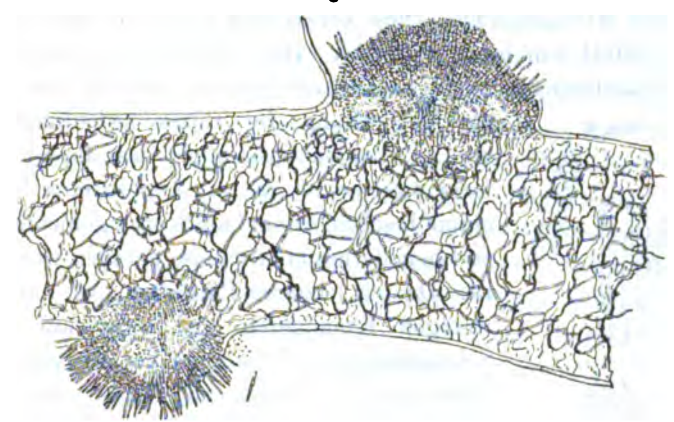
Ein Lärchennadelbüschel, an dem etwa die Hälfte der Nadeln theils ganz, theils stellenweise erkrankt ist. Nat. Gr.

Untersucht man die eben erkrankte Nadel an der verfärbten Stelle, so findet man reichliches, farbloses Mycel, theils in den Intercellularräumen, theils den Parenchymzellen eng anliegend. Die Mycelfäden sind reich verästelt und zwar biegen sich die Seitenhyphen meist nach rück- oder vorwärts, um die Parenchymzellen zu umschlingen und diesen die Nahrung zu entziehen (Fig. 2). Das Protoplasma zieht sich von der Zellwand zurück, ist aber noch freudig grün gefärbt. Das Chlorophyll wird auch an den getödteten und gebräunten Nadeln noch lange, ja theilweise bis zum nächsten Frühjahre in den inneren

Blattzellen erhalten; wogegen die der Oberhaut anliegenden Zellen sich bald rothbraun färben.



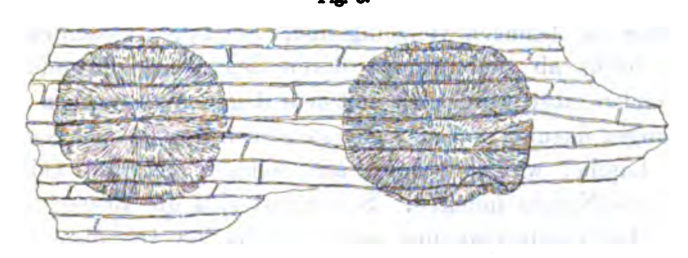
Fig. 2.



Längsschnitt durch die erkrankte Stelle einer Lärchennadel. Das Blattzellgewebe zeigt reichliches intercellulares Pilzmycel, welches grossentheils den Zellen eng anliegt. Auf der Ober- und Unterseite findet sich je ein schwarzbraunes Conidienpolster, auf dessen Aussenseite zahlreiche stabförmige Conidien gebildet werden. Auf dem oberen Polster sind sie meist durch Regen abgewaschen. Im Innern finden sich Höhlungen mit Mikroconidien erfüllt. Vergr. 100 : 1.

Auf der Ober- und Unterseite der erkrankten Blätter entstehen später unterhalb der Epidermis die zuerst dünn scheibenförmigen Conidienlager (Fig. 3), die dann zu pseudoparenchymatischen schwarzbraun gefärbten Polstern sich ver-

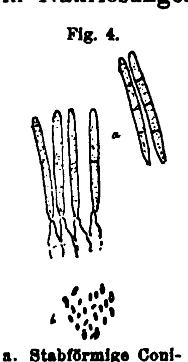
Fig. 3.



Jugendliche Conidienpolster vor dem Durchbrechen der Epidermis. Vergr. 100 : 1.

dicken und die Epidermis sprengen. Im Innern dieser Polster entstehen Höhlungen, deren Wände mit sehr zarten Basidien besetzt sind. Letztere bilden an der Spitze ausserordentlich kleine Mikroconidien. Diese Zellen sind nur 0.003 mm lang und 0.001 mm breit (Fig. 4b). Ihre Keimung konnte auch in Nährlösungen nicht beobachtet werden. Sie dürften für die Verbreitung des Pilzes bedeutungslos sein. Es ist wahrscheinlich, dass diese Pilzform dieselbe ist, die als Leptostroma laricinum beschrieben und als Spermogonienform zu Lophodermium laricinum gezogen worden ist. Da ich letzteren Parasiten aber nur in wenigen Exemplaren und zwar auf der Schmittenhöhe bei Zell am See im vorigen Jahre fand, der vorliegende Parasit dagegen überall verbreitet und seine Zugehörigkeit zu einer Sphaerella von mir ausser Zweifel gestellt ist, so ist entweder das Leptostroma laricinum nicht identisch mit unserer Pilzform oder die Zuziehung derselben zu Lophodermium laricinum ist eine irrige.

Fig. 4.



a. Stabförmige Conidien vor und nach dem Abfallen von den pfriemenförmigen Basidien. b. Mikroconidien aus dem Innern d. Polster. Vergr. 410: 1.

Auf der Aussenseite dieser schwarzen Polster entwickeln sich nun zahllose stabförmige Conidien von 0.03 mm Länge. Sie stehen auf kurzen, an der Spitze farblosen pfriemenförmigen Basidien (Fig. 4a) und sind anfänglich einzellig. Bei der Reife zeigen sie eine und später drei Querwände, so dass sie demnach vierzellig sind. Sie fallen ausserordentlich leicht ab und werden durch den Wind fortgeführt. Besonders aber werden sie mit dem Regen abgewaschen und gelangen dadurch auf die tiefer stehenden Zweige und Nadeln der Lärche, wo sie schon nach wenigen Stunden keimen und die Nadeln inficiren. So erklärt sich die Erscheinung, dass die Nadelerkrankung an jedem Baume von oben nach unten an Intensität zunimmt. Da sich die Krankheit all-

jährlich wiederholt, so führt die vorzeitige Entnadelung zu einer zwar langsamen, aber im Laufe der Jahre sehr schädlich werdenden Entkräftung der Bäume. Die unteren Zweige sterben zuerst ab und bedecken sich mit Flechten. Der sich alljährlich belaubende Gipfel wird immer kleiner, der Höhenwuchs schwächer und wenn solche Bäume von Fichten oder anderen Waldbäumen umgeben sind, so werden sie von diesen überwachsen und gehen völlig zu Grunde. An jungen Lärchen, die ich Anfang September vorigen Jahres mit Conidien bestäubte und dann unter eine Glasglocke stellte, traten etwa nach drei Wochen reichliche Conidienpolster hervor, deren Oberfläche mit zahllosen Conidien besetzt war (Fig. 2 unten). An solchen Nadeln, die ich aus dem Walde zur Untersuchung heimbrachte, waren die Conidienpolster grossentheils ohne Conidien, oder es waren nur noch wenige auf ihnen zurückgeblieben (Fig. 2 oben).

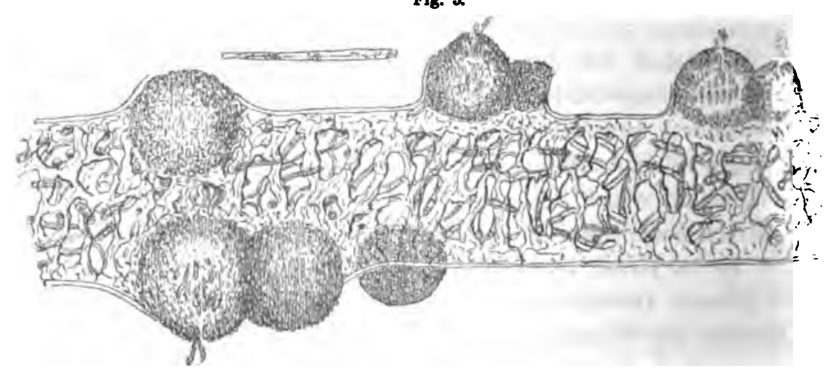
Es ist leicht erklärlich, wesshalb in nassen Jahren die Erkrankung viel schneller sich verbreitet, als in trockenen Jahren, denn bei feuchter Witterung entwickeln sich die Conidienpolster schneller und die Conidien keimen leichter, als bei trockener Witterung. Ebenso verständlich ist es, dass trockene und luftige Standorte für die Krankheit weniger disponirt sind, als dumpfe Lagen, dass Lärchen mit freier über den umgebenden Bestand emporragender Krone, dass insbesondere vorwüchsige in einem jüngeren Bestande eingesprengte Bäume sich gesünder erhalten, als Lärchen im geschlossenen, reinen Bestande oder gar solche Lärchen, die einzeln oder gruppenweise im gleich hohen Fichtenbestande stehen.

Es ist ferner verständlich, dass die Krankheit eine um so grössere Ausdehnung annehmen kann, je früher vor dem Eintritte des Winters die Erkrankung beginnt. Fällt dieselbe z. B. in den Anfang Juli, so bleiben im Flachlande noch vier Monate Zeit übrig bis zum Nadelabfall. In dieser langen Zeit kann der Parasit durch immer neue Infectionen und Coni-

dienbildung eine gewaltige Ausbreitung und Vermehrung erreichen, wie wir das besonders im Jahr 1894 beobachtet haben.

Es war vorauszusehen, dass sich auf oder in den erkrankten, am Boden liegenden Nadeln während des Winters und nächsten Frühjahres eine neue Fruchtform des Parasiten ausbilden würde, deren Sporen die Krankheit im nächsten Jahre wieder hervorrufen würden. Am 30. April d. J. sammelte ich unter den im Vorjahre stark erkrankten Lärchen des Freisinger Forstes bei München Nadeln, in deren Gewebe sich zwar noch unreife aber doch schon deutlich als Perithecien zu erkennende kuglige dunkelbraune Pilzfrüchte fanden. Zum Theil hatten sie die Blattepidermis schon durchbrochen. Das Pilzmycel im Innern der Nadeln war ein sehr derbes, dickwandiges und hellbraun gefärbtes, hatte mithin eine wesentliche Veränderung gegen das Vorjahr erfahren. Die zu Anfang Juni ausgereiften Perithecien sind den Conidienpolstern an Färbung ähnlich, aber etwas kleiner als diese, d. h. zwischen 0.1 bis 0.15 mm gross. Sie stehen theils vereinzelt, theils zu mehreren verwachsen meist in der Blattsubstanz versenkt, theils mehr auf der Blattoberfläche (Fig. 5).

Fig. 5.

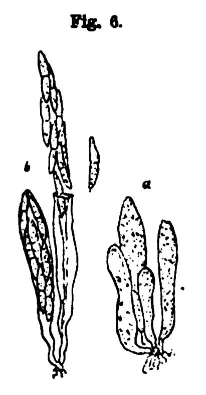


Längsschnitt durch eine vorjährige Lärchennadel, die bis Anfang Juni am Boden gelegen hatte. Das Mycel ist sehr dick, dickwandig und hellbraun geworden. Einzelne und untereinander verwachsene Perithecien enthalten im Innern farblose Schläuche mit je 8 Sporen. Rechts oben findet sich neben dem Perithecium eine Pycnide mit kleinen länglichen Mikroconidien. Vergr. 100:1.

Die Oeffnung im Scheitelpunkte der Perithecien ist in keiner Weise markirt und erkennt man sie nur aus dem Hervordringen der Schläuche oder Ascosporen. Aehnliche aber etwas kleinere Pycniden stehen vereinzelt oder sind mit den Perithecien verwachsen und enthalten ausserordentlich kleine, den Mikroconidien in den Conidienpolstern ähnliche Organe, die als gallertartige Masse aus den Pycniden ausgestossen werden (Fig. 5 oben rechts).

Von den am 30. April gesammelten Nadeln lagerte ich einen Theil im Feuchtraume des Laboratoriums auf nassen Sand und hier entwickelten sich schon bis zum 15. Mai in einer Anzahl der Perithecien reife Ascosporen (Fig. 6 b). Die keulenförmigen Ascen sind 0.05—0.06 mm lang, enthalten je 8 anfänglich einzellige, später zweizellige Sporen von 0.015–0.017 mm Länge, die farblos und an beiden verjüngten Enden abgerundet sind (Fig. 6 b).

Fig. 6.



a. Unreife Schläuche ohne Paraphysen, 30. April. b. Reife Schläuche, von denen der eine die Sporen aus dem geöffneten Scheitel eben entlassen hat. 1. Juni. Vergr. 410:1.

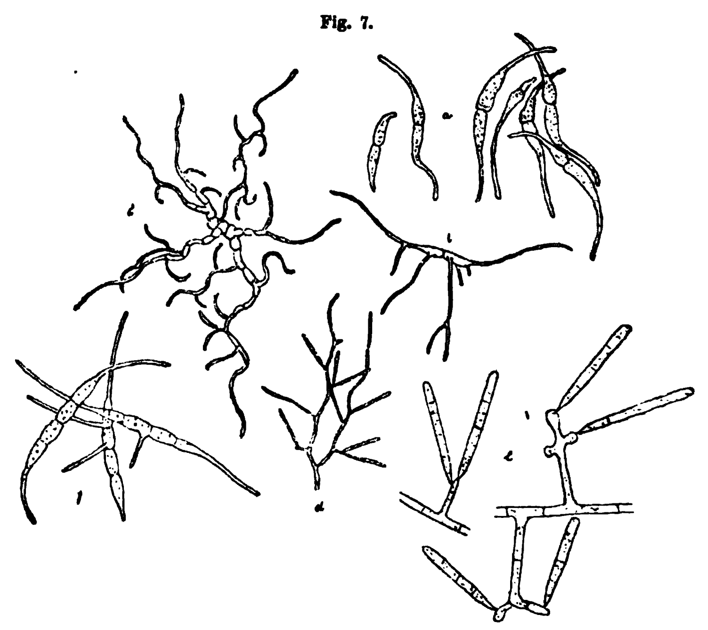
Sie stehen dicht zusammengedrängt und werden gemeinsam aus der sich trichterförmig öffnenden Spitze des Schlauches ausgestossen, wobei die Contraction des Protoplasmaschlauches mitzuwirken scheint.

Am 11. Mai sammelte ich wiederum Nadeln bei Freising unter den im Vorjahre erkrankten Lärchen und constatirte, dass die meisten Perithecien auch jetzt noch nicht reif waren. Am 1. Juni waren die Perithecien im Walde grossentheils reif, ja einzelne derselben waren schon entleert, nachdem nahezu 14 Tage hindurch regnerisches Wetter geherrscht hatte.

Der Pilz gehört zur Gattung Sphaerella und mag, da er bisher nicht beschrieben ist, als Sph. laricina bezeichnet werden. Säet man die Ascosporen in reinem Wasser auf

den Objectträger aus, so keimen sie sofort und zwar erreichen sie schon nach 24 Stunden die in Fig. 7a dargestellte Entwicklungsstufe. In Nährgelatinelösung verbracht, erreichen

Fig. 7.



a. Ascosporen, im Wasser ausgekeimt. 24 Stunden nach der Aussaat. Vergr. 410:1. b. In Nährgelatine entwickelte Ascosporen nach 2 Tagen. Vergr. 230:1. c. Pilzrasen aus einer Ascospore in Nährgelatine nach 5 Tagen. Vergr. 100:1. d. Einzelne Hyphe der Pilzcultur. 3 Wochen nach der Aussaat mit stabförmigen Conidien. Vergr. 145:1. e. Stabförmige Conidien, theils auf kurzen Seitenästen, theils auf knopfförmig verdickten Trägern entstanden. Vergr. 410:1. f. Conidien, in Wasser ausgesät, nach 10 Stunden. Vergr. 410:1.

die jungen Pflänzchen nach weiteren 24 Stunden, also 2 Tage nach der Aussaat die Fig. 7b gezeichnete Entwicklung. Man sieht, dass nunmehr nicht nur die Sporen an den beiden Scheitelpunkten, sondern auch seitlich ausgekeimt sind. Fünf Tage nach der Keimung und Entwicklung in Nährlösung erhält man das Fig. 7c dargestellte Bild. Die ältesten Theile der Pflanze sind grösser geworden, d. h. der Durchmesser

der Hyphe hat sich vervielfacht. Die Hyphen sind septirt und reich verästelt. Dabei tritt eine Eigenthümlichkeit hervor in der Wachsthumsrichtung der Längshyphen und ihrer Seitenzweige, die darin besteht, bogenförmig hin und her zu wachsen. Die Seitenhyphen haben fast stets die Neigung, bogenförmig nach rückwärts zu wachsen. Es kommt dabei der Gedanke, dass es sich bei dieser Wachsthumseigenthümlichkeit um eine erblich gewordene Eigenschaft handelt, die durch das schon oben beschriebene Wachsthum im Blattparenchymgewebe erworben worden ist. Die Seitenhyphen im Blattgewebe biegen sich alsbald um die benachbarten Blattzellen, der Aussenseite sich eng anlegend, sie besitzen diese Eigenschaft auch dann, wenn sie in künstlicher Nährlösung cultivirt werden. Es erinnert das an die Fortsetzung der windenden Wachsthumsbewegung der Schlingpflanzen, z. B. Bohnen, nachdem der Gegenstand, an dem sich in Folge von Contactreiz der Stengel herumgelegt, von der Pflanze überwachsen worden ist. Eine weitere Entwicklung der Pilzkultur erfolgt nur dann, wenn dieselbe nicht zu sehr von Nährgelatine bedeckt ist, sondern eine Entwicklung in feuchter Luft ausserhalb des Nährsubstrates erfolgt. Bis zum 20. Tage nach der Aussaat hatte sich ein graugrüner Rasen von etwa 4 mm Durchmesser entwickelt, dessen in die Luft ragende feine Hyphen genau dieselben stabförmigen vierzelligen Conidien auf kleinen seitlichen Auswüchsen entwickeln, die auf den Conidienpolstern der Lärchennadeln entstehen (Fig. 7d,e). Damit ist der Zusammenhang beider Pilzformen zweifellos bewiesen.

Nach der Aussaat in Wasser keimten auch diese Conidien sehr bald und hatten schon nach 20 Stunden die in Fig. 7f dargestellte Entwicklungsstufe erreicht. In der Folge machten sie dieselbe Entwicklung durch, die für die Ascosporen dargestellt ist. Es wird somit, sowohl für die Ascosporen als auch für die Conidien in günstigen Ernährungsverhält-

nissen ein Zeitraum von 3 Wochen verlaufen, bis nach der Infection wieder neue Conidienpolster mit reifen Conidien zur Ausbildung gelangen. Die Vergrösserung der Pilzcultur nach dem Beginne der Conidienbildung war eine sehr langsame aber dadurch ausgezeichnete, dass am Rande des Pilzrasens die Nährgelatine eine fuchsrothe Färbung erhielt. Es ist dies derselbe Farbenton, den die unter der Epidermis gelegenen Zellen der kranken Lärchennadeln einige Wochen nach der Infection erhalten.

Aus den vorstehend mitgetheilten Untersuchungsergebnissen lässt sich nun eine Reihe von bisher unerklärbaren Krankheitserscheinungen leicht verstehen.

In reinen Lärchenbeständen hindert nichts das Aufsteigen der reifen Ascosporen durch den Luftzug zu den Nadeln der Baumkronen und die nahe zusammenstehenden Bäume inficiren sich gegenseitig durch die Conidien. Besonders schädlich ist aber die Untermischung der Lärche mit der Fichte, weil die abfallenden kranken Nadeln auf den Fichtenzweigen in grosser Menge liegen bleiben, hier ebenso Perithecien entwickeln, wie auf den Streu- und Moosdecken des Erdbodens und die reifen Ascosporen mit grösster Leichtigkeit seitlich auf die Nadeln der benachbarten Lärchen verbreiten.

In der That hat sich die Mischung dieser beiden Holzarten als verderbenbringend für die Lärche erwiesen. Nur dann blieb sie gesund und kräftig, wenn sie auf ihr besonders zusagendem Boden von Jugend auf weit über den Fichtenbestand hinauswuchs, so dass die Kronen der Lärchen unbehindert und dem Luftzuge ausgesetzt über die Fichtenkronen hinausragten.

Dagegen kenne ich eine Anzahl von Lärchenbeständen, die mit Rothbuchen untermischt sind, wie z. B. den Lärchenwald oberhalb Tegernsee, die sich der trefflichsten Gesundheit und des herrlichsten Wuchses erfreuen. Im Forstamt

Freising befindet sich ein ca. 80jähriger Lärchenbestand, der vor 40 Jahren sehr krank war, so dass er stark durchhauen und mit Rothbuchen unterbaut wurde, weil man glaubte, dass der schlechte Wuchs Folge der Bodenverschlechterung sei. Dieser Bestand ist seitdem völlig gesund geworden und vom trefflichsten Wuchse. Er war noch Ende Oktober vorigen Jahres voll benadelt und keine Spur der Blattkrankheit war in ihm zu finden. An den Lärchennadeln entwickelte sich erst am Boden ein saprophytischer Pilz mit schwarzen, kugelförmigen, glatten Pycniden, der bisher unbekannt war und von Herrn Allescher beschrieben und neu benannt worden ist.[1])

Diese günstige Wirkung der Buche auf die Gesundheit der Lärche erklärt sich daraus, dass die kranken, vom August bis Oktober abfallenden Lärchennadeln Ende Oktober von dem abfallenden Buchenlaube grösstentheils zugedeckt werden, wodurch das Entweichen der Ascosporen nach oben verhindert wird. Insoweit aber doch einzelne Sporen in die Luft gelangen, findet eine förmliche Filtration derselben in dem dichten Laubdache des Buchenbestandes statt, das zu Anfang Juni schon vollständig entwickelt ist.

---

[1]) Herr Andr. Allescher stellt für diese neue Art die nachstehende Diagnose auf: „Pseudocenangium Hartigianum, Peritheciis sparsis, erumpenti superficialibus, globoso-depressis, sicco subcupuliformibus, membranaceis atro-olivaceis, primum clausis, dein late apertis, margine oris lobato, ca. 100—150 μ diam.;. sporulis numerosis, filiformibus, rectis, utrinque obtusiusculis, minute multiguttulatis, hyalinis, ca. 40—60 basidiis nullis. Hab. in acubus putrescentibus Laricis europaeae".

Dass es sich bei diesem Pilze lediglich um einen Saprophyten handelt, geht schon daraus hervor, dass die Sporenfrüchte im Herbste auf den vorjährigen Nadeln reiften und die fadenförmigen Conidien sofort nach der Aussaat keimten, wogegen im Frühjahre auf den im Vorjahre abgefallenen Nadeln noch Anfang Juni nur unreife Conidienfrüchte zu finden waren. Infectionsversuche, die ich im September vorigen Jahres auf grünen Lärchennadeln ausführte, misslangen.

Auch die Thatsache, dass die Lärche im Hochgebirge gesund bleibt, erklärt sich nun in einfacher Weise.

Wir haben gesehen, dass die Ascosporenfrüchte sich im Früjahre auf den am Boden liegenden Lärchennadeln entwickeln und bei uns erst Anfang Juni zur Sporenreife gelangen. Vor Juli treten hierorts neue Conidienpolster auf den Lärchennadeln nicht auf. Dem Parasiten stehen also vier Monate zur allgemeinen Verbreitung durch Conidien zur Verfügung.

Je weiter wir bergauf steigen, um so später verschwindet der Schnee, um so später kann mithin die Ausbildung der Perithecien beginnen, um so später werden die Ascosporen reif, um so kürzer wird die Zeit, in welcher der Parasit sich durch Conidienbildung zu vermehren vermag, zumal der Winter ja entsprechend früher eintritt. In einer Hochlage von 1500 m beginnt die Vegetation etwa $2^1/_2$ Monate später als im Flachlande, d. h. etwa Anfang Juni, die Reife der Ascosporen wird demnach auch um $2^1/_2$ Monate hinausgeschoben, beginnt also erst Mitte August. In der That fand ich in dieser Hochlage am 26. September an den Lärchennadeln nur wenige Flecken und auf diesen kaum die ersten Spuren der Conidienpolster. Am 28. September lagen diese Lärchenparthien schon im Schnee.

Daraus ist zu ersehen, dass von einer gewissen Höhenlage aufwärts zwar die Lärche bei einer Vegetationsdauer von $3^1/_2$—4 Monaten noch gedeihen kann, dass aber die Sphaerella nicht mehr die zu ihrem Gedeihen erforderliche Vegetationszeit vorfindet, wesshalb die Lärche völlig gesund bleibt, wenn ihr auch der Standort wegen der Kürze der Vegetationsperiode nicht mehr so zusagt, wie die tieferen Lagen. Aehnliches gilt offenbar auch zur Erklärung des Vorkommens der Lärche in Sibirien. Sie wächst dort wie im Hochgebirge sehr langsam, im Flachlande sehr schnell. Dort können ihr die Parasiten nicht mehr beikommen, hier

werden sie von derselben unerbittlich bekämpft. Man gebe desshalb den Anbau dieser Holzart in den Vorbergen und im Flachlande, woselbst ihr das Klima viel besser behagt, als in der ursprünglichen Hochgebirgslage, dem sogenannten „natürlichen Standorte“ nicht auf, sondern man schütze sie gegen ihre Feinde, indem man sie nur in Untermischung mit der Rothbuche anbaut und letzterer die Aufgabe zuweist, den Nadelpilz der Lärche zu vernichten. Da in reinen Beständen der Lärchenkrebspilz leicht verderbliche Ausbreitung findet, so behandle man die Lärche nur als einen Baum der Mischwälder, in welchen er unter den Nadelholzarten die erste Stelle einzunehmen hat.

Vom Anbau der Lärche darf man aber von vorneherein da Abstand nehmen, wo ständige Luftfeuchtigkeit die Entwicklung ihrer Pilzparasiten in hohem Grade begünstigt. So gedeiht z. B. die Lärche im Bayerischen Walde nicht wegen der Nebel, die dort oft lange Zeit hindurch nicht weichen. Die Pilzentwicklung wird dadurch in einem so hohen Grade begünstigt, dass man von vorneherein verzichten sollte, diesen Waldbaum zu erziehen.

Zum Cauchy'schen Integralsatze.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 39—72 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 15. Juli.*)

In der Einleitung meiner Mittheilung über den Cauchy'schen Integralsatz habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass gewisse auf Continuitäts-Betrachtungen gegründete Beweise jenes Satzes insofern lückenhaft erscheinen, als sie auf der stillschweigend gemachten Annahme beruhen, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets gleichmässig gegen den Werth $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich stets eine positive Grösse ϱ so fixiren lasse, dass für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon, \quad \text{falls: } |h|<\varrho.$$

Ich fügte hinzu, man müsse also, um jene Beweise haltbar zu machen, entweder die fragliche Bedingung als eine specielle, der Function $f(z)$ a priori zukommende Eigenschaft ausdrücklich in die Voraussetzung aufnehmen,[1]) oder

[1]) In dem seither erschienenen ersten Bande von Weierstrass' Werken findet man einen Beweis des Laurent'schen Satzes, bei welchem in der That die fragliche Bedingung bezw. eine ihr im wesentlichen aequivalente als specielle Voraussetzung erscheint.

versuchen, dieselbe als unmittelbare Folge einfacherer Eigenschaften, etwa der Stetigkeit von $f'(z)$ darzustellen;[1]) inwieweit dies möglich wäre, liess ich dahingestellt und sprach nur die Vermuthung aus, dass der Beweis, wenn überhaupt durchführbar, auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führen dürfte. Nachdem ich indessen neuerdings erkannt, dass der fragliche Beweis nicht nur möglich ist, sondern auch mit verhältnissmässig einfachen Mitteln geführt werden kann, möchte ich denselben — zumal der Satz an sich mir nicht ganz unwichtig erscheint — an dieser Stelle mittheilen.[2])

Es sei $f(z)$ im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches T eine endliche, eindeutige und stetige Function der complexen Variablen z. Liefert sodann die Substitution $z = x + yi$ die Beziehung:

$$(1) \qquad f(z) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y),$$

wo $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ reelle Functionen der reellen Veränderlichen x, y bedeuten, so folgt bekanntlich aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(z)$, dass auch $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ endliche und stetige Functionen von x, y und zwar für den Bereich T gleichmässig stetig sind.

Es sei ferner $f'(z)$ gleichfalls in T (d. h. immer im Innern und auf der Grenze von T) endlich, eindeutig und stetig, so hat man speciell:

---

[1]) In meinem Aufsatze: „Ueber die Entwicklung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen" (S. 39 ff. dieses Bandes) habe ich u. a. gezeigt, dass für „analytische", d. h. durch Potenzreihen definirte Functionen die betreffende Bedingung stets erfüllt ist (a. a. O. S. 83, 84).

[2]) Uebrigens setzt Herr Goursat, wie ich erst nachträglich bemerkt habe, bei seinem Beweise des Cauchy'schen Satzes (Act. math. T. IV, p. 196) den fraglichen Hilfssatz ausdrücklich als bekannt voraus, sodass also hier die von mir erhobene Einwendung hinfällig erscheint.

$$f'(z) = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial (iy)},$$

wobei es im Innern von T freisteht, diese partiellen Differential-Quotienten als vor- oder rückwärts genommen zu verstehen; oder wenn:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \varphi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \varphi_2(x,y)$$
$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \psi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \psi_2(x,y)$$

gesetzt wird:

$$(2) \qquad f'(z) = \begin{cases} \varphi_1(x,y) + i \cdot \psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) - i \cdot \varphi_2(x,y). \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass die partiellen Differential-Quotienten $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$ in T gleichfalls endliche, eindeutig bestimmte Werthe besitzen, welche den Bedingungen genügen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y) = \psi_2(x,y) \\ \varphi_2(x,y) = -\psi_1(x,y), \end{cases}$$

und dass sie — in Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ — in T **gleichmässig** stetige Functionen von x, y sind, d. h. jeder beliebig klein vorgeschriebenen positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass für alle x,y des Bereiches T:

$$(4) \quad |\chi(x+h, y+k) - \chi(x,y)| < \delta \quad \text{für: } h^2 + k^2 < \varrho^2,$$

(wo χ jede beliebige der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ bedeutet).

Dies vorausgeschickt gilt nun der Satz:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze des Bereiches T, so convergirt der Ausdruck:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|$$

mit Δz in T gleichmässig gegen Null, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse ε lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon, \quad \text{falls: } |\Delta z|<\varrho.$$ [1]

Beweis. Setzt man $\Delta z = h+ki$, so wird zunächst:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)}{h+ki}+i\cdot\frac{\psi(x+h,y+k)-\psi(x,y)}{h+ki}$$

$$=\left\{\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y+k)}{h}\right.$$
$$\left.+i\cdot\frac{\psi(x+h,y+k)-\psi(x,y+k)}{h}\right\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$

$$+\left\{\frac{\varphi(x,y+k)-\varphi(x,y)}{k}+i\cdot\frac{\psi(x,y+k)-\psi(x,y)}{k}\right\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

In Folge der nach dem oben Gesagten aus der Voraussetzung folgenden Stetigkeitseigenschaften der Functionen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ und ihrer partiellen Differential-Quotienten ist es gestattet auf die sämmtlichen hier auftretenden Differenzen-Quotienten den Rolle'schen Mittelwerth-Satz anzuwenden.

Bezeichnet man also mit $\vartheta, \vartheta', \eta, \eta'$ reelle Grössen, welche dem Intervalle von 0 bis 1 (mit Einschluss der Grenzen) angehören, so kann man setzen:

---

[1] Dabei kommen natürlich, falls z auf der Grenze von T oder in deren Nähe liegt, nur solche Δz in Betracht, für welche $z+\Delta z$ noch dem Bereiche T angehört.

Der analoge Satz für Functionen einer reellen Veränderlichen findet sich bei Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, p 284; desgl. bei Stolz, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung, p. 55.

$$(5)\qquad \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
$$= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k) + i\cdot\psi_1(x+\vartheta' h, y+k)\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$
$$+ \{\varphi_2(x, y+\eta k) + i\cdot\psi_2(x, y+\eta' k)\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

Es ist aber andererseits nach Gl. (2):

$$f'(z) = \varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y)$$
$$= \{\varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$
$$+ \{i\cdot\varphi_1(x,y) - \psi_1(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki}$$

oder mit Benützung der Beziehungen (3):

$$(6)\qquad f'(z) = \{\varphi_1(x,y) + i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} + \{\varphi_2(x,y) + i\cdot\psi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

Subtrahirt man jetzt diese Gleichung von Gl. (5), so ergiebt sich:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)$$
$$= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k) - \varphi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$
$$+ \{\psi_1(x+\vartheta' h, y+k) - \psi_1(x,y)\}\cdot\frac{hi}{h+ki}$$
$$+ \{\varphi_2(x, y+\eta k) - \varphi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki}$$
$$+ \{\psi_2(x, y+\eta' k) - \psi_2(x,y)\}\cdot\frac{ki}{h+ki}$$

Nun kann man nach dem oben Gesagten (s. Ungl. (4)) ϱ so fixiren, dass für $h^2 + k^2 < \varrho^2$, also $|h+ki| < \varrho$, der

absolute Betrag jeder Klammergrösse unter eine beliebig kleine positive Grösse, die mit $\frac{\varepsilon}{4}$ bezeichnet werden möge, herabsinkt. Da ausserdem bei beliebigen, nicht gleichzeitig verschwindenden reellen Werthen von h und k stets:

$$\left|\frac{h}{h+ki}\right| \leqq 1 \qquad \left|\frac{k}{h+ki}\right| \leqq 1,$$

so folgt schliesslich:

$$(7) \qquad \left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right| < \varepsilon \quad \text{für: } |\Delta z| < \varrho.$$

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz, d. h. derjenige Satz, welcher für den exacten Beweis des Cauchy'schen Integral-Theorems erforderlich war, bewiesen.

An dieses Resultat lässt sich nun noch die folgende für die schärfere Begründung der gesammten Cauchy'schen Functionen-Theorie nicht unwichtige Betrachtung knüpfen. Schreibt man in Ungl. (7) z' statt z, so wird:

$$(8) \qquad \left|\frac{f(z'+\Delta z)-f(z')}{\Delta z} - f'(z')\right| < \varepsilon \quad \text{für: } |\Delta z| < \varrho$$

unter der Voraussetzung, dass auch z' und $z'+\Delta z$ dem Bereiche T angehören. Setzt man dann in (7): $\Delta z = \zeta$, in (8): $\Delta z = \zeta'$, wo die ζ, ζ' zwei beliebige complexe Grössen bedeuten, deren absoluter Betrag unterhalb ϱ liegt, so folgt durch Subtraction der Ungleichungen (7) und (8):

$$(9) \qquad \left|\frac{f(z'+\zeta')-f(z')}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta} - \{f'(z')-f'(z)\}\right| < 2\varepsilon.$$

In Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ kann man jetzt z' nahe genug an z wählen, dass $|f'(z')-f'(z)|$ beliebig klein wird; insbesondere wird, wenn man $|z'-z| < \varrho$ nimmt,

$|f'(z') - f'(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$,[1]) sodass Ungl. (9) die folgenden nach sich zieht:

$$
(10) \qquad \left| \frac{f(z'+\zeta') - f(z')}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| < \delta \quad \text{für:} \begin{cases} |\zeta'| < \varrho, \ |\zeta| < \varrho \\ |z' - z| < \varrho \end{cases}
$$

(wenn man zur Abkürzung δ statt $\frac{5}{2}\varepsilon$ schreibt). Man kann somit an Stelle des oben bewiesenen Satzes jetzt auch den folgenden setzen:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze eines gewissen Bereiches T, so ist der Differenzen-Quotient:

$$
\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}
$$

eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und ζ für alle z des Bereiches T und alle ζ, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze ϱ liegt, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass die Ungleichungen (10) stattfinden.

---

[1]) Setzt man nämlich:

$$
z' - z = h + ki,
$$

so wird:

$$
\begin{aligned} f(z') - f(z) = \ & \varphi_1(x+h, y+k) - \varphi_1(x,y) \\ & + i\{\psi_1(x+h, y+k) - \psi_1(x,y)\}, \end{aligned}
$$

also:

$$
\begin{aligned} |f(z') - f(z)| \leqq \ & |\varphi_1(x+h, y+k) - \varphi_1(x,y)| \\ & + |\psi_1(x+h, y+k) - \psi_1(x,y)| \end{aligned}
$$

d. h. auf Grund der oben getroffenen Bestimmung:

$$
|f(z') - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } |h + ki| < \varrho.
$$

Der Satz in dieser Form besitzt nun die wichtige Eigenschaft, auch umkehrbar zu sein, d. h. man kann aus dem Bestehen der Ungleichungen (10) — welche offenbar die Endlichkeit und Eindeutigkeit von $f(z)$ als selbstverständliche Voraussetzung enthalten — die Stetigkeit von $f(z)$, sowie die Endlichkeit, Eindeutigkeit und Stetigkeit von $f'(z)$ folgern:

Setzt man nämlich in (10) $z' = z$, so wird:

$$(11) \quad \left| \frac{f(z+\zeta') - f(z)}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| < \delta \text{ für: } \left\{ \begin{matrix} |\zeta'| \\ |\zeta| \end{matrix} \right\} < \varrho,$$

und hieraus folgt zunächst, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}$ für $\lim \zeta = 0$ einen eindeutig bestimmten, endlichen Grenzwerth besitzt, sodass man setzen kann:

$$(12) \qquad \lim_{\zeta=0} \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} = f'(z),$$

d. h. $f(z)$ besitzt in T durchweg einen endlichen, eindeutig bestimmten Differential-Quotienten, ist also *eo ipso* auch eine stetige Function von z. Um auch noch die Stetigkeit von $f'(z)$ zu erkennen, bemerke man, dass aus (11) und (12) folgt:

$$(13) \qquad \left| f'(z) - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| \leqq \delta \quad \text{für: } |\zeta| < \varrho$$

und analog für jeden anderen dem Bereiche T angehörigen Werth z':

$$(14) \qquad \left| f'(z') - \frac{f(z'+\zeta) - f(z')}{\zeta} \right| \leqq \delta.$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$(15) \quad |f'(z') - f'(z)| \leqq 2\delta + \left| \frac{f(z'+\zeta) - f(z')}{\zeta} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right|,$$

und wenn man jetzt z' der Bedingung unterwirft: $|z' - z| < \varrho$, so findet man schliesslich mit Benützung von Ungl. (10):

$$(16) \qquad |f'(z') - f'(z)| < 3\delta,$$

womit die fragliche Umkehrung des obigen Satzes[1]) in allen Theilen bewiesen ist. Nunmehr kann man aber jenen Satz mit der eben bewiesenen Umkehrung in die folgende prägnantere Form zusammenfassen:

Die ***nothwendige und hinreichende*** Bedingung dafür, dass die im Bereiche T endliche und eindeutige Function $f(z)$ daselbst stetig ist und einen endlichen, eindeutigen und stetigen Differential-Quotienten $f'(z)$ besitzt, besteht darin, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ für alle Werthe z des Bereiches T und alle Δz, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze liegt, eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und Δz sein muss.

Die gleichmässige Stetigkeit des Differenzen-Quotienten in dem näher definirten Sinne bildet also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die endliche und eindeutige Function $f(z)$ im Sinne Cauchy's synektisch ist.

Ich möchte schliesslich diese Gelegenheit benützen, um den in meinem früheren Aufsatze mitgetheilten historischen Notizen einige Ergänzungen hinzuzufügen.

Ich habe dort u. a. hervorgehoben, dass der auf die Integralformel:

$$\int P\,dx + Q\,dy = \pm\int\int\left\{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right\} dx\cdot dy$$

gegründete Beweis des Cauchy'schen Satzes bereits von Cauchy selbst gekannt und auch in der Hauptsache publicirt worden sei, und glaubte aus dem Umstande, dass jener Beweis — im Gegensatze zu dem ursprünglich von Cauchy gegebenen und dessen Modificationen — ganz allgemein

[1]) Das Analogon für Functionen einer reellen Variablen findet man bei Harnack, Elemente der Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 37.

als der Riemann'sche bezeichnet wird, den Schluss ziehen zu dürfen, dass jene Thatsache bisher „völlig unbemerkt" geblieben sei.[1]) Ich hätte statt dessen etwa sagen sollen: „nahezu unbemerkt". Denn ich habe inzwischen die Wahrnehmung gemacht, dass Casorati in der historischen Einleitung seiner „Teorica delle funzioni di variabili complesse" jener Cauchy'schen Note ausdrücklich Erwähnung thut. Das Gleiche ist auch in dem jüngst erschienenen Referate der Herren Brill und Nöther über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen" geschehen.[3]) Immerhin kann wohl kaum bestritten werden, dass das mathematische Publikum mit Ausnahme einer sicherlich sehr kleinen Minderheit den fraglichen Beweis bisher ganz ausschliesslich auf Riemann's Conto gesetzt hat.

Ferner habe ich inzwischen bemerkt, dass auch Herr Falk im Jahre 1883 einen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes veröffentlicht hat.[4]) Das Original der betreffenden Arbeit ist mir leider bisher nicht zugänglich gewesen. Indessen lässt sich aus einem Auszuge, den der Verfasser selbst in einem Briefe an Herrn Hermite mitgetheilt hat,[5]) immerhin so viel ersehen, dass jener Beweis in seiner ganzen Anlage sehr einfach, wenn auch vielleicht etwas weniger natürlich erscheint, als der von mir gegebene, und dass er insbesondere wieder auf gewissen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Integrations-Curven beruht, deren principielle Ueberflüssigkeit ich gerade nachzuweisen versucht habe.

[1]) a. a. O. p. 44.

[2]) a. a. O. p. 79. Späterhin (p. 370) wird freilich der fragliche Beweis wiederum lediglich auf die Riemann'sche Dissertation zurückgeführt.

[3]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. III, p. 173.

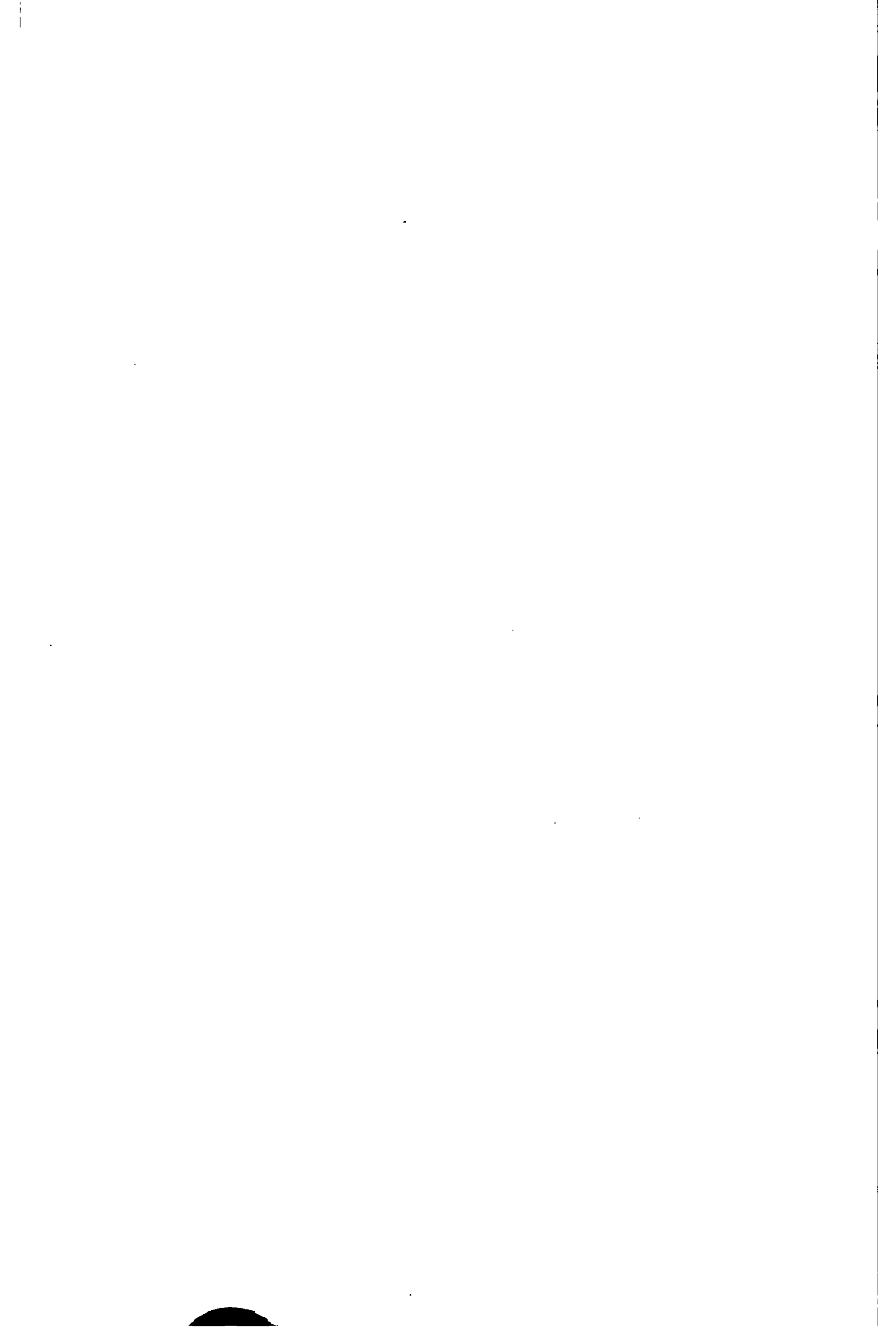
[4]) Démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction complexe (Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis, Ser. III, T. XII).

[5]) Darboux, Bulletin, 2. série, T. VII, p. 137.

Sitzung vom 6. Juli 1895.

1. Herr H. Seeliger legt eine Abhandlung des Herrn Gymnasiallehrers Dr. Adolf Schmidt in Gotha: „Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials" vor, welche in die Denkschriften aufgenommen werden soll.

2. Herr W. Dyck macht eine Mittheilung: „Beiträge zur Potentialtheorie. II. Die Gauss'sche Formel für die gegenseitige Umschlingung zweier Raumcurven und ihre Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten. Darstellung als Kronecker'sche Charakteristik eines Funktionensystems." Der Bericht hierüber folgt im nächsten Hefte.



Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1895.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. 16. Band. 1894. 8⁰.

Historische Gesellschaft in Aarau:

Argovia. Band XXV. 1894. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

State Library Bulletin. Legislation No. 5. 1895. 8⁰.

Geschichts- und Alterthumsforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen. Band X, Heft 4. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. Band 6. 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Augsburg:

Zeitschrift. Band XXI. 1894. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIV, No. 116—118. 1895. 4⁰.

Historischer Verein in Bamberg:

54. u. 55. Bericht f. d. Jahre 1892 u. 1893. 1893/94. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band X, No. 2. 3. 1894/95. 8⁰.

Historische und antiquarische Gesellschaft in Basel:

19. Jahresbericht über das Jahr 1893/94. 1894. 8⁰.
Mittheilungen. N. F. IV. 1894. fol.

Genootschap van kunsten en wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 37, afl. 4—6. Deel 38, 1—3. 1894. 8⁰.
Notulen. Deel 32, No. 1—3. 1894. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 47, 3. stuk. 1894. 4⁰.
Catalogus der ethnologische verzameling. 4. druk. Supplement. 1894. 8⁰.
Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811. Deel XII. 1894. 8⁰.
Dagh-Register gebouden int Casteel Batavia Anno 1665. 1894. 8⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. 16, 1893. 1894. fol.
Regenwaarenemingen. XV. Jahrg. 1893. 1894. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Srpski etnografski sbornik. Kniga I. 1894. 8⁰.
Glas. XX, No. 45—47. 1894/95. 8⁰.
Spomenik. No. 28. 1895. 4⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

On the development and structure of the whale. Part I. By Gust. Guldberg und Fridtjof Nansen. 1894. fol.
Aarbog für 1893. 1894. 8⁰.

University of California in Berkeley:

Bulletin of the Department of Geology. Vol. I. 1893—1895. 8⁰.
Register of the University of California 1893—1894. 8⁰.
Biennial Report of the President of the University 1893. Sacramento 1894. 8⁰.
Annual Report of the Secretary of the Board of Regents of the University of California for the year ending June 30. 1894. Sacramento 1894. 8⁰.
A brief account of the Lick Observatory by Edw. S. Holden. Sacramento 1895. 8⁰.
Report of work of the agricultural experiment stations for 1892/93. Sacramento 1894. 8⁰.
Report of viticultural work during the seasons 1887—89 by L. Paparelli. Sacramento 1892. 8⁰.
List of recorded Earthquakes in California, by Edw. S. Holden. Sacramento 1887. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1894, No. 39—53. 1895, No. 1—25. gr. 8⁰.
Inscriptiones graecae insularum maris Aegaei. Fasc. I. 1895. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für das Jahr 1893. Band XIV. 1894. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 27. Jahrg., No. 19—21. 28. Jahrg., No. 1—11. 1894/95. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Band XXV. 1895. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. 46, Heft 3. 1894. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1888. Abt. I—III. Braunschweig 1894. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. VIII. 1894. No. 20—26. Band IX. 1895. No. 1—7. 8⁰.

Verhandlungen. Jahrg. 1894/95, No. 1—15. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Das Gesetz von der Erhaltung der Energie und seine Bedeutung für die Technik. Rede von A. Slaby. 1895. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band IX, Heft 4. Band X, Heft 1. Ergänzungsheft 3. 1895. 4⁰.

Antike Denkmäler. Band II, Heft 2. 1895. fol.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1893. 1895. fol.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung 1894. Heft 2. 1895. fol.

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Bremen. Jahrg. 5. 1895. fol.

Deutsches Meteorol. Jahrb. für 1891. Heft 3. 1895. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXIV, Heft 1. Berlin 1895. 8⁰.

Verein zur Verbreitung des Gartenbaues in den preussischen Staaten in Berlin:

Gartenflora. 43. Jahrgang. 1894. 4⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band IX, Heft 11. 12. Band X, Heft 1—5. 1894/95. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. XV. Jahrgang 1895. Heft 1—6. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 20. Band. Zürich. 1895. 8⁰.

Natural History and Philosophical Society in Birmingham:

Proceedings. Vol. IX, 1. 1894. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:

Memorie. Serie V. Tom. III, fasc. 1—4. 1893. 4⁰.

R. Deputazione di storia patria in Bologna:

Atti. III. Serie. Vol. XII, fasc. 4—6. 1895. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1894. No. 23. 24. 1895. No. 1—12. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. XXIX. 1894. 8⁰.

Public Library in Boston:

43. annual Report 1894. 1895. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. XXVI, part 2. 3. 1894. 4⁰.
Memoirs. Vol. III, No. 14. 1894. 4⁰.
Occasional Papers IV. 1894. 8⁰.

Stadtmagistrat zu Braunschweig:

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Band II, Abth. 1. 1895. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Band XIII, Heft 2. 1895. 8⁰.
Beiträge z. nordwestdeutschen Volks- u. Landeskunde. Heft 1. 1895. 8⁰.

Historisch-statistische Sektion der k. k. mährischen Landwirthschafts-Gesellschaft in Brünn:

Schriften. Band 29. 1895. 8⁰.
Notizenblatt. Jahrg. 1894. 4⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. 32. Band 1893. 1894. 8⁰.
XII. Bericht der meteorol. Commission. 1894. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tome 7, No. 11. Tome 9, No. 1—4. 1894/95. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Annuaire 1895. 61ᵉ année. 8⁰.
Bulletin. 3ᵉ Sér. Tome 28, No. 12. Tome 29, No. 1—5. 1894/95. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tom. XIV, fasc. 1. 2. 1895. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome II, 4—7. 1888/93. 8⁰.

American philosophical Association in Bryn Manor (Pensylvanien).

Transactions. Vol. 25. 1894. Boston 1894. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Mathematische u. naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XII. 1. Hälfte. Berlin 1895. 8⁰.
Ungarische Revue. 14. Jahrg. Heft 9. 10. 1895. Heft 1—4. Budapest 1894. gr. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Jahresbericht für 1892. 1894. 8⁰.
Földtani közlöny. Band XXIV, Heft 11. 12. 1894. 8⁰.
Geologische Specialkarte von Ungarn. Blatt Zone 14. Col. XXX mit erklärendem Text, 1894. 8⁰.

Society of natural sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. 5, No. 4. 1894. 8⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Documente privitóre la istoria Românilor. Suppl. I. Vol. 6. Suppl. II. Vol. 2. 1895. 4⁰.
Analele. Ser. II. Tome 14. 1891—92. Sect. liter. u. Sect. Scientif.
„ 15. 1892—93. Sect. liter. u. partea administr.
„ 16. 1893—94. Partea administr. 1893/94. 4⁰.
Festreden 1894/95. 4⁰.
Basmele Române. Studiu comparativŭ de Lăzar, Săinénu. 1895. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando in Cadix:

Anales. Seccion 2. Año 1893. 1894. fol.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 4e Sér. Vol. 8, fasc. 3. 4. 1895. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1894 July—December. 1895. fol.
Meteorological Observations 1894 July—December. 1895. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. V, part 4. 5. 6. Vol. VII, 1. 2. 1894. fol.
Instructions to observers of the Indian Meteorological Department. By J. Eliot. 1894. 8⁰.
Rainfall of India. IIId year 1893. 1894. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 847—849. 1894. 8⁰.
Journal. No. 338. 340—343. 1894/95. 8⁰.
Proceedings. 1894. No. X. 1895. No. I—III. 1894/95. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 27, part 4. Vol. 28, part 1. 2. 1894/95. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VIII, part 4. 1895. 8⁰.

Museum of comparative zoology in Cambridge, Mass.:

Annual Report for 1893—94. 1894. 8⁰.
Memoirs. Vol. XVII, No. 3. 1894. 4⁰.
Bulletin. Vol. XXV, No. 12. Vol. XXVI, No. 1. 2. Vol. XXVII, No. 1. 1894/95. Vol. XVI, No. 15. 1895. 8⁰.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass.:

49th annual Report 1893—94. 1894. 8⁰.
Annals. Vol. XXXV. Waterville 1894. Vol. XXXII, part 1. 1895. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 7 und Bullettino, fasc. 36—38. 1894. 4⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Herstellung und Untersuchung der Quecksilber-Normalthermometer von J. Pernet, W. Jäger u. E. Gumlich. Berlin 1895. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. Vol. I, No. 1. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. V, No. 2. 3. 1895. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. No. 382—393. 395—408. 1894/95. 4⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Chur:

XXIV. Jahresbericht. Jahrg. 1894. 1895. 8⁰.

Observatory in Cincinnati:

Publications of the Cincinnati Observatory. Nr. 13. 1895. 4⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1894. No. 102—104. 1895. No. 1—47. fol.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mittheilungen. N. F. Band 2. Jahrgang 1891—94. 1894. 8°.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Rep. Argentina):

Boletin. Tom. XII, 2. XIV, 1. Buenos Aires. 1891—94. 8°.

Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Sem. 1895. 8°.

Historischer Verein in Darmstadt:

Quartalblätter 1894 in 4 Heften. 8°.

Verein für Hessische Geschichte in Darmstadt:

Archiv für Hessische Geschichte. N. F. Band II, Heft 1. 1895. 8°.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

Proceedings. Vol. IV, 1891—93. 1894. 8°.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band VII, Theil 2. 1895. 8°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome XV, 3e trimestre. Tom. XVI, 4e trimestre. 1894. 8°.

Société astronomique Russe in Dorpat:

Ephémeridis des étoiles pour 1895. 8°.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III. Vol. 3, No. 3. 1894. 8°.
Cunningham Memoirs. No. 10. 1894. 4°.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VI, part 4. 1892. 8°.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XX, page 305—384. 1895. 8°.

Gymnasium zu Eisenach:

Jahresbericht für 1894/95 nebst Abhandlung von G. Kühn: Regesten zur Geschichte des Gymnasiums. 1895. 4°.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 21. 1895. 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. Ser. IV. Vol. 17, disp. 3. 4. Vol. 18, disp. 1. 1894/95. 8°.

R. Deputazione di storia patria in Florenz:

Documenti di storia italiana. Documenti dell' antica costituzione dell' comune di Firenze, pubbl. da P. Santini. 1895. 4°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Band XVIII, Heft 4. 1895. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. 12. Jahrg. No. 7—12. 1894/95. 8⁰.
Societatum Literae, 8. Jahrg. 1894. No. 10—12. 9. Jahrg. 1895. No. 1—3. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Collectanea Friburgensia. Fasc. III. 1895. 4⁰.
Festreden 1894/95. 1895. 8⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. S.-S. 1895. W.-S. 1895/96. 1895. 8⁰.
Autorités professeurs et étudiants. Sem. d'hiver 1894/95. 1894. 8⁰.
Index lectionum. S.-S. 1895. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mittheilungen. N. F. Band V. 1894. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1895. No. 1—6. 4⁰.
Nachrichten. Philol.-hist. Classe. 1894. No. 4. 1895. Nr. 1. 2. 8⁰.
„ Mathem.-phys. Classe. 1894. No. 4. 1895. No. 1. 8⁰.
Nachrichten u. geschäftliche Mittheilungen. 1895. Heft 1.
Julius Plückers gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Band I. Leipzig 1895. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 70, Heft 2. 1894. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. IV, p. 193—206 u. CLIII—CCXII. Vol. V, p. 1—70 u. I—XXVI. 1894/95. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mittheilungen. 26. Jahrg. 1894. Berlin 1895. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule zu Grimma:

Jahresbericht 1894/95 mit Abhandlung von P. Meyer: Samuel Pufendorf. 1895. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde im Haag:

Bijdragen. V. Reeks. Deel IX. VI. Reeks. Deel I, No. 12. 1894/95. 8⁰.
Naamlijst der leden op 1. Januar 1895. 1895. 8⁰.

Teyler Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II. Vol. 4, partie III. 1894. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Tome 28, livr. 5. Tome 29, livr. 1. 1895. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 30, No. 21—24. Heft 31, No. 1—10. 1894/95. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 48, Heft 4. Band 49, Heft 1. Leipzig 1894/95. 8⁰.

Jahrbuch der Elektrochemie in Halle:

Jahrbuch. 1. Jahrg. Halle 1895. 8⁰.

Universität in Halle:

Das zweihundertjährige Jubiläum der Universität Halle-Wittenberg. Festbericht von D. B. Beyschlag. 1895. 4⁰.

Verzeichniss der Vorlesungen. Somm.-Sem. 1895. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Band 67, Heft 5 u. 6. Leipzig 1894/95. 8⁰.

Thüringisch-sächsischer Verein für Erforschung vaterl. Alterthums in Halle:

Neue Mittheilungen. Band XIX, 1. 1895. 8⁰.

Verein für Hamburger Geschichte in Hamburg:

Mittheilungen. 16. Jahrg. 1893/94. 1894. 8⁰.

Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung in Hamburg:

Verhandlungen. Band VIII. 1891—93. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Band XIII. 1895. 4⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1894. 8⁰.

Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen. Heft 3. u. 4. 1890—94. fol.

Universität Heidelberg:

Erwin Rohde, Die Religion der Griechen. Rede. 1895. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. V, Heft 1. 1895. 8⁰.

Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Band V, Heft 3. 1894. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Band XXV, Heft 2. 1895. 8⁰.

Michigan Mining School in Houghton:

Catalogue of the Michigan Mining School 1892—94. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Wappenbuch der Städte und Märkte Tirols. 1894. 8.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Band IV, Lieferung 1. Text und Atlas.
Band V, Lieferung 1. Text und Atlas.
Band VIII, Lieferung 1. Text und Atlas. 1893/94. fol.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band 29, Heft 2. 1894. 8⁰.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Band 62, 1—6. 1895. 8⁰.

Medicinische Doctor-Dissertation von P. Dmitriewsky. 1894. 8⁰.

2 Medicinische Dissertationen von Gratshov und Sergaiev. 1895. 8⁰.

Kaiserliche Universität in Kharkow:

Sapiski. 1894. No. 4. 1895. No. 1. 2. 8⁰.

M. Tikhomandritzky, Théorie des intégrales et des fonctions elliptiques. 1895. 8⁰.

Ministerial-Commission zur Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Ergebnisse der Beobachtungs-Stationen. 1893. Heft 1—12. 1894/95. quer 4°.
Wissenschaftliche Meeres-Untersuchungen. N. F. Band I, Heft 1. 1894. 4°.

Kais. Universität in Kiew:

Iswestija. 1894. Band 34, No. 11. 12. Band 35, No. 1. 2. 1894/95. 8°.
Spisok etc. (Verzeichniss des Personals). 1894. 8°.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Jahrbuch. Heft 23. 1895. 8°.
Diagramme. 1894. fol.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:

Ertesitö. 3 Hefte. 1894. 8°.

Archäologische kroatische Gesellschaft in Knin:

Glasilo. Band I, No. 1. 2. 1895. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Descriptio iconibus illustrata plantarum novarum vel minus cognitarum, autore Joh. Lange. Fasc. I—III. 1864—66. fol.
Oversigt. 1894. No. 3. 1895, No. 1. 1894/95. 8°.
Mémoires. 6e Sér. Section des sciences. Tom. VIII, No. 10. 1894. 4°.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke. Band 9, Heft 3. 4. Band 10, Heft 1 und Tillaeg zu Band 9. 1894/95. 8°.
Mémoires. Nouv. Sér. 1893. 1894. 8°.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Danmarks Kirkeböger. 1895. 8°.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1895. Januar—Mai. 8°.
Rozprawy filolog. Tom. 20. 21. 23. Rozprawy filozof. Tom. 30. 1894. 8°.
Rocznik 1893/94. 8°.
Monumenta medii aevi historica. Tom. 14. 1894. 4°.
Sprawozdania komisyi jezykowej. Tom. 5. 1894. 8°.
Acta rectoralia. Tom. 1, fasc. 3. 1894. 8°.
Archiwum komisyi histor. Tom. 7. 1894. 8°.
Biblioteka pisarzów polsk. Tom. 29. 1894. 8°.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. 15. 1894. 8°.
Nic. Hussoviani carmina. 1894. 8°.
Atlas geologiczny Galicyi. Heft III. (Text und Atlas.) 1894. fol. Text in 8°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3e Série. Vol. 30, No. 115. 116. 1894. 8°.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. Deel XIV, 1. 2. 1895. 8°.

Sternwarte in Leiden:

Verslag 1893/94. 1894. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil 13, Heft 3. 4. 1894/95. 8°.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahrsschrift. Jahrgang 29, Heft 3. 4. Jahrgang 30, Heft 1. 2. 1894/95. 8°.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Berichte der math.-phys. Classe. 1894, II. III. 1895, I. 8°.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Band XXI, No. 3—6. Band XXII, No. 1. 1895. 4°.
Berichte der philol.-hist. Classe. 1894. Heft 2. 8°.
Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band XV, 2. 4°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Band 51, Heft 1—11. 1895. 8°.

Université catholique in Loewen:

Annuaire 1895. 8°.
Thèses. No. 654—670. Faculté de théologie. 1894. 8°.
Programme des cours de l'année académique 1894/95. 1894. 8°.
J. Muthuon, Arkoses de Lembecq-Clabecq. 1894. 8°.
V. de Buck, Mgr. de Ram. Paris 1865. 8°.
M. Arendt, Commentaires de Charles V. Bruxelles 1859. 8°.
W. A. Arendt, Leo der Grosse. Mainz 1835. 8°.
J. J. Thonissen, Vie du comte Ferdinand de Meeus. 1863. 8°.
J. J. Thonissen, Vie du comte Félix de Mérode. 1861. 8°.
Jansenius, évêque d'Ypres. 1893. 8°.
J. B. Laforêt, Orphée. 1850. 8°.

Her Majesty's Government in London:

The Voyage of H. M. S. Challenger. A Summary of the scientific Results. Part I a. II. 1895. 4°.

R. Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. 14, 2. 1895. 8°.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. X, No. 37 u. 38. 1895. 8°.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 57, No. 340—346. 1895. 8°.
Philosophical Transactions. Vol. 185, part 1. A. B. 1895. 4°.
List of Membres. 1894. 4°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 55, No. 2—7. 1894/95. 8°.

Chemical Society in London:

Proceedings. Session 1894—95. No. 143—153. 8°.
Journal. Supplementary Number 1894 und Nr. 386—391. January—June 1895. 8°.
Charter and By Laws. 1895. 8°.
A List of the Officers and Fellows. 1895. 8°.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. No. 197—200. 1894. 8⁰.
List. November 1. 1894. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1894. Part 6. 8⁰.

Zoological Society in Lo don:

Proceedings. 1894, Part IV. 1895, Part I. 1895. 8⁰.
Transactions. Vol. VIII, 10. 1895. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 51, No. 1309—1333. 1894/95. 4⁰.

Accademia di scienze in Lucca:

Atti. Tomo 27. 1895. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta. Tom. XXX, 1. 2. 1893/94. 4⁰.

Institut Grand Ducal (Section des sciences naturelles) in Luxemburg:

Publications. Tome 2. 3. 1894. 8⁰.

Verein für Luxemburger Geschichte in Luxemburg:

„Ons Hémecht". Vereins-Organ. Jahrg. I, No. 3. 1895. 8⁰.

Washburn Observatory in Madison:

Publications. Vol. VII, part 2. 1894. 4⁰.

Government Astronomer in Madras:

Madras Meridian Circle Observations. Vol. VIII. 1894. 4⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. No. 3. 1895. 8⁰.

R. Academia de ciencias in Madrid:

Anuario. 1895. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 26, cuad. 1—6 und Indice general zu Tom. 1—25. 1895. 8⁰.

R. Osservatorio astronomico di Brera in Mailand:

Osservazioni meteorologiche dell' anno 1894. 1894. 4⁰.
Publicazioni. Nr. 38. 1893. fol.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Memorie. Tomo V. 1895. 4⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno XXI, fasc. 4. Anno XXII, fasc. 1. 1894/95. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. IV. Ser. Vol. 8, No. 4. Vol. 9, No. 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1894/95. 4⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Band III, 4. 1894. 8⁰.

Zeitschrift Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. Anno I, fasc. 1. 1895. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. Année 1892/93. 1895. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. VI. Jahrgang 1894. 4⁰.

Observatorio meteorologico central in Mexico:

Boletin mensuel. 1895. 1—4. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:

Memorias. Tomo 8, No. 1—4. 1894. 8⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Serie. Tomo 2, No. 5—7. 1893/94. fol.

Natural History Society of Wisconsin in Milwaukee:

Occasional Papers. Vol. II, No. 2. 3. 1894/95. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Anno 28. Ser. III. Vol. 3, fasc. 1. 1894. 8⁰.

Bureau d'échanges internationaux de publications de la République de l'Uruguay in Montevideo:

Loi du rayonnement solaire. 1894. 4⁰.
Annuario estadístico de la República oriental del Uruguay. Año 1893. 1895. 4⁰.
Estadistica escolar año de 1893. 1894. 4⁰.
Rasgos biográficos del Señor Don Juan Idiarte Borda, Presidente de la República O. de Uruguay. 1894. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1894, No. 3. 4. 1894/95. 8⁰.

Lick Observatory of the University of California in Mount Hamilton:

Publications. Vol. III. 1894. Sacramento. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 1894, No. 9—12. 1895, No. 1—5. 1895. 4⁰.

K. Technische Hochschule in München:

Personalstand. Sommer-Sem. 1895. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1895. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiöcese München und Freising. 1895, No. 1—15. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Das Eisenbahn-Nivellement der K. B. Staatseisenbahnen. 1894. 4°.
Geognostische Jahreshefte. VII. Jahrg. 1894. Cassel 1895. 4°.

Historischer Verein von Oberbayern in München:

Monatsschrift. 4. Jahrg. 1895, No. 1—6. Januar—Juni. 8°.

Akademischer Verlag München:

Hochschul-Nachrichten. No. 50—52. 1894/95. 4°.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:

Zeitschrift. Band 52 und Ergänzungsheft I, Lief. 2. 1894. 8°.

Accademia delle scienze fisiche e matematice in Neapel:

Rendiconto. Serie II. Vol. VIII, fasc. 11. 12. Serie III. Vol. I, fasc. 1—4. 1894/95. gr. 8°.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. XI, Heft 4. 1895. 8°.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 57. Jahrgang 1893. 8°.

Institute of Mining and Mechanical Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 44, part 2. 3. 1895. 8°.

The American Journal of Science in New-Haven:

The American Journal. No. 289—294. January—June 1895. 8°.

Academy of Sciences in New-York:

Transactions. Vol. XIII. 1894. 8°.
Annals. Vol. VII (Index). Vol. VIII, No. 5. 1895. 8°.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. VI. 1894. 8°.

American Chemical Society in New-York:

The Journal. Vol. 17, No. 1—7. Easton 1895. 8°.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 26, No. 4, part I. II. Vol. XXVII, No. 1. 1894/95. 8°.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrg. 1894. 8°.
Mittheilungen. Jahrg. 1894. 8°.
Katalog der Holzstöcke des XV—XVIII. Jahrh. Theil II. 1894. 8°.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XIX, 1. 2. 1894/95. 8°.

Historischer Verein in Osnabrück:

Osnabrücker Geschichtsquellen. Band III. 1895. 8°.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mittheilungen. Band 19, 1894 u. Register zu Band 1—16. 8°.

Società-Veneto-Trentina di scienze naturali in Padova:

Bullettino. Tom. VI, No. 1. 1895. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. IX, fasc. 1. 2. 1895. 8⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1894, No. 52. 1895, No. 1—25. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 119, No. 26. 27. Tome 120, No. 1-25. 1894/95. 4⁰.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 637—642. Janvier—Juin 1895. 4⁰.

Museum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1895, No. 2. 3. 8⁰.

Société géographique in Paris:

Bulletin. 7ᵉ Sér., Tome 15, Tome 16. 1894, 3ᵉ et 4ᵉ trim. 1895, 1ᵉʳ trim. 8⁰.

Comptes rendus. 1894, No. 18. 19. 1895, No. 1—8. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 22, No. 9. 10. Tome 23, No. 1—3. 1894/95. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome 19. 1894. 8⁰.

Mémoires. Tome VII, part 1—4. 1894. 8⁰.

Zeitschrift „L'Électricien" in Paris:

L'Électricien. Tom. VIII, No. 209. 1894. 4⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. 5ᵉ Série. Vol. I, No. 4. Vol. II, No. 1—4. 1894/95. 4⁰.

Alex. Veselovsky, Boccaccio. Tom. II. 1894. 8⁰.

Mémoires. Tom. 42, No. 12. 1894. 4⁰.

Βυζαντινὰ χρονικά. Tom. I, Nr. 2—4. 1894. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XIII, 2. 1894. 8⁰.

Kais. russ. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Band XXXI. 1894. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXVI, No. 8. 9. Tom. XXVII, No. 1—3. 1894/95. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1893, Theil I. II. 1894. 4⁰.

Repertorium für Meteorologie. Supplem.-Band VI u. Band XVII. 1894. 4⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Gotitschnyact (Jahresact), 8. Februar 1895. 8⁰.
P. M. Melioranski, Kurze Grammatik der Kosak-Kirgisischen Sprache. Theil I. (In russ. Sprache.) 1894. 8⁰.
Jos. Kurono, Russisch-japanische Gespräche. (In russ. Sprache.) 1894. 4⁰.
Bestimmungen für die Benützung der K. Universitäts-Bibliothek. (In russ. Sprache.) 1894. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1894, part II. III. 8⁰.
Journal. Second Series. Vol. X, part 2. 1894. fol.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. XLII. annual Meeting at Asheville. Sept. 1894. Baltimore 1894. 8⁰.

Geographical Club in Philadelphia:

Bulletin. Vol. I, No. 3—5. 1894/95. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 18, No. 2—4. 1894/95. 8⁰.

American philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 32, No. 143. Vol. 33, No. 146. 1893/94. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. IX, pag. 133—241. 1894/95. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für 1894/95 mit Abhandlung: Lucianstudien von Joh. Rentsch. 1895. 4⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 7. Jahrg., Heft 1. 2. 1894. 8⁰.

Central-Bureau des meteorologischen Instituts in Potsdam:

Verhandlungen der 1894 in Innsbruck abgehaltenen Conferenz der Permanenten Commission der Internationalen Erdmessung. Berlin 1895. 4⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Astronomisch-geodätische Arbeiten I. Ordnung. Telegraphische Längenbestimmungen in den Jahren 1890—93. 1895. 4⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publikationen. Band VII, 2 und X. 1895. 4⁰.

Kaiser Franz-Josef Akademie in Prag:

Rozpravy. Třida I. Ročník 3, číslo 3. 4. Třída III. Ročník 3, číslo 3. 1894. gr. 4⁰.
Věstník. Ročník 3, číslo 7—9. 1894. gr. 8⁰.
Almanach. Ročník 5. 1895. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen in Prag:

Rechenschaftsbericht vom 15. Dezember 1894 und Mittheilung No. III u. IV. 1895. 8°.
Eugen Holzner, Studien zu Euripides. Wien 1895. 8°.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Band II. Nik. Hermann. Wien 1895. 8°.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.

Jahresbericht für das Jahr 1894. 1895. 8°.
Sitzungsberichte 1894. a) Classe für Philosophie.
b) Mathem.-naturw. Classe. 1895. 8°.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1894. 1895. 8°.

K. Böhmisches Museum in Prag:

Časopis. Jahrg. 1894. 4 Hefte. 1894. 8°.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1894. 55. Jahrg. 1895. 4°.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rectors für das Jahr 1894/95. 1894. 8°.
Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Sem. 1895. 8°.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. 33. Jahrg., No. 1—4. 1894. 8°.

Naturforscher-Verein in Riga:

Correspondenzblatt. Nr. 37. 1894. 8°.
Festschrift aus Anlass seines 50 jährigen Bestehens. 1895. 8°.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario 1894. 1893. 8°.

„Limburg“ Provinciaal Genootschap voor geschiedkundige Wetenschappen in Roermond:

Limburg's Jaarboeck I. 1894. 8°.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Annuario 1895. 8°.
Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. II, parte 2. Notizie degli scavi, Sett.—Dic. e Indice 1894. Vol. III, p. 2. Gennaio—Marzo 1895. 4°.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. III, fasc. 10—12. Vol. IV, fasc. 1—3. 1894/95. 8°.
Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. III. Semestre 2, fasc. 9—12. Vol. IV. Semestre 1, fasc. 1—11. 1894/95. 4°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 45, sess. 7. Anno 47, sess. 4. 1894. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1894, No. 4. 1895, No. 1. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Band IX, No. 4. gr. 8⁰.

Ministero di agricultura, industria e commercio in Rom:

Statistica delle Biblioteche. 2 voll. 1893/94. 4⁰.

Office centrale meteorologico in Rom:

Annali. Vol. XII, parte 2. 1890. 1895. 4⁰.

Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XVII, fasc. 3. 4. 1894. 8⁰.

Accademia degli Agiati in Rovereto:

Atti. Anno XII. 1894. Serie III. Vol. I, fasc. 1. 1895. 8⁰.

American Association for the avancement of sciences in Salem:

Proceedings, held at Madison, Wisconsin. August 1893. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1892/93. 1894. 8⁰.
Joachim Vatian von Emil Arbenz. 1895. 4⁰.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. IId Series. Vol. IV, part 1. 1894. 8⁰.

Observatorio astronómico meteorológico in San Salvator:

Annuario 1895. fol.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino. Anno 18, No. 1—5. 1895. 8⁰.

Museum in Stavangen:

Aarsberetning for 1893. 1894. 8⁰.

Gesellschaft für Pommer'sche Geschichte in Stettin:

Die Bau- und Kunstdenkmäler des Reg.-Bezirks Köslin. Band II, Heft 1. 1894. gr. 8⁰.
Baltische Studien. Jahrg. 24. 1894. 8⁰.

K. Vitterhets, Historie och Antiquitets-Akademie in Stockholm:

Handlingar. Del 31. 32. 1893. 8⁰.
Antiquarisk Tidskrift. XIII, 1. XIV, 3. XV, 2. 1894/95. 8⁰.

Schwedens öffentliche Bibliotheken in Stockholm:

Accessions-Katalog. IX, 1894. 1895. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Band 28, fasc. 8—10, 1894. Band 29, Heft 1—5, 1895. 8⁰.

Société des sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tome 28, No. 7. 1894. 8⁰.

K. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik u. Landeskunde. Jahrg. 1894, Heft 1—3. 1895. 4⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stuttgart:

Wirtembergisches Urkundenbuch. Band VI. 1894. 4⁰.
Hermann Fischer, Geographie der schwäbischen Mundart, Text und Atlas. Tübingen 1895. fol.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Württembergische Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. Jahrg. III, 1894, Heft 1—4. 1894/95. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture in Sydney:

Palaeontology. No. 8, part III. 1895. 4⁰.
Records of the Geological Survey of New-South-Wales. Vol. IV, part 3. 1895. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletin. Tom. I, No. 20. 21. Mexico 1895. 4⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen. Jahrgang 1892. 1894. fol.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio:

Mittheilungen. 55. Heft. 1895. fol.

Imperial University in Tokio:

Calendar 1893/94. 8⁰.
The Journal of the College of Science. Vol. VII, 2—4. 1894/95. 4⁰.

Medicinische Facultät der Universität Tokio:

Mittheilungen. Band II, No. 2. Bd. III, No. 1. 1894. 4⁰.

Museo civico di storia naturale in Triest:

Atti. Vol. IX. 1895. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. XXX, disp. 1—11. 1894/95. 8⁰.
Osservazioni meteorologiche dell' anno 1894. 1895. 8⁰.

Humanistika Vetenkaposamfund in Upsala:

Skrifter. Band II. 1892—94. 8⁰.

Universität Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. 26, Année 1894. 1894/95. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. XV. Deel. s'Gravenhage 1894. 8⁰.
Werken. Ser. III, Deel 5. s'Gravenhage 1894. 8⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1894. 8⁰.
Verslag. 1894. 8⁰.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Ser. XVI, Vol. 1. 2. XVII, Vol. 1. 2. 1892/93. 8⁰.

Istituto Veneto di scienze, lettere e arti in Venedig:

Atti. Tom. 50. disp. 4—10, u. 2 Appendices. Tom. 51, Nr. 1—10. Tom. 52, No. 1—8. 1891—94. 8⁰.
Temi di premio dal 19, Maggio 1895. 8⁰.

Bureau of Education in Washington:

Annual Report of the Commissioner of Education for 1891/92. 2 Voll. 1894. 8⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

XI. Annual Report for 1889/90. XII. Annual Report for 1890/91. 1894. 4⁰.
Contributions to North American Ethnology. Vol. IX. 1893. 4⁰.
An ancient Quarry in Indian Territory, by W. H. Holmes. 1894. 8⁰.
List of the Publications of the Bureau of Ethnology. 1894. 8⁰.

N. S. Departement of Agriculture in Washington:

North American Fauna. No. 8. 1895. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Smithsonian Report. U. S. National-Museum 1891. 1892. 1892/93. 8⁰.
Annual Report. July 1893. 1894. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 854. 969. 970. 1894. 8⁰.
Diary of a Journey through Mongolia and Tibet in 1891 and 1892 by William Woodville Rockhill. 1894. 8⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Observations made during the year 1889. 1893. 4⁰.
The Elements of the four inner planets and the fundamental constants of Astronomy by Simon Newcomb. 1695. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Annual Report for 1892. Part II. 1894. 8⁰.
Bulletin. No. 31—33. 1894/95. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

XII. annual Report in 2 parts. XIII. in 3 parts. 1891/92. 4⁰.
Monographs. No. XIX. XXI. XXII. 1893. 4⁰.
Mineral Resources. 1892. 1893. 1894. 8⁰.
Bulletin. No. 97—117. 1893/94. 8⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. Jahrg. 28, Heft 1. 1895. 8⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Band 130. 1894. 8⁰.*
Mathem.-naturwissensch. Classe. 1893/94. 8⁰.
Abth. I. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—3.
" II. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—5.
" IIb. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—8.
" III. 1893, No. 8—10. 1894, No. 1—4.
Denkschriften. Philos.-hist. Classe. Band 43.
Mathem.-naturw. Classe. Band 60. 1894. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Band 80, 2. Band 81, 1. 1894. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Verhandlungen. 1894, No. 10—18. 1895, 1—7. 4⁰.
Jahrbuch. Jahrg. 1894. Band 44, Heft 2—4. 4⁰.

K. K. Gradmessungs-Bureau in Wien:

Astronomische Arbeiten. VI. Band. Längenbestimmungen. 1894. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. VIII. Jahrg. 1895, No. 1—26. 1895. 4⁰.
Ernst Ludwig, Schwefelbad Ilidze bei Sarajevo in Bosnien. 1895. 8⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 24, Heft 6. Band 25, Heft 1. 1894/95. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 37. 1894. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 44, Jahrg. 1894, III. u. IV. Quartal. Band 45, Jahrg. 1895, Heft 1—5. 1895. 8⁰.

K. K. Reichs-Kriegs-Ministerium „Marine-Section" in Wien:

Relative Schwerbestimmungen durch Pendelbeobachtungen. 1895. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band IX, No. 3. 4. Band X, No. 1. 1894/95. 4⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Band XXVIII, No. 2—7. Band XXIX, No. 1. 1894/95. 8⁰.
Sitzungsberichte. 1894, No. 5—10. 1895, No. 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. Band 36 und Ergänzungsheft. 1893/94. 8⁰.
Jahresbericht für 1892 u. 1893. 1893 u. 1894. 8⁰.
Dr. Th. Henner, Der historische Verein von Unterfranken in seinem 60jährigen Wirken. 1893. 8⁰.
Ansicht von Würzburg im Jahre 1648 aus Merian's Topographia Franconiae 1650.

Schweizerische Meteorologische Centralanstalt in Zürich:

Annalen 1892. Jahrg. 29. 1894. 4⁰.

Schweizerische geologische Commission in Zürich:

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Lief. 33. 34. 1893/94. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band XXIII, 7. XXIV, 1. 1895. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. Jahrg. 39, Heft 3. 4. Jahrg. 40, Heft 1. 1894/95. 8⁰.

Universität Zürich:

Schriften der Universität vom 1. Mai 1894 bis 1. Mai 1895. 4⁰ u. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Le Prince Albert Ier de Monaco:

Sur les premières campagnes scientifiques de „Princesse Alice". Paris 1895. 4⁰.

Sur la densité et l'alcalinité des eaux de l'Atlantique par M. J.-Y. Buchanan. Paris 1895. 4⁰.

J. P. Alibert in Paris:

Notes sur ses découvertes et ses travaux. 1895. 4⁰.

Francesco Brioschi in Rom:

Notizie sulla vita e sulle opere di Arturo Cayley. 1895. 4⁰.

V. Fusböll in Kopenhagen:

Vœgter-Versene. 1894. 8⁰.

M. P. Foucart in Athen:

Recherches sur l'origine et la nature des mystères d'Éleusis. Paris 1895. 8⁰.

Aristote, constitution d'Athènes, notes sur la seconde partie. Paris 1895. 8⁰.

C. Remigius Fresenius in Wiesbaden:

Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse. 16. Aufl. 1895. 8⁰.

Dr. Gerling in Elmshorn (Holstein):

Ein Ausflug nach den ostholsteinischen Seen. Halle 1893. 8⁰.

Emil Heuser in Landau (Pfalz):

Katalog des städtischen Museums in Landau i. d. Pfalz. 1895. 8⁰.

Friedrich Hirth in Tschung-King (China):

Die Länder des Islâm nach chinesischen Quellen. I. Leiden 1894. 8⁰.

Ueber den Schriftenverkehr von Kinsay zu Marco Poló's Zeit. Leiden 1895. 8⁰.

Das Reich Malabar nach Chao-Ju-Kua. Leiden 1895. 8⁰.

Wilhelm His in Leipzig:

Die anatomische Nomenclatur. Sep.-Abdruck. 1895. 8⁰.

Charles Janet in Beauvais:

Études sur les fournis. Note IV, V et VI (mit 4 weiteren geologischen Abhandlungen). Paris 1894. 4⁰ u. 8⁰.

Alfred Jörgensen in Kopenhagen:

Der Ursprung der Weinhefen. Jena 1895. 8⁰.

Albert von Kölliker in Würzburg:

Kritik der Hypothesen über amöboide Bewegungen der Neurodendren. 1895. 8⁰.

Nicolaos Krispi in Athen:

Νέα θεωρία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν. 1895. 8⁰.

Otto Kuntze in Friedenau bei Berlin:

Geogenetische Beiträge. Leipzig 1895. 8⁰.

August Kurz in Augsburg:

Der Bunsenbrenner (Ausschnitt). 1894. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

Philosophical Sin. 1895. 8⁰.

Gabriel Monod in Paris:

Revue historique. XX. Année. Tome 57, No. 1. 2. Tome 58, No. 1. Paris 1895. 8⁰.

Emil Pallioppi in Pontresina:

Dizionari dels itioms romauntschs. Fasc. IV. 1895. 8⁰.

Michele Rajna in Mailand:

Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano 1895. 8⁰.

Dietrich Reimer, geogr. Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. Jahrg. I, Heft 1—3. 1895. 4⁰.

Albert Sorel in Paris:

Notice sur M. Fustel de Coulanges par M. Albert Sorel. 1893. 4⁰.
Discours pour la réception de M. Albert Sorel. 1890. 4⁰.

Arturo Soria y Mata in Madrid:

Orígen poliédrico de las espacies. 1894. 8⁰.

M. A. Stein in Lahore:

Catalogue of the Sanskrit manuscripts in the Library of the Maharaja of Jammu and Kashmir. Bombay 1894. 4⁰.

Michele Stossich in Triest:

Notizie elmitologiche. 1895. 8⁰.
I distomi dei rettili. 1895. 8⁰.
Osservazioni sul Solenophorus megalocephalus. 1895. 8⁰.
Il genere Ankylostomum Dubini. 1895. 8⁰.

August Tischner in Leipzig:

Le phénomène fondamental du système solaire. 1895. 8⁰.

G. Tschermak in Wien:

Ueber gewundene Bergkrystalle. 1894. 4⁰.

G. Tropea in Messina:

Storia dei Lucani. 1894. 8⁰.

Girolamo Vitelli in Florenz:

Studi italiani. Vol. III. 1895. 8⁰.

Gauthier Villars et fils in Paris:

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. I. Série. Fiches à 100. 1894. 8⁰.

Henry Wilde in Manchester:

On the Multiple Proportions of the Atomic Weights of Elementary Substances in relation to the unit of Hydrogen. 1895. 8⁰.
On the Evidence afforded by Bode's Law of a permanent Contraction of the Radii Vectores of the Planetary Orbits. 1895. 8⁰.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 136. Stiftungstages am 28. März 1895.

Seite

v. Pettenkofer: Nekrologe 155
v. Voit: Nekrologe 161

Sitzung vom 2. März 1895.

*C. v. Kupffer: Ueber die Entwicklung der Kiemenknorpel bei Petromyzon Planeri 197
*Ad. v. Baeyer: Ueber das Caron 197

Sitzung vom 4. Mai 1895.

R. Hartig: Ueber den Drehwuchs der Kiefer 199
F. Lindemann: Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen confocaler Kegelschnitte begrenzt wird . 219
J. Bauschinger: Ueber eine neue Bestimmung der Refractionsconstante auf astronomischem Wege 239
W. Dyck: Beiträge zur Potentialtheorie. I. Ueber die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristiken eines Functionensystems durch bestimmte Integrale 261

Sitzung vom 15. Juni 1895.

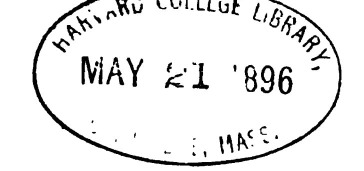
R. Hartig: Ueber den Nadelschüttepilz der Lärche, Sphaerella laricina n. sp. 279
A. Pringsheim: Zum Cauchy'schen Integralsatz 295
*F. Lindemann: Ueber die conforme Abbildung eines Flächenstückes, das durch Parabeln mit gemeinsamer Axe begrenzt wird 278
*F. Lindemann: Vorlage eines aus Vorder-Asien stammenden antiken Modelles (Bronze-Guss) eines Archimedischen Körpers (Rhomben-Triakontaëder) 278
*A. v. Baeyer: Ueber das Kümmelöl 278

Sitzung vom 6. Juli 1895.

*A. Schmidt: Mittheilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials 305
*W. Dyck: Beiträge zur Potentialtheorie. II. Die Gauss'sche Formel für die gegenseitige Umschlingung zweier Raumcurven und ihre Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten. Darstellung als Kronecker'sche Charakteristik eines Funktionensystems 305

Einsendung von Druckschriften 307

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.



Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

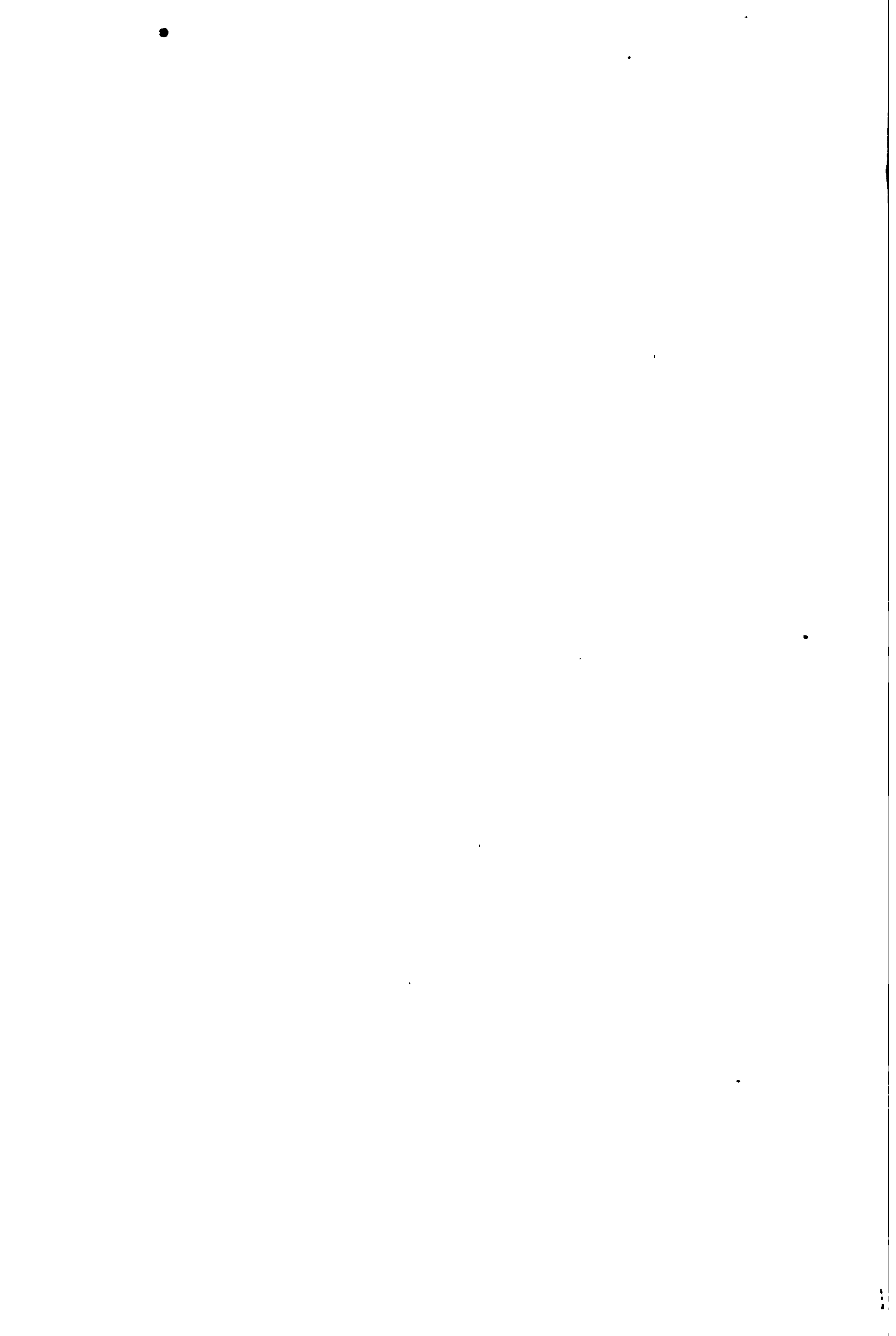
k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1895. Heft III.

München.
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).



Ueber die Abhängigkeit der Blattform von Campanula rotundifolia von der Lichtintensität.

Von K. Goebel.

(Eingelaufen 7. November.)

In meinen „Pflanzenbiologischen Schilderungen" (II. Theil, S. 294, 1893) habe ich darauf hingewiesen, dass die bekannte Heterophyllie von Sagittaria sagittifolia insoferne von der Lichtintensität beeinflusst werde, als bei schwachem Lichte nur die bandförmigen Blätter auftreten, während zur Bildung der pfeilförmigen, über den Wasserspiegel sich erhebenden, höhere Lichtintensität erforderlich ist. Weitere Versuche (mitgetheilt in Science progress, Vol. I, Nr. 2, und Flora, 80. Bd. (1895) p. 96 ff. bestätigten diese Auffassung.

In der letztgenannten Zeitschrift habe ich auch die später erfolgten Veröffentlichungen von Klebs und Vöchting und den Einfluss der Lichtintensität auf die Organbildung einiger Kakteen besprochen. Aus den dort gleichfalls erwähnten Untersuchungen, die einer meiner Schüler in meinem Laboratorium ausführte, ergab sich ferner, dass auch bei dem Keimungsprocesse einiger Lebermoose die Gestaltung der Keimpflanze durch die Lichtintensität bedingt ist. Bei Preissia commutata z. B. entsteht bei schwacher Beleuchtung nur ein fadenförmiger Keimschlauch, der bei starker Lichtintensität sich zur Zellfläche verbreitert; diese kann bei schwacher Lichtintensität wieder veranlasst werden, als Keimschlauch weiter zu wachsen.

Da die Untersuchung der Abhängigkeit der Organbildung von äusseren Faktoren von grosser Bedeutung für ein kausales Verständniss der so verwickelten vegetabilischen Gestaltungsprocesse ist, so habe ich bei den höheren Pflanzen nach weiteren Fällen gesucht, in denen eine solche Abhängigkeit sich nachweisen lässt.

Viele Phanerogamen zeigen die Erscheinung der Heterophyllie, d. h. sie bringen im Verlaufe ihrer Entwickelung verschieden gestaltete Blätter hervor. Dass diese Heterophyllie nicht eine erblich fixirte, sondern eine durch innere oder äussere Einflüsse bedingte ist, konnte ich, auch abgesehen von dem oben angeführten Falle von Sagittaria, früher in einigen anderen Beispielen nachweisen.

Die Keimpflanze von Vicia Faba z. B. bringt zunächst sehr einfach gestaltete, sogenannte Primärblätter hervor, schuppenartige Gebilde, die sich von den später auftretenden Laubblättern beträchtlich unterscheiden. Es zeigte sich, dass dieselben Hemmungsbildungen von Laubblättern sind, welche zu Stande kommen durch Correlationserscheinungen.[1]) Man kann demgemäss die Bildung dieser schuppenförmigen Primärblätter unterdrücken und die Pflanze nöthigen, statt ihrer Laubblätter, oder Zwischenbildungen zwischen diesen und den Primärblättern hervorzubringen.

Ein anderes Beispiel liefert eine neuseeländische Veronica-Art (V. cupressoides). Dieselbe gleicht, wie der Artnamen besagt, durch ihre schuppenförmigen, der Sprossoberfläche anliegenden Blätter einer Cupressinee. Die Verringerung der Blattgrösse ist hier eine Anpassung an trockenes Klima. Die Keimpflanzen dagegen besitzen zunächst flache, abstehende, denen anderer Veronica-Arten gleichende Blätter. Es gelang, die Pflanzen durch Kultur in feuchtem Raume zur Aenderung ihrer Blattform zu bringen (Pfl.-biol. Schilderungen I, S. 20),

[1]) Vgl. Ueber die Jugendzustände der Pflanzen, Flora 1889.

überhaupt begünstigt jeder äussere Faktor, welcher von den normalen Lebensbedingungen der Pflanze abweicht, die Rückkehr zur Jugendblattform. Eine solche Rückkehr, also einen Rückschlag zu erzielen, gelang auch bei Heteranthera reniformis. Es ist dies eine monokotyle Sumpfpflanze, welche mit langgestielten, nierenförmigen Blättern versehen ist. Die Keimpflanzen aber bringen, wie die von Sagittaria, zunächst ungegliederte, bandförmige Blätter hervor.

Keimpflanzen, welche schon nierenförmige Blätter hervorgebracht hatten, wurden in Sand bei schwacher Beleuchtung kultivirt. Bei einigen derselben, die schwach wuchsen, gelang es, sie zur Rückkehr zur Bildung der bandförmigen Primärblätter zu nöthigen. Dies kommt in der Natur, soweit bis jetzt Beobachtungen vorliegen, nie vor. Wohl aber habe ich bei einer anderen Pontederiacee, bei Eichhornia azurea, einen derartigen, an Seitensprossen auftretenden Rückschlag früher constatiren können (Schilderungen II, S. 288). Ob die verminderte Lichtintensität bei Heteranthera reniformis die Ursache des Rückschlags war, muss ich dahingestellt sein lassen, da das Material ein zu dürftiges war, und wie oben erwähnt, alle die Vegetation ungünstig beeinflussenden Faktoren das Auftreten von Rückschlagsbildungen begünstigen.

Ganz klar und unzweideutig aber waren die Ergebnisse bei einer dikotylen Pflanze, der Campanula rotundifolia.

Fassen wir einen blühenden Spross derselben in das Auge, so zeigt derselbe die Erscheinung der Heterophyllie darin, dass er beginnt mit der Bildung gestielter Blätter mit rundlicher Blattspreite, die vom Stiele deutlich abgesetzt ist. Diese Blätter stehen an der Basis, sie gehen oft so zeitig zu Grunde, dass sie zur Zeit der Blüthenentfaltung nicht mehr nachweisbar sind. Nach oben hin folgen auf diese Blätter solche von ganz anderer Gestalt, sie sind lanzettlich, ohne Differenz von Stiel und Spreite. Meist

fanden sich zwischen beiden Blattformen ganz allmähliche Uebergänge.

Es zeigte sich nun, dass das Auftreten dieser verschieden geformten Blätter nicht in der Natur der Pflanze unabänderlich begründet, sondern von äusseren Bedingungen, speciell von der Lichtintensität abhängig ist. Dies wurde nachgewiesen durch Kulturen, die in verschiedener Entfernung von einem Südfenster aufgestellt waren, so dass sie alle verschieden starke Beleuchtung empfingen. Es wurden zu den Kulturen in abgeschwächtem Lichte Pflanzen verschiedener Entwickelung gewählt. Dabei zeigte sich Folgendes:

1. Sprosse, die nur die Rundblätter gebildet hatten, fuhren während der ganzen Versuchsdauer fort, solche zu bilden, sie gelangten also nicht zur Bildung der Langblätter, sondern wurden, ebenso wie dies früher bei Sagittaria veranlasst werden konnte, auf dem Stadium der Jugendblattform (dem der Primärblätter) zurückgehalten. Wurden derartige Pflanzen direkt an das Fenster gestellt, so entwickelten sie nach einem Monat Langblätter von ganz anderer Form und Blüthen.

2. Haben die bei gemindertem Lichtzutritt kultivirten Pflanzen an ihrem Ende schon eine Blüthenknospe angelegt, so ist damit das Wachsthum der betreffenden Sprosse natürlich abgeschlossen. Aber als Seitensprosse entwickeln sich dann vielfach Triebe, welche Rundblätter tragen.

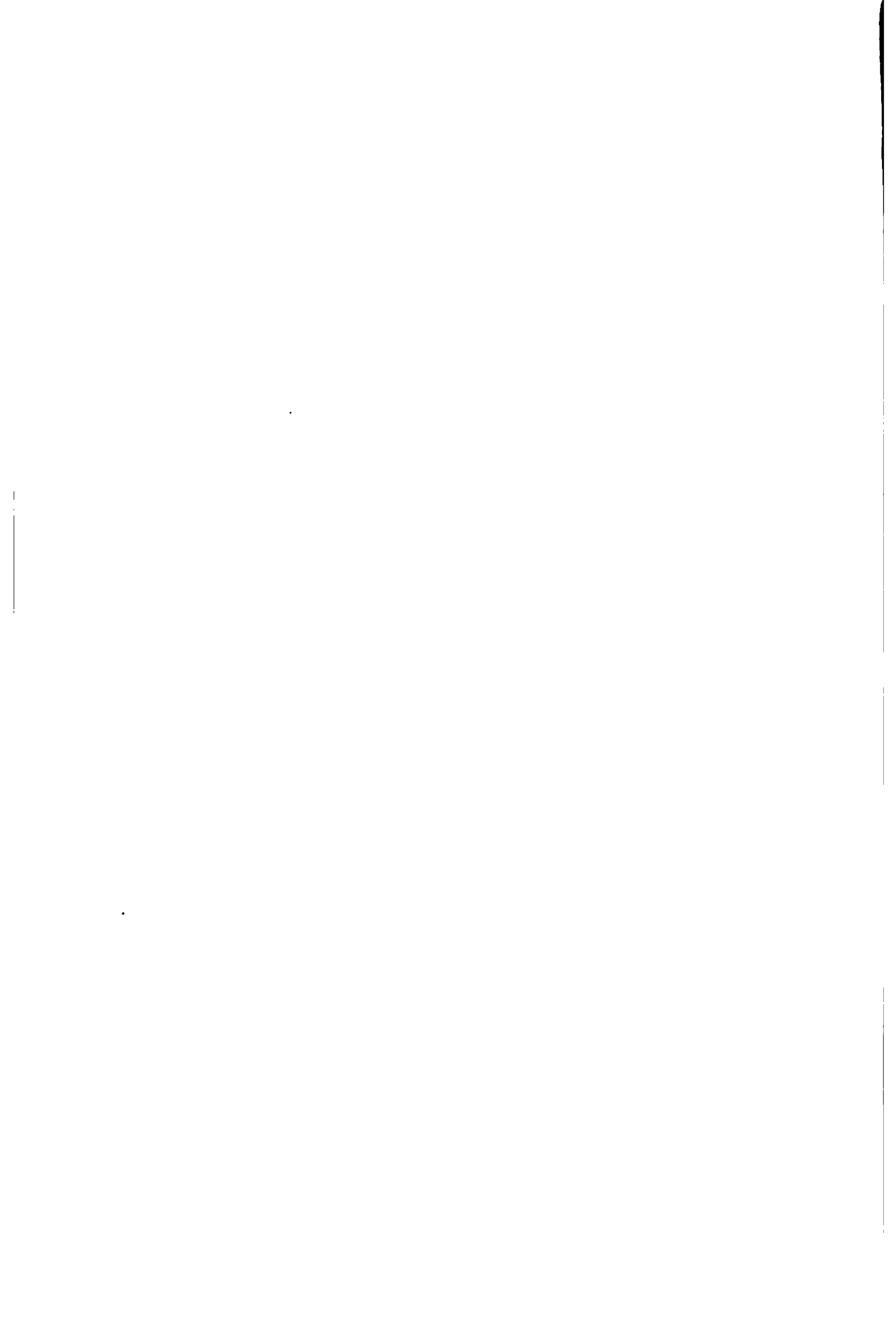
3. Sprosse, welche zwar schon Langblätter, aber keine Blüthenknospen angelegt haben, können bei geminderter Lichtintensität veranlasst werden, an der Spitze wieder Rundblätter zu bilden. Damit ist die normale Blattfolge durch die Kulturbedingungen vollständig umgekehrt.

Die Abhängigkeit des Auftretens der beiden, so sehr verschiedenen Blattformen von der Lichtintensität ist damit hinreichend bewiesen: die Rundblätter treten bei schwacher,

die Langblätter bei stärkerer Beleuchtung auf. Erstere sind auch für Standorte von geminderter Lichtintensität, wie sie die Keimpflanze z. B. an einem von andern Pflanzen beschatteten Standort vorfindet, besonders geeignet, denn sie besitzen in ihrem, seine Wachsthumsfähigkeit lange beibehaltenden Blattstiele ein Organ, das geeignet ist, die Blattspreite in die günstige Lichtlage zu bringen. Bei den ohnehin durch die Verlängerung der Sprossreste über die Umgebung emporgehobenen Langblättern ist eine solche Einrichtung überflüssig, während die Schmalheit der Blattspenite sie gegen schädigende Einflüsse von Wind, Regen etc. widerstandsfähiger macht.

Die Frage, ob die Bildung der Rundblätter bei einer Keimpflanze unterdrückt werden könne (wobei dieselbe also sofort Langblätter hervorbringen würde), wenn die Keimpflanze von Anfang an starker Beleuchtung ausgesetzt wird, wurde in verneinendem Sinne entschieden. Trotz Anwendung einer sehr starken Lichtquelle (zweier Bogenlampen zu je 2000 Normalkerzen Lichtstärke) bildeten die Keimpflanzen zunächst auch Rundblätter. Dabei ist hervorzuheben, dass es sich nicht etwa nur um Entfaltung von im Samen schon vorhandenen Anlagen von Rundblättern handelte. Dieselben wurden vielmehr, wie die entwicklungsgeschichtliche Untersuchung lehrte, thatsächlich bei der Keimung neu gebildet. Dieses erste Auftreten ist also erblich fixirt.

Ueber die Fortsetzung dieser Untersuchungen hoffe ich später berichten zu können.



Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 2. November.*)

§ 1.

Es sei $\sum A_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Convergenz-radius $|x| = 1$. Setzt man alsdann zunächst für $|x| < 1$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu = f(x), \tag{1}$$

so mag $f(x)$ für die Stellen $x = e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen durch unmittelbare analytische Fortsetzung und für etwaige singuläre Stellen $e^{\vartheta' i}$ als $\lim\limits_{\vartheta = \vartheta'} f(e^{\vartheta i})$ definirt sein, bezw. da, wo dieser Grenzwerth nicht existirt, als undefinirt gelten.

Convergirt nun die Reihe $\sum A_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ noch durchweg oder wenigstens im allgemeinen (das soll hier und im folgenden stets bedeuten: mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen), so ist für alle Convergenzstellen nach einem bekannten Abel'schen Satze:

$$\begin{aligned} f(e^{\vartheta i}) &= \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu e^{\nu \vartheta i} \\ &= \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu (\cos \nu \vartheta + i \cdot \sin \nu \vartheta). \end{aligned} \tag{2}$$

Andererseits ist $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen mit Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen ϑ' eine nicht nur stetige, sondern unbeschränkt differenzirbare Function der reellen Veränderlichen ϑ. Unter Hinzufügung der weiteren Annahme, dass jene singulären Stellen ϑ' die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ nicht alteriren sollen, muss sich daher $f(e^{\vartheta i})$ in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lassen:

$$(3) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\, d\lambda$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\cos\nu\lambda\cdot d\lambda\cdot\cos\nu\vartheta + \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\sin\nu\lambda\cdot d\lambda\cdot\sin\nu\vartheta\right\}$$

Alsdann folgt aber aus einem bekannten Satze, dass die Coefficienten dieser Entwickelung keine anderen sein können, als die oben mit A_ν bezeichneten. Mit anderen Worten: Allemal wenn die *Potenzreihe* $\sum A_\nu x^\nu = f(x)$ für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen *convergirt* und $f(e^{\vartheta i})$ als *integrable* Function von ϑ definirt, so ist sie *identisch* mit der *Fourier*'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$.

Von den drei Voraussetzungen, unter welchen dieses Resultat hier ausgesprochen wurde, nämlich:

1) der endlichen Anzahl der singulären Stellen von $f(e^{\vartheta i})$,

2) der durchgängigen Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$,

3) der Convergenz von $\sum a_\nu e^{\nu\vartheta i}$, —

lässt sich die erste ohne weiteres beseitigen, wie die Untersuchungen von Du Bois Reymond über die Darstellbarkeit einer beliebigen trigonometrischen Reihe als Fourier'sche Reihe lehren,[1]) sofern nur die Voraussetzungen 2) und 3)

[1]) „Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe etc.“ Abh. der Bayer. Akademie, Bd. XII (1875). Vgl. insbesondere p. 48.

bestehen bleiben. Da indessen die besonderen Eigenthümlichkeiten, von welchen hier gesprochen werden soll, schon bei Functionen mit einer endlichen Anzahl von Singularitäten zum Vorschein kommen, so soll im folgenden immer nur von solchen die Rede sein.

Auch die zweite Voraussetzung kann man bis zu einem gewissen Grade fallen lassen. Wie nämlich Riemann gezeigt hat,[1]) schliesst das Auftreten gewisser Unendlichkeitsstellen, welche die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben, dennoch die Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe nicht aus. Es sind das solche Stellen ϑ', für welche $f(e^{\vartheta i})$ ohne Maxima und Minima von niederer Ordnung als der ersten unendlich wird (NB. wenn auch nicht von hinlänglich niedrigerer Ordnung, um die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ zu sichern) und für welche $f(e^{(\vartheta'+\vartheta)i}) + f(e^{(\vartheta'-\vartheta)i})$ integrabel ist. Freilich werden in diesem Falle die Integrale, welche die Coefficienten in der Fourier'schen Form darzustellen hätten, in dem gemeinhin üblichen Sinne divergent. Sie behalten jedoch ihre richtige Bedeutung, wenn man ihre Hauptwerthe im Cauchy'schen Sinne nimmt, d. h. wenn man setzt:

$$\int_a^b \varphi(\vartheta)\cdot d\vartheta = \lim_{\varepsilon=0}\left\{\int_a^{\vartheta'-\varepsilon} \varphi(\vartheta)\cdot d\vartheta + \int_{\vartheta'+\varepsilon}^b \varphi(\vartheta)\cdot d\vartheta\right\}.$$

Und mit Hinzufügung dieser Modification bleibt, wie Du Bois Reymond gezeigt hat,[2]) die Eindeutigkeit der Coefficienten-Bestimmung, also die Identität zwischen trigonometrischer beziehungsweise Potenz-Reihe einerseits und Fourier'scher Reihe andererseits bestehen. Ich möchte derartige Reihen als uneigentliche Fourier'sche Reihen

---

1) „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", Art. 12. (Ges. Werke, p. 244, 245.)

2) a. a. O. Art. 24, p. 37 ff.

bezeichnen und benütze diese Gelegenheit, um ein einfaches Beispiel einer solchen Reihe mitzutheilen (s. § 5 dieses Aufsatzes), bei welcher die Convergenz durch ganz elementare Rechnung direct erwiesen werden kann, während die Divergenz der Coefficienten in der Fourier'schen Integralform ohne weiteres aus der Form der zu entwickelnden Function hervorgeht.

Im übrigen bleibt hier noch die Frage offen, ob die durch die convergente Reihe $\sum A_\nu e^{\nu \vartheta i}$ dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ nicht auch solche Singularitäten besitzen könnte, welche, ohne zu der eben betrachteten Kategorie zu gehören, die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben und damit die Darstellbarkeit der Reihen-Coefficienten in der Fourier'schen Form unmöglich machen würden? Ob dieser Fall in Wirklichkeit eintreten kann, muss vorläufig dahingestellt bleiben: das Gegentheil ist wenigstens, so viel ich weiss, bisher nicht bewiesen worden. —

Was nun endlich jene dritte — die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu \vartheta i}$ verlangende — Voraussetzung betrifft, so dürfte man vielfach der Ansicht begegnen, dass man dieselbe ohne weiteres fallen lassen könne, sobald nur die Entwickelbarkeit von $f(e^{\vartheta i})$ in eine convergente Fourier'sche Reihe feststeht, und dass man geradezu aus der Existenz dieser letzteren auf die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu \vartheta i}$ (und damit eo ipso auf die Identität der betreffenden beiden Reihen) schliessen dürfe. So sagt z. B. Herr Darboux in seinem „Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres etc." ganz ausdrücklich[1]): „Nous voyons que, si $f(z)$, considérée comme fonction de l'argument ω de z sur le cercle de convergence, est dé-

[1]) Journal de Mathém. 3ième Série, T. IV, p. 13.

veloppable en série trigonométrique,[1]) la série qui développe $f(z)$ suivant les puissances de z demeurera encore convergente sur le cercle limite." Dieser Ausspruch stammt zwar schon aus dem Jahre 1878, d. h. indessen immerhin aus einer Zeit, in welcher die in den Arbeiten der Herren Christoffel[2]), Prym[3]) und Schwarz[4]) (1871/72) zu Tage tretende schärfere Prüfung der Grundlagen des sog. Dirichlet'schen Principes bereits gegründete Bedenken gegen die Stichhaltigkeit der obigen Behauptung hervorrufen konnte. Im übrigen glaube ich, dass auch heute noch viele Mathematiker jene Darboux'sche Ansicht theilen und die Frage nach der Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise schlechthin mit derjenigen nach der Entwickelbarkeit der betreffenden Randfunction in eine Fourier'sche Reihe identificiren. Eine strengere Behandlung dieser Frage ist mir nur in den Arbeiten des Herrn Thomé über lineare Differentialgleichungen[5]) und einer daran anknüpfenden Abhandlung „Ueber Convergenz und Divergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise"[6]) begegnet. Hier wird vor allem bewiesen, dass unter den über die Natur der singulären Stellen

---

[1]) Hierunter ist immer, wie aus dem ganzen Zusammenhange unzweideutig hervorgeht, eine Fourier'sche Reihe zu verstehen.

[2]) Ueber die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1871, p. 435.

[3]) Zur Integration der Differential-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 73, p. 360.

[4]) Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 74, p. 218.

[5]) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen — Journ. f. Math. Bd. 91, p. 222 ff. s. besonders Art. 4, 9, 10. —. Desgl. Bd. 95, p. 44 ff. s. Art. 8.

[6]) Journ. f. Math. Bd. 100, p. 167.

gemachten Voraussetzungen die Coefficienten der Potenzreihe wirklich identisch sind mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten der Randfunction, und sodann erst aus der Convergenz dieser Fourier'schen Reihe auf diejenige der (auf dem Convergenzkreise mit ihr identischen) Potenzreihe geschlossen. Obschon nun aus dieser Art der Beweisführung die Meinung des Verfassers deutlich hervorgeht, dass es Fälle geben könnte, in denen die fragliche Schlussweise nicht zutrifft, so ist es doch weder hier, noch auch, so viel ich weiss, in anderen Arbeiten, deren Gegenstand dies nahe gelegt hätte,[1]) direct ausgesprochen worden, dass es derartige Fälle — und zwar solche von verhältnissmässig einfacher Natur — wirklich auch giebt. Ich will nun in diesem Aufsatze zeigen:

Es giebt thatsächlich Potenzreihen, welche auf ihrem Convergenzkreise *divergiren*, obschon die zugehörige Randfunction in eine convergente *Fourier*'sche Reihe entwickelt werden kann.

In den folgenden beiden Paragraphen theile ich zunächst die allgemeinen Ueberlegungen mit, welche mich zur Construction derartiger Functionen geführt haben und die sodann in § 4 zur Bildung bestimmter Beispiele benützt werden sollen.

§ 2.

Es seien die beiden Reihen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(\vartheta) = \sum_0^\infty{}^{\nu} (a_\nu \cos\nu\vartheta + b_\nu \sin\nu\vartheta) \\ \psi(\vartheta) = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-b_\nu \cos\nu\vartheta + a_\nu \sin\nu\vartheta) \end{cases}$$

---

[1]) z. B. Harnack, Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. — Math. Ann. Bd. 21, p. 305.

für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ durchweg oder wenigstens im allgemeinen convergent; dabei sollen die Coefficienten a_ν, b reelle Grössen von der Beschaffenheit sein, dass für $\nu = \infty$ der Grenzwerth bezw. die obere Unbestimmtheitsgrenze von mindestens einer der beiden Grössen $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$, $|b_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ den Werth 1 hat, während der entsprechende Werth für die andere dieser Grössen auch < 1 sein darf. Setzt man sodann:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu (a_\nu + b_\nu i) \cdot x^{-\nu} = f_1(x),$$

so convergirt diese Reihe für $|x| > 1$, sie divergirt für $|x| < 1$, während sie für $|x| = 1$ übergeht in:

$$(3) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu (a_\nu + b_\nu i)(\cos \nu\vartheta - i \cdot \sin \nu\vartheta)$$
$$= \varphi(\vartheta) - i \cdot \psi(\vartheta)$$

also in Folge der gemachten Voraussetzung auf dem Convergenzkreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt.

Angenommen nun, $f_1(x)$ lasse sich über das gesammte Innere des Einheits-Kreises als eindeutige analytische Function ohne singuläre Stellen fortsetzen, so muss eine für $|x| < 1$ convergirende Potenzreihe existiren, deren Summe $f_1(x)$ ist, also:

$$(4) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu \qquad (|x| < 1).$$

Es ist nun leicht zu ersehen, dass diese Potenzreihe auf dem Einheitskreise nicht convergiren kann. Denn wäre dies der Fall, so hätte man:

$$(5) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

und die Vergleichung mit (3) würde ergeben, dass gleichzeitig:

$$A_\nu = a_\nu + b_\nu i \quad \text{und} \quad A_\nu = -(a_\nu + b_\nu i)$$

sein müsste, was unmöglich ist.

Man hätte also auf diese Weise in der That eine Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ gewonnen, welche die oben verlangte Eigenschaft hat, auf dem Einheitskreise zu divergiren, obschon daselbst eine convergente trigonometrische Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ vorhanden ist.

Diese letztere besitzt hier in gewisser Beziehung noch einen ganz speciellen Charakter: sie bildet nämlich die Grenze der Entwickelung von $f_1(x)$ nach negativen Potenzen von x. Man erkennt indessen, dass diese Eigenschaft durchaus unwesentlich und in Wahrheit auch leicht zu beseitigen ist. Bezeichnet man nämlich mit $f_2 x = \sum B_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe, deren Convergenzradius $\varrho \geqq 1$ ist, und die im Falle $\varrho = 1$ auf dem Einheitskreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt, so wird offenbar die Reihe:

$$(6) \qquad f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu \pm B_\nu) \cdot x^\nu$$

für $x = e^{\vartheta i}$ gerade so divergiren, wie die Reihe $f_1(x)$, während

$$(7) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu \left\{ (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu\vartheta i} \pm B_\nu \cdot e^{\nu\vartheta i} \right\}$$

wird, und diese convergirende trigonometrische Reihe jetzt nicht mehr die Grenze der Entwickelung von $f(x)$ nach negativen, und im Falle $\varrho = 1$ auch nicht diejenige der Entwickelung von $f(x)$ nach positiven und negativen Potenzen von x bildet. Man erzielt dies z. B. am einfachsten, wenn man speciell setzt:

$$(8) \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (a_\nu - b_\nu i) \cdot x^\nu$$

also:

$$(9) \qquad f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu (a_\nu - b_\nu i)(\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

$$= \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta),$$

in welchem Falle dann $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ auf dem Einheitskreise durch die trigonometrische Reihe $2\varphi(\vartheta)$ bezw. $2i \cdot \psi(\vartheta)$ dargestellt wird.

Durch die vorstehende Betrachtung ist die Möglichkeit, Reihen der gedachten Art zu construiren, erwiesen, sobald es gelingt, Reihen nach negativen Potenzen von x, wie die oben mit $f_1(x)$ bezeichnete, herzustellen, welche auf dem Einheitskreise convergiren und in das Innere als eindeutige, durchweg reguläre Functionen von x fortgesetzt werden können. Um dies zu erreichen, wird man natürlich zunächst nicht wie oben von irgend einer bestimmten Annahme bezüglich der Coefficienten a_ν, b_ν ausgehen können, sondern vielmehr von einer Feststellung der Singularitäten, welche für $f_1(x)$ auf dem Einheitskreise erforderlich und zulässig erscheinen. Man erkennt aber ohne weiteres, dass hierbei ausserwesentlich singuläre Stellen, sowie algebraische und logarithmische Verzweigungspunkte jedenfalls von vornherein auszuschliessen sind, da die ersteren die Divergenz von $\sum (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu\vartheta i}$ nach sich ziehen, die letzteren die eindeutige Fortsetzbarkeit von $f_1(x)$ verhindern würden. Als möglicherweise zulässig bleiben daher nur wesentlich singuläre Stellen, welche noch die besondere Eigenschaft besitzen müssen, dass $f_1(x)$, falls die Variable x von aussen her oder längs der Peripherie des Einheitskreises sich einer solchen Stelle nähert, unter einer endlichen Grenze oder zum mindesten integrabel bleibt.

Der Einfluss, den eine derartige, auf dem Convergenzkreise einer Potenzreihe angenommene singuläre Stelle auf deren Convergenz und Divergenz ausübt, soll nun zunächst genauer untersucht werden.

§ 3.

Es sei $f(x)$ eindeutig und regulär für $|x| < R$, wo $R > 1$, mit Ausnahme einer einzigen Stelle auf dem Einheitskreise $x = a = e^{\alpha i}$. Bezüglich der Beschaffenheit dieser singulären Stelle $x = a$ unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

I. Es sei $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. das Integral $\int_{x_0}^{a} |f(x)| \cdot dx$ werde in diesem Falle mit $|x_0 - a|$ beliebig klein — eine Bedingung, welche z. B. stets erfüllt ist, wenn $|f(x)|$ im Innern und auf der Peripherie des Einheitskreises in jeder beliebigen Nähe der Stelle a stets unter einer festen Grenze bleibt.

Alsdann lässt sich zeigen, dass die zunächst für $|x| < 1$ geltende Potenzreihe für $f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} A_{\nu} x^{\nu}$ noch für $|x| = 1$ mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = a$ convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist.

Um dies nachzuweisen, denke man sich den Einheitskreis (E) construirt und die Stelle a mit einem Kreise (K) von beliebig klein anzunehmendem Radius ϱ umgeben. Bezeichnet man sodann mit (C) diejenige Curve, welche aus dem Einheitskreise (E) entsteht, wenn man das kleine durch den Kreis (K) ausgeschnittene Bogenstück (e) durch das entsprechende, innerhalb (E) verlaufende Bogenstück (k) von (K) ersetzt, so hat man für alle Stellen x im Innern von (C), also sicher für $|x| < 1 - \varrho$:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt$$

(wobei das Pluszeichen vor C die positive Integrationsrich-

tung andeuten soll. Da aber in Folge der gemachten Voraussetzung der von dem Bogenstücke (k) herrührende Bestandtheil dieses Integrals, gerade so wie ein über (e) zu erstreckendes mit (k) und (e) — also schliesslich mit ϱ — beliebig klein wird, und da andererseits $f(x)$ einen eindeutig bestimmten, von ϱ unabhängigen Werth hat, so kann man ohne weiteres das Integral über (k) durch das entsprechende über (e) ersetzen und erhält somit an Stelle der Beziehung (1) jetzt für $|x| < 1$ die folgende:

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt,$$

und hieraus in der üblichen Weise:

$$(3) \qquad f(x) = \sum_0^{\infty} {}^{\nu} A_\nu x^\nu$$

wo:

$$(4) \begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{(+E)} \frac{f(t)}{t} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta \\ A_\nu = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{(+E)} \frac{f(t)}{t^{\nu+1}} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{-\nu\eta i} \cdot d\eta \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Dabei lassen sich diese Coefficienten A_ν noch in folgender Weise umformen. Bezeichnet man wieder mit (C) den oben definirten Integrationsweg, so hat man offenbar:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder, da man hier wieder genau wie oben den Integrationsweg (C) durch den Weg (E) ersetzen kann:

$$(5) \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{\nu\eta i} \cdot d\eta = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Durch Addition und Subtraction dieser letzten Gleichung lässt sich daher A_ν in die doppelte Form setzen:

$$(6)\quad A_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und man erhält daher, wenn man $x = r\cdot e^{\vartheta i}$ setzt und $r < 1$ annimmt, aus Gl. (3) die Entwickelung:

$$(7)\ f(r\cdot e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}_\nu\, r^\nu\cdot\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu(\eta-\vartheta)\cdot d\eta$$

Andererseits muss sich $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen in eine mit eventuellem Ausschluss der einzigen Stelle $\vartheta = a$ convergirende Fourier'sche Reihe entwickeln lassen, nämlich:

$$(8)\quad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}_\nu \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot\cos\nu(\eta-\vartheta)\cdot d\eta$$

und da die Reihe (7) für $r = 1$ in diese letztere übergeht, so folgt, dass in dem hier betrachteten Falle die Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ noch für $x = e^{\vartheta i}$ (mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$, $\vartheta = a$) convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist. —

II. Es sei jetzt $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, wenn der Integrationsweg dem Aeusseren oder der Peripherie des Einheitskreises angehört.

Für das Gebiet $1 < |x| < R$ existirt alsdann nach dem Laurent'schen Satze eine Entwickelung von der Form:

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu = \sum_0^{\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu + \sum_1^{\infty} A_{-\nu} x^{-\nu},$$

wobei die Reihe der positiven Potenzen (welche sich auf die Constante A_0 reducirt, wenn $f(x)$ überhaupt keine weitere singuläre Stelle ausser $x = a$ besitzt) für $|x| < R$, also insbesondere noch für $|x| = 1$ absolut convergirt. Setzt man also Gl. (9) in die Form:

$$(10) \qquad \sum_1^{\infty}{}^{\nu} A_{-\nu} x^{-\nu} = f(x) - \sum_0^{\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu$$

so folgt mit Hülfe der Substitution $x = \frac{1}{y}$ aus dem Ergebnisse des Falles I ohne weiteres, dass $\sum A_{-\nu} x^{-\nu}$ noch auf dem Einheitskreise — mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$ — convergiren muss. Das Gleiche gilt somit von der Gesammtreihe (9), woraus dann auch wiederum die Identität von $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ sich ergiebt.

Daraus kann man aber mit Hilfe der in § 2 angestellten Betrachtung weiter schliessen, dass die im Innern des Einheitskreises geltende Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x auf dem Einheitskreise divergiren muss.

Um die Beschaffenheit dieser letzteren Reihe und ihre Beziehung zu der Fourier'schen Entwickelung von $f(e^{\vartheta i})$ genauer festzustellen, hat man auch hier wiederum für $|x| < 1 - \varrho$ zunächst:

$$(11) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt$$

(wo ϱ und (C) die in I angegebene Bedeutung haben). Bezeichnet man sodann mit (k') das ausserhalb des Einheitskreises verlaufende Bogenstück des kleinen Kreises um a, so

kann hier offenbar das über den aus (e) und (k') zusammengesetzten, geschlossenen Weg erstreckte Integral: $\int \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt$ durch Verkleinerung von ϱ beliebig klein gemacht werden, muss also, da es einen von ϱ unabhängigen, bestimmten Werth besitzt, gleich Null sein. Addirt man dieses Integral zu dem in Gl. (11), so ergiebt sich:

$$(12) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt$$

für $|x| < 1 - \varrho$, bezw. für $|x| < 1$, wenn man schliesslich ϱ unendlich klein werden lässt.

Um zunächst das zweite Integral auszuwerthen, hat man:

$$\frac{1}{t-x} = -\frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t-a}{x-a}} = -\sum_1^\infty {}^\nu \frac{(t-a)^{\nu-1}}{(x-a)^\nu}$$

und daher:

$$(13) \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^\infty {}^\nu (x-a)^{-\nu} \cdot \int\limits_{(+K)} f(t) \cdot (t-a)^{\nu-1} \cdot dt \\ \qquad = \sum_1^\infty {}^\nu C_{-\nu} \cdot (x-a)^{-\nu}. \end{cases}$$

Die rechte Seite lässt sich in eine für $|x| < |a|$ d. h. für $|x| < 1$ convergirende Reihe nach positiven Potenzen von x entwickeln, so dass sich ergiebt:

$$(14) \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu x^\nu,$$

wo:

$$(15) \qquad B_\nu = \sum_1^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot (\varkappa + \nu - 1)_\nu \cdot C_{-\varkappa} a^{-(\varkappa+\nu)}.$$

Ferner hat man für $|x| < 1$:

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_0^\infty {}^\nu B'_\nu x^\nu$$

wo:

$$(17)\left\{\begin{aligned} B'_0 &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta \\ B'_\nu &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+E} \frac{f(t)}{t^{\nu+1}}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{-\nu\eta i}\cdot d\eta \quad (\nu=1,2,3,\ldots) \end{aligned}\right.$$

Hiernach liefert Gl. (12) für $|x| < 1$ die folgende Entwickelung:

$$(18)\qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty{}^\nu B'_\nu x^\nu + \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}(x-a)^{-\nu} \\ &= \sum_0^\infty{}^\nu (B'_\nu + B_\nu)\cdot x^\nu, \end{aligned}$$

deren zweiter Theil, wie die Form der Coefficienten $C_{-\nu}$ (s. Gl. (13)) lehrt, die Gesammtheit derjenigen Bestandtheile enthält, welche die Stelle a zu einer (wesentlich) singulären machen: es sind nämlich die Coefficienten $C_{-\nu}$ genau diejenigen, welche man als Coefficienten der negativen Potenzen von $x-a$ erhalten würde, wenn man $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ nach dem Laurent'schen Satze entwickelt. Hieraus folgt aber, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}^\nu B'_\nu x^\nu = f(x) - \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}(x-a)^{-\nu}$$

noch für $x = a$, also schliesslich auf dem ganzen Einheitskreise sich regulär verhält. Sie besitzt somit einen Convergenzradius, der grösser als 1 sein muss (nämlich den Convergenzradius R[1]), so dass sie insbesondere für $|x| = 1$

[1]) Dabei ist $R = \infty$, wenn $f(x)$ keine weiteren singulären Stellen im Endlichen besitzt; und falls auch die Stelle $x = \infty$ keine singuläre ist, so reducirt sich jene Reihe auf das constante Anfangsglied:

$$\begin{aligned} B'_0 &= f(o) - \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu}\cdot(-a)^{-\nu} \\ &= f(o) - B_0. \end{aligned}$$

noch absolut convergirt. Da aber die Gesammt-Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x, wie oben bemerkt, für $|x| = 1$ divergirt, so erkennt man, dass diese Divergenz ausschliesslich von jenem zweiten Bestandtheile $\sum_0^\infty {}^\nu B_\nu x^\nu$ herrührt.

Es lässt sich aber auch genau angeben, welche convergente Entwickelung für $x = e^{\vartheta i}$ an die Stelle jenes divergenten Bestandtheils tritt, dergestalt dass für $f(e^{\vartheta i})$ schliesslich eine convergente trigonometrische — nämlich die Fourier'sche — Reihe zu Stande kommt.

Hierzu bemerke man, dass die Coefficienten B'_ν zwar in (17) zunächst genau in derselben Integralform erscheinen, wie die A_ν im Falle I (s. Gl. (4)): aber es ist a priori klar, dass sie nicht, wie jene, mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten von $f(e^{\vartheta i})$ identisch sein können. Um den Zusammenhang mit diesen letzteren aufzuklären, hat man die Beziehung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wofür man wiederum, analog wie oben, schreiben kann:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt$$

$$(19) \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{\nu\eta i}\cdot d\eta - D_\nu,$$

wo:

$$D_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} (a+(t-a))^{\nu-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\nu {}^\varkappa \int_{(K)} (\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot a^{\nu-\varkappa}\cdot (t-a)^{\varkappa-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$(20) \qquad D_\nu = \sum_1^\nu {}^\varkappa (\nu - 1)_{\varkappa - 1}\, C_{-\varkappa} \cdot a^{\nu - \varkappa}.$$

Durch Addition bezw. Subtraction von Gl. (17) und (19) folgt alsdann:

$$(21) \qquad B'_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu\eta \cdot d\eta \;-\; D_\nu \\ \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \sin \nu\eta \cdot d\eta \;+\; D_\nu, \end{cases}$$

so dass die Entwickelung (18) für $x = r \cdot e^{\vartheta i}$ und $r < 1$ sich folgendermaassen schreiben lässt:

$$(22) \; f(r e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}^\nu r^\nu \cdot \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu (\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$
$$- \sum_1^\infty {}^\nu D_\nu r^\nu e^{-\nu\vartheta i} + \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu r^\nu \cdot e^{\nu\vartheta i}.$$

Da andererseits:

$$(23) \; f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty {}^\nu \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu (\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$

und in Gl. (22) für $r = 1$ alles mit Ausnahme des letzten Bestandtheils convergent bleibt, so folgt:

$$(24) \qquad \lim_{r=1} \left\{ \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu r^\nu e^{\nu\vartheta i} \right\} = \sum_1^\infty {}^\nu D_\nu e^{-\nu\vartheta i},$$

womit die gesuchte Grenz-Entwickelung von $\sum B_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ gefunden ist.

§ 4.

I. Setzt man jetzt:

$$(1) \qquad f_1(x) = e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\,[1],$$

so erfüllt offenbar die einzige singuläre Stelle $x = 1$ dieser Function die im Art. I des vorigen Paragraphen eingeführten Bedingungen. Man hat nämlich, um das Verhalten von $f_1(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu erkennen:

$$(2) \qquad f_1(1 + \xi + \eta i) = e^{1 + \frac{\xi - \eta i}{\xi^2 + \eta^2}}$$

also:

$$(3) \qquad |f_1(1 + \xi + \eta i)| = e^{1 + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Gehört nun die Stelle $x = 1 + \xi + \eta i$ noch dem Innern des Einheitskreises an, so ist ξ wesentlich negativ und daher — was auch η bedeuten möge — stets: $|f_1(x)| < e$.

Gehört hingegen x der Peripherie des Einheitskreises an, so möge gesetzt werden $x = e^{\vartheta i}$, also:

$$x + 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} + e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$x - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2ie^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin\frac{\vartheta}{2}$$

und:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}$$

folglich:

$$(4) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}}$$

$$= e^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right)\right\},$$

---

[1] Der Factor e ist nur hinzugefügt, um einen möglichst einfachen Ausdruck für die Entwicklungs-Coefficienten zu erhalten (s. Gl. (9)).

so dass also in diesem Falle $|f_1(x)| = e^{\frac{1}{2}}$ wird — auch in beliebiger Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ d. h. $x = 1$.

Es muss daher nach Art. I des vorigen Paragraphen die zunächst für $|x| < 1$ geltende Entwickelung:

$$(5) \qquad f_1(x) = \sum_0^{\infty} {}^{\nu} A_\nu x^\nu$$

noch für $|x| = 1$ — mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$ — convergiren, d. h. es gilt die Entwickelung:

$$(6) \quad f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot \frac{\vartheta}{2}} = \sum_0^{\infty} {}^{\nu} A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

für $0 < \vartheta < 2\pi$, und dieselbe ist mit der Fourier'schen Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ identisch.

Daraus folgt dann noch insbesondere, dass die Reihe für $\vartheta = 0$ divergirt.

Was die Coefficienten A_ν betrifft, so findet man aus:

$$\begin{aligned} e \cdot e^{\frac{1}{x-1}} &= e \cdot \sum_0^{\infty} {}^{\varkappa} (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} (1-x)^{-\varkappa} \\ &= e \left(1 + \sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \sum_0^{\infty} {}^{\nu} (\varkappa + \nu - 1)_\nu x^\nu \right) \end{aligned}$$

unmittelbar für $\nu \geqq 1$:

$$\begin{aligned} (7) \qquad A_\nu &= e \cdot \sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\varkappa + \nu - 1)_\nu \\ &= e \cdot \sum_1^{\infty} {}^{\varkappa} (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} (\varkappa + \nu - 1)_{\varkappa - 1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

und speciell: $A_0 = e \cdot \sum_0^{\infty} {}^{\varkappa} (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} = 1$. Man kann aber auch die hier in Form unendlicher Reihen erscheinenden Grössen A_ν mit Hülfe der Mac Laurin'schen Entwickelung in geschlossener Form darstellen.

Man findet auf diese Weise:

$$A_0 = f_1(0) = 1$$

und für $\nu \geq 1$:

$$A_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot f_1^{(\nu)}(0) = \frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \left(\frac{d^\nu e^{\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu} \right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} \right)_{y=-1}.$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot \frac{d^\nu \varphi(y)}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \frac{d^\nu (y^{\nu-1} \cdot \varphi(y))}{d y^\nu}$$

$$= (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa \, \nu_\varkappa \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\varkappa-1)!} \cdot y^{\varkappa-1} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

$$(8) \qquad = (-1)^\nu \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

und daher:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot e^{1+y} \cdot \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa},$$

also schliesslich:

$$(9) \qquad A_\nu = \sum_1^\nu {}_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1}.$$

II. Die Function:

$$(10) \qquad f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = e \cdot e^{-\frac{1}{x-1}},$$

welche zu der eben betrachteten in der zwiefachen Beziehung steht:

$$(11) \qquad f_2(x) = \begin{cases} f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ e \cdot \frac{1}{f_1(x)} \end{cases},$$

genügt, wie leicht zu sehen, den in Art. II des vorigen Paragraphen statuirten Bedingungen. Da nämlich:

$$(12) \qquad f_2(1+\xi+\eta i) = e^{-\frac{\xi-\eta i}{\xi^2+\eta^2}}$$

also:

$$(13) \qquad |f_2(1+\xi+\eta i)| = e^{-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}}$$

so wächst dieser absolute Betrag über alle Grenzen, falls $|\eta| \leqq k \cdot |\xi|$ (k eine endliche positive Zahl) und ξ negativ, numerisch sehr klein genommen wird, also wenn x auf irgend einer geraden Linie aus dem Innern des Einheitskreises sich der Stelle 1 nähert. Da im übrigen $|f_2(x)|$, wie die erste der Beziehungen (11) lehrt, für Stellen ausserhalb oder auf der Peripherie des Einheitskreises auch in beliebiger Nähe der Stelle $x = 1$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus Art. II des vorigen Paragraphen, dass die für $|x| < 1$ geltende Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x| = 1$ divergiren muss, während andererseits $f_2(e^{\vartheta i})$ durch eine convergente trigonometrische Reihe mit ganz neuen Coefficienten darstellbar ist. Um diese letztere zu finden, kann man ohne weiteres die Formel (24) des vorigen Paragraphen anwenden. Man hat — unter Beibehaltung der dort angewendeten Bezeichnungen:

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}(x-1)^{-\nu}$$

also:
$$C_{-\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}$$

und daher (nach § 3, Gl. (20)):

$$D_\nu = \sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1} \quad \text{d. h.} = A_\nu \text{ (Gl. (9))},$$

so dass jene Gl. (24) hier lauten würde:

$$\lim_{r=1} \left\{ \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu r^\nu e^{\nu\vartheta i} \right\} = \sum_1^\infty {}^\nu A_\nu e^{-\nu\vartheta i}. \tag{14}$$

Beachtet man jetzt noch, dass die in § 3 mit B'_ν bezeichneten Grössen für $\nu \geqq 1$ sämmtlich Null sind (da $f_2(x)$ keine singuläre Stelle ausser $x = 1$ besitzt) und dass (§ 3, Fussnote):

$$B'_0 = f_2(0) - \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} = e - (e-1) = 1 = A_0,$$

so kann man Gl. (14) mit Hinzufügung des Gliedes B'_0 folgendermaassen schreiben:

$$f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta - i \cdot \sin \nu\vartheta), \tag{15}$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit man mit Hülfe der Gleichungen (11) und (6) sofort verificiren kann.

Es scheint mir auch nicht ohne Interesse, die aus den allgemeinen Ergebnissen des vorigen Paragraphen hergeleitete Divergenz der Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x| = 1$ nachträglich noch durch die Rechnung direct zu bestätigen.

Es werde gesetzt für $|x| < 1$:

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu x^\nu \tag{16}$$

(wobei also jetzt das im allgemeinen Falle und oben mit $B'_0 + B_0$ bezeichnete constante Glied der Einfachheit halber mit B_0 bezeichnet ist).

Alsdann hat man $B_0 = f_2(0) = e$ und für $\nu \geqq 1$ zunächst:

$$B_\nu = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu e^{-\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu}\right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu e^{-y}}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu}\right)_{y=-1},$$

also mit Benützung von Gl. (8):

$$\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{d^\nu e^{-y}}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu\cdot e^{-y}\cdot\sum_1^\nu{}^\varkappa(-1)^\varkappa\cdot\frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot y^{\nu+\varkappa}$$

schliesslich:

$$(17)\qquad B_\nu = e\cdot\sum_1^\nu{}^\varkappa\frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}.$$

Da hiernach:

$$B_\nu > e\left(1+\frac{\nu-1}{2}\right),$$

so wird mit $\nu=\infty$ auch $\lim B_\nu=\infty$, was dann nothwendig die Divergenz von $\Sigma B_\nu x^\nu$ für $|x|=1$ zur Folge hat.

III. Die soeben betrachtete trigonometrische Reihe für $f_2(e^{\vartheta i})$ convergirte mit Ausschluss der einen Stelle $\vartheta=0$. Man kann indessen aus den Ausdrücken $f_1(x)$, $f_2(x)$ leicht neue bilden, deren trigonometrische Entwickelung auf dem Einheitskreise ausnahmslos convergirt, während die betreffende Potenzreihe dort divergirt.

Setzt man zunächst:

$$\begin{aligned}(18)\quad f_3(x) &= f_1(x)-f_2(x)\\ &= e^{\frac{x}{x-1}} - e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{2}}\left\{e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}}\right\}\\ &= 2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2i}\cdot\frac{x+1}{x-1}\right)\end{aligned}$$

so wird die für $|x|<1$ geltende Potenzreihe:

$$(19)\qquad f_3(x) = \sum_0^\infty{}^\nu(A_\nu-B_\nu)\cdot x^\nu$$

wiederum für $x=e^{\vartheta i}$ divergiren. Dagegen wird die Reihe:

$$(20)\quad f_3(e^{\vartheta i}) = -2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) = 2i\sum_1^\infty{}^\nu A_\nu\cdot\sin\nu\vartheta$$

jetzt auch noch für $\vartheta = 0$, also **ausnahmslos** convergiren. Sie convergirt freilich in der Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ ungleichmässig — wegen der unendlich vielen Maxima und Minima, welche $f_3(e^{\vartheta i})$ daselbst besitzt.

Indessen auch diese Eigenschaft lässt sich noch beseitigen. Ich setze:

$$(21) \qquad F_1(x) = (x-1) \cdot f_1(x)$$

so hat man für $|x| < 1$ nach Gl. (5):

$$(22) \qquad F_1(x) = (x-1) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu$$
$$= -A_0 + \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) x^{\nu+1}$$

und nach § 3, Art. I für $0 < \vartheta < 2\pi$:

$$(23) \qquad F_1(e^{\vartheta i}) = 2i \cdot \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \left(\vartheta - \cot\frac{\vartheta}{2}\right)}$$
$$= -A_0 + \sum_0^\infty {}^\nu \left(A_\nu - A_{\nu+1}\right) \cdot e^{(\nu+1)\vartheta i}.$$

Diese Reihe convergirt aber auch noch für $\vartheta = 0$ — nämlich gegen den Werth Null (da in Folge der bewiesenen Convergenz von $\Sigma A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ offenbar $\lim\limits_{\nu=\infty} A_\nu = 0$ sein muss). Sie convergirt somit ausnahmslos und, da sie mit der Fourier'schen Reihe für die stetige Function $F_1(e^{\vartheta i})$ identisch ist, auch durchweg gleichmässig.

Betrachtet man nun ferner die Function:

$$(24) \qquad F_2(x) = (x-1) \cdot f_2(x)$$

so wird für $|x| < 1$:

$$(25) \quad F_2(x) = (x-1) \sum_0^\infty {}^\nu B_\nu x^\nu = -B_0 + \sum_0^\infty {}^\nu (B_\nu - B_{\nu+1}) \cdot x^{\nu+1}$$

und diese Reihe muss wiederum nach § 3, Art. II für $x = e^{\vartheta i}$ divergiren (da ja der Charakter der singulären Stelle $x = 1$ durch den Factor $(x - 1)$ keine wesentliche Veränderung erleidet).

Andererseits hat man aber für $|x| > 1$ nach Gl. (11) und (5):

$$\begin{aligned} F_2(x) &= (x-1) \cdot f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x-1) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^{-\nu} \end{aligned}$$

$$= A_0 x - \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot x^{-\nu} \tag{26}$$

und da nach § 3, Art. I diese Reihe noch für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen convergiren muss:

$$F_2(e^{\vartheta i}) = A_0 e^{\vartheta i} - \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot e^{-\nu \vartheta i}. \tag{27}$$

Die Vergleichung mit der Reihe (23) zeigt dann aber ohne weiteres, dass auch diese Reihe ausnahmslos und durchweg gleichmässig convergiren muss.

Hieraus erkennt man also, dass selbst in dem Falle, wo die Randfunction in eine ausnahmslos gleichmässig convergirende trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, man noch keineswegs ohne weiteres auf die Convergenz der im Innern geltenden Potenzreihe für die Stellen des Convergenzkreises schliessen darf.

§ 5.

Während das Charakteristische der in Art. II und III des vorigen Paragraphen betrachteten Beispiele darin bestand, dass die betreffenden Potenzreihen auf dem Convergenzkreise divergiren, obschon die zugehörige Randfunction durch eine convergente Fourier'sche Reihe darstellbar

ist, will ich jetzt, wie in § 1 angekündigt wurde, ein Beispiel einer Potenzreihe geben, welche nachweislich auf dem Convergenzkreise (mit Ausschluss einer einzigen Stelle) noch convergirt, wohingegen die Existenz einer „eigentlichen" Fourier'sche Reihe, d. h. einer solchen mit schlechthin convergenten Integral-Coefficienten (vgl. § 1) nach der Natur der dargestellten Function definitiv ausgeschlossen erscheint.

Ich setze:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)\,lg\,(1-x)} \tag{1}$$

also für $|x| < 1$:

$$f(x) = \frac{\sum_0^\infty{}^\nu x^\nu}{\sum_0^\infty{}^\nu \frac{x^\nu}{\nu+1}} = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \tag{2}$$

und daher:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{a_0}{\nu+1} + \frac{a_1}{\nu} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{2} + \frac{a_\nu}{1}\right) x^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu x^\nu \tag{3}$$

so dass sich zur Bestimmung der Coefficienten a_ν die Recursionsformel ergiebt:

$$\sum_0^\nu{}^\varkappa \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

und hieraus speciell:

$$a_0 = 1. \tag{5}$$

Ich zeige nun, dass die Coefficienten a_ν sämmtlich positiv sind, mit wachsendem Index ν beständig abnehmen und für $\nu = \infty$ gegen Null convergiren.

Schreibt man in Gl. (2) $(\nu - 1)$ statt ν, also:

$$\sum_0^{\nu-1}{}^\varkappa \frac{a_\varkappa}{\nu-\varkappa} = 1, \tag{6}$$

und setzt Gl. (4) in die Form:

$$(7) \qquad \sum_0^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} + a_\nu = 1,$$

so folgt durch Subtraction:

$$(8) \qquad a_\nu = \sum_0^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{(\nu-\varkappa)(\nu+1-\varkappa)}$$

Hieraus ergiebt sich, dass $a_\nu > 0$ ist, wenn das gleiche von $a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$ gilt. Da aber $a_0 = 1$, so folgt in der That allgemein: $a_\nu > 0$.

Schreibt man ferner die Gleichungen (4) und (6) folgendermaassen:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\nu+1} + \sum_1^{\nu}{}^{\varkappa} \dfrac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1 \\ \qquad\qquad \sum_1^{\nu}{}^{\varkappa} \dfrac{a_{\varkappa-1}}{\nu+1-\varkappa} = 1, \end{cases}$$

so folgt wiederum durch Subtraction und Multiplication mit $\nu+1$:

$$(10) \qquad (\nu+1) \sum_1^{\nu}{}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1} - a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1.$$

Setzt man hier $\nu - 1$ für ν, also:

$$(11) \qquad \nu \cdot \sum_1^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1} - a_\varkappa}{\nu-\varkappa} = 1$$

und subtrahirt diese Gleichung von der vorigen, so kommt:

$$\sum_1^{\nu-1}{}^{\varkappa} \left\{ \frac{\nu+1}{\nu+1-\varkappa} - \frac{\nu}{\nu-\varkappa} \right\} (a_{\varkappa-1} - a)_\varkappa + (a_{\nu-1} - a_\nu) = 0,$$

oder anders geschrieben:

$$(12) \qquad a_{\nu-1} - a_\nu = \sum_1^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{\varkappa(a_{\varkappa-1} - a_\varkappa)}{(\nu-\varkappa)(\nu+1-\varkappa)},$$

d. h. $a_{\nu-1} - a_\nu$ ist sicher positiv, falls alle vorangehenden Differenzen es sind. Da aber aus Gl. (10) für $\nu = 1$:

$a_0 - a_1 = \frac{1}{2}$ sich ergiebt, so folgt wiederum, dass allgemein: $a_{\nu-1} - a_\nu > 0$ sein muss.

Da hiernach die positiven Grössen a_ν mit wachsendem ν beständig abnehmen, so besitzen sie für $\nu = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth. Dieser muss aber Null sein, da andernfalls die linke Seite der Recursionsformel (4) wegen der Divergenz der harmonischen Reihe mit ν in's Unendliche wachsen würde.

Aus den eben nachgewiesenen Eigenschaften der Coefficienten a_ν folgt aber bekanntlich die gleichmässige Convergenz der Reihen $\Sigma a_\nu \cos \nu\vartheta$, $\Sigma a_\nu \sin \nu\vartheta$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $\vartheta = 0$, also schliesslich die gleichmässige Convergenz von $\Sigma a_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$. Hier divergirt in der That die betrachtete Reihe, wie sich daraus ergiebt, dass $\lim\limits_{x=1} f(x) = +\infty$ wird, wenn x auf dem Radius der Stelle 1 zustrebt.

Andererseits erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ als Function von x in der Nähe der Stelle $x = 1$ nicht integrabel ist, da sie für $x = 1$ so unendlich wird, wie $\frac{d\,lg\,lg(1-x)}{dx}$. Es muss dann aber auch $f(e^{\vartheta i})$ als Function von ϑ an der Stelle $\vartheta = 0$ die Integrabilität verlieren, da $(e^{\vartheta i} - 1) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin\frac{\vartheta}{2}$ für $\vartheta = 0$ gerade so von der ersten Ordnung verschwindet, wie $(x - 1)$ für $x = 1$. Hieraus folgt dann aber, dass die Integral-Coefficienten der Fourier'schen Reihe im „eigentlichen" Sinne divergent werden müssen: die betreffende Reihe ist also eine „uneigentliche" Fourier'sche Reihe in dem oben (§ 1) näher definirten Sinne.

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1895.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die heutige Festsitzung zu Ehren unseres hohen Protectors, des Prinz-Regenten Luitpold von Bayern, zu dem wir ehrfurchtsvoll aufblicken, mahnt uns zugleich, seiner Vorgänger aus dem Hause Wittelsbach zu gedenken, welche sich um unsere Akademie in hervorragendem Maasse verdient gemacht haben.

Vier von ihnen, welche wir theils als Stifter, theils als Reorganisatoren der Akademie verehren, hat unsere Akademie bei der Herstellung und Errichtung dieses Festsaales dadurch besonders zu ehren geglaubt, dass sie inmitten der Symbole und Wahlsprüche unserer Akademie ihre Portraits an der Decke des Saales anbrachte.

Zunächst ist es der eigentliche Stifter unserer Akademie, Kurfürst Maximilian III., welcher nach den Worten meines Vorgängers an dieser Stelle in ihr „einen Herd für Geistesbildung und ernste Studien für Bayern geschaffen“ und „in einem bislang finsteren Gebäude die erste Fackel angezündet hat“.

Ihm zur Seite ist das Bild des Kurfürsten Karl Theodor, des Stifters der kurpfälzischen Akademie der Wissenschaften, welche zugleich mit der alten kurbayerischen in der jetzigen königlichen Akademie fortbesteht. Karl Theodor hat sich unter uns dadurch ein bleibendes dankbares Angedenken gesichert, dass ein von ihm herstammender Fonds von etwa 180,000 Mark, der sogenannte Mannheimer Fonds, eines der wenigen Stiftungscapitalien ist, über deren Rente unsere Akademie in freier Weise für wissenschaftliche Zwecke verfügen kann.

Der dritte, als Stifter von uns verehrte Fürst aus dem Hause Wittelsbach ist König Max Joseph I., welcher im Jahre 1807 der Akademie eine den Fortschritten der Wissenschaft, sowie der grösseren Ausdehnung des bayerischen Staates angepasste Organisation gegeben hat.

Damals wurden unserer Akademie eine grössere Reihe von wissenschaftlichen Sammlungen und Instituten angegliedert und untergeordnet, von welchen ich die damalige Hofbibliothek, jetzige Hof- und Staatsbibliothek, das Naturaliencabinet, das chemische Laboratorium, das Münzcabinet, das Antiquarium, das astronomische Observatorium als die wichtigsten nenne.

Eine Aenderung in dieser Organisation veranlasste die Verlegung der Ludwig-Maximilians-Universität von Landshut nach München, welche im Jahre 1826 unter der Regierung König Ludwigs I. erfolgte. Manche der genannten und andere wissenschaftliche Institute und Sammlungen mussten nun in nähere Verbindung mit der Hochschule gebracht und desshalb aus ihrer bisherigen Abhängigkeit von der Akademie theilweise befreit werden. Es erschien als zweckmässig, in der Form einer Personalunion ihre Verbindung mit der Akademie fortzusetzen, indem die Akademiker, welche Conservatoren von Sammlungen waren, auch zu Universitätsprofessoren, oder umgekehrt Universitätsprofessoren zu Conserva-

toren ernannt wurden. Die bis dahin der Akademie angegliederten wissenschaftlichen Institute und Sammlungen bildeten eine eigene unter dem Generalconservatorium geeinte Körperschaft, während die Akademie den Charakter eines freien Vereins von Gelehrten erhielt, dessen Aufgabe es sein sollte, die Wissenschaft zu pflegen und zu erweitern, sowie durch vereinte Kraft Werke hervorzubringen, welche die Kräfte des Einzelnen übersteigen.

Zugleich bekam die Akademie die Aufgabe, die wissenschaftliche Verbindung mit gelehrten Körperschaften des In- und Auslandes zu pflegen.

Die Personalunion mit jenen im Generalconservatorium vereinten wissenschaftlichen Sammlungen wurde dadurch hergestellt, dass der anfangs gewählte, dann vom König ernannte Vorstand der Akademie zugleich zum Generalconservator bestimmt wurde, sowie dadurch, dass in der Regel nur Mitglieder der Akademie zu Conservatoren der wissenschaftlichen Sammlungen und Institute ernannt wurden.

Durch diese Neuorganisation, welche heute noch das Grundgesetz beider Körperschaften bildet, hat König Ludwig I. den Anspruch erworben, den Gründern unserer Akademie beigezählt zu werden.

Unsere Akademie ist in den seitdem verstrichenen sieben Jahrzehnten der ihr gestellten Doppelaufgabe treu geblieben: in einer langen Reihe von Bänden hat sie durch vereinte Kraft wissenschaftliche Werke von bleibendem Werthe veröffentlicht; in stets steigendem Masse hat sie mit gelehrten Körperschaften des In- und Auslandes wissenschaftlichen Verkehr gepflogen und auf dem Wege des Schriftentausches die inzwischen selbständig gewordene Hof- und Staatsbibliothek mit einem Schatz werthvoller Bücher bereichert.

Aber eine neue grosse Aufgabe ist seither an unsere Akademie wie an die anderen verwandten Gelehrten-Gesellschaften der alten und neuen Welt herangetreten, die Auf-

gabe nämlich, nicht nur die wissenschaftlichen Untersuchungen ihrer Mitglieder durch den Druck zu veröffentlichen, sondern in freierer Weise auch gelehrte Forschungen Anderer auf allen Wissensgebieten anzuregen und zu unterstützen. Dieser Aufgabe können sich die Akademien in ihrer freien, nicht durch die Zwecke des Unterrichts gebundenen Verfassung weit besser unterziehen, als die Universitäten, oder als eine etwa unmittelbar von der Staatsregierung abhängige Behörde.

König Maximilian II., mit seinem erleuchteten und warmen Interesse für die Wissenschaft, hatte diese neue Aufgabe der Akademie klar erkannt: er begründete darum bei der historischen Classe unserer Akademie eine eigene historische Commission und stellte ihr die Rente eines Capitals von 650,000 Mark zur Verfügung mit der Aufgabe, Quellenmaterial für die deutsche Geschichte in ihrem ganzen Umfang aufzufinden und herauszugeben, wissenschaftliche Arbeiten auf diesem Gebiete hervorzurufen und ihre Publication zu ermöglichen.

Auch für die Naturwissenschaften hatte König Max Aehnliches im Sinne. Leider hat sein früher Tod die Ausführung vereitelt, so dass nunmehr die beiden anderen Classen unserer Akademie, die philosophisch-philologische und die mathematisch-physikalische, mit einem gewissen Neid auf ihre reichere Schwester blicken.

Und doch darf ich, ohne den Vorwurf einer unbilligen Bevorzugung des Wissensgebietes, dem ich persönlich meine Dienste gewidmet habe, befürchten zu müssen, hier die Behauptung aufstellen, dass heutzutage das Bedürfniss, auf dem Gebiet der Naturwissenschaften wissenschaftliche Untersuchungen anzuregen und zu unterstützen, allgemein als das allerdringendste empfunden wird.

Unsere Hoffnung, dass auf dem Wege der Staatshülfe dieses Bedürfniss eine ausgiebige Befriedigung finden werde, ist — offen gestanden — nur eine geringe. Es wäre auch

unbillig, von der Mehrheit der aus der Masse des Volkes gewählten Vertreter zu erwarten, dass sie alle ein klares Verständniss dafür haben, dass mittelbar die der reinen Wissenschaft dienenden Untersuchungen und Forschungen stets auch eine die Wohlfahrt und den Wohlstand des ganzen Volkes fördernde Folge haben, wofür ich Beispiele in meiner Antrittsrede als Präsident der Akademie mitgetheilt habe. Ferner sind die Anforderungen, welche Heer, Schule, Verkehr u. s. w. an die Steuerkraft des Landes stellen, so gross, dass jede Landtagsverhandlung fast immer wie ein Markten zwischen Regierung und Volksvertretung über das Mehr oder Minder der für diese nothwendigsten Bedürfnisse erforderlichen Geldmittel erscheint.

Eher dürfen wir erwarten, dass einzelne einsichtige und zugleich wohlhabende Männer, namentlich Industrielle, welche mit einem durch eigene wissenschaftliche Vorbildung geschärften Urtheil erkannt haben, welche Vortheile der von ihnen betriebene Industriezweig mittelbar streng wissenschaftlichen Forschungen und Untersuchungen verdankt, sich ihrerseits der Wissenschaft gleichsam wieder dankbar erweisen werden, indem sie unserer Akademie die nöthigen Mittel zur Verfügung stellen, naturwissenschaftliche Forschungen und Untersuchungen anzuregen und zu unterstützen. Solche Männer werden nicht so engherzig oder kurzsichtig sein, zu erwarten, dass derartige Untersuchungen gleich von vornherein sofort einen in Geldwerth umzurechnenden Nutzen versprechen, sondern sich von den Wahlsprüchen, welche unsere Akademie bei Ausschmückung dieses Saales sich angeeignet hat, den vor Augen halten, welcher sagt: Serimus arbores posteritati profuturas! Lasst uns Bäume pflanzen der Nachwelt zum Nutzen!

Wahlen.

Der Classensekretär, Herr C. v. Voit, giebt sodann die von der Akademie vorgenommenen und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigten Wahlen bekannt. Es wurden in der mathematisch-physikalischen Classe gewählt:

zum ordentlichen Mitgliede:

Dr. Ferdinand Lindemann, ordentlicher Professor der Mathematik an der hiesigen Universität, bisher ausserordentliches Mitglied;

zum ausserordentlichen Mitgliede:

Dr. Wilhelm von Miller, ordentlicher Professor der Chemie an der hiesigen technischen Hochschule;

zu correspondirenden Mitgliedern:

1. Francesco Brioschi, Präsident der Accademia dei Lincei und Professor der Mathematik am R. Istituto tecnico superiore in Mailand;
2. Dr. Karl Neumann, Professor der mathematischen Physik an der Universität zu Leipzig;
3. Dr. Hendrik Antoon Lorentz, Professor der Physik an der Universität zu Leiden;
4. Dr. Alexander Kowalewski, Professor der Zoologie und Akademiker zu St. Petersburg;
5. Albert Gaudry, Professor der Paläontologie am Jardin des Plantes zu Paris, Membre de l'Institut;
6. Sir Archibald Geikie, Generaldirektor der Geological Survey von Grossbritannien in London;
7. Nevil Story Maskelyne, Professor der Mineralogie an der Universität zu Oxford.

Sitzung vom 7. Dezember 1895.

1. Herr H. Seeliger legt unter Besprechung des Inhalts eine Abhandlung des Herrn Professors Dr. R. Lehmann-Filhés in Berlin: „Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft" vor.

2. Herr W. Dyck bringt eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Eduard von Weber: „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen" in Vorlage, welche sich an die in der Februar-Sitzung d. J. mitgetheilte Untersuchung anschliesst.

3. Herr C. v. Voit theilt die Hauptresultate einer in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Alexander Ellinger ausgeführten Untersuchung: „Ueber den Nährwerth des Antipeptons" mit.

Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft.

Von R. Lehmann-Filhés.

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Seitdem Laplace im VII. Capitel des X. Buches der Mécanique céleste eine Untersuchung über die Wirkung einer „transmission successive de la pesanteur" mitgetheilt hat, sind kritische Discussionen des Newton'schen Gravitationsgesetzes für lange Zeit von der Tagesordnung verschwunden. Erst in neuerer Zeit hat man derartige Fragen, über deren Wichtigkeit wohl kein Streit sein kann, wieder mehr in's Auge gefasst, indem man einerseits die Folgen einer etwaigen endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation für

die planetarischen Bewegungen auf Grund verschiedener Hypothesen erörtert, andererseits in Erwägung gezogen hat, ob die Intensität der Kraft nicht in einer anderen Form als Function des Abstandes der sich anziehenden Massentheilchen gegeben werden muss, als es durch Newton geschehen ist.

Besonders die letztere Frage hat vor etwa einem Jahre eine sehr bedeutsame Förderung erfahren durch Seeliger's Aufsatz „Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz" (Astr. Nachrichten Nr. 3273). Eine weitere sehr umfassende Bereicherung der diesen Gegenstand betreffenden Literatur ist erfolgt durch die soeben erschienene Schrift von Carl Neumann, „Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen." Ueber den Inhalt dieses höchst wichtigen Werkes gab schon eine ohne Zweifel von C. Neumann selbst verfasste Anzeige in den „Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig", 28. Jahrgang, Nr. 5 eine vorläufige Orientirung.

Ueber die zuerst genannte Frage, die nach der zeitlichen Fortpflanzung der Gravitation, liegt gleichfalls eine ansehnliche Literatur vor. In dieses Gebiet gehören auch die Untersuchungen über den Einfluss, welchen z. B. die relative Geschwindigkeit der sich anziehenden Punkte auf Grund des Weber'schen oder Riemann'schen Gesetzes auf die planetarischen Bewegungen ausübt. Eine sehr schätzbare Zusammenstellung der wichtigsten einschlägigen Arbeiten ist erst kürzlich in dem Aufsatze von S. Oppenheim „Zur Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation", Jahresbericht über das k. k. Akademische Gymnasium in Wien für das Schuljahr 1894—95, gegeben worden.

Die vorhandenen Untersuchungen beziehen sich alle in erster Linie auf die Bewegung eines Planeten um die Sonne, und eine Anwendung der für diese gefundenen Formeln auf die Bewegung des Mondes, wie sie S. Oppenheim auf S. 18 seiner Schrift bei Besprechung der von v. Hepperger in den

Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1888 veröffentlichten Arbeit „Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation" von dessen Ausdruck für die Säcularstörung der Länge eines Planeten gemacht hat, führt zu keinem richtigen Resultat.

Der Verfasser der vorliegenden Untersuchung hat bereits im Jahre 1884 in Nr. 2630 der Astr. Nachrichten eine Untersuchung über die Bewegung eines Planeten unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft veröffentlicht. Die der Rechnung zu Grunde gelegte, später auch von v. Hepperger in Anwendung gebrachte Hypothese ist die, dass die Gravitation ähnlich wie das Licht von dem Kraftcentrum ausstrahlt, und dass die Gravitationsstrahlen sich wie die Lichtstrahlen mit constanter Geschwindigkeit gradlinig im Raume verbreiten. Bei der Begegnung mit einem Massenpunkte ist also seit dem Ausgange des betreffenden Impulses eine, wenn auch noch so kurze Zeit vergangen, in welcher der anziehende Punkt im Allgemeinen seinen Ort geändert hat. Hierdurch entstehen dann Bewegungsstörungen gegenüber dem Fall einer sich momentan ausbreitenden Kraft, welche eine gewisse Analogie zu den Aberrationserscheinungen besitzen.

Diese Hypothese ist als eine rein mathematische aufzufassen, indem irgend eine Vorstellung über die physikalische Natur der Gravitation, wie wir sie z. B. bei Laplace finden, darin nicht ausgesprochen ist.

Die Durchführung der erörterten Hypothese ist nun jedenfalls eine unvollständige, so lange sie nicht auf denjenigen Himmelskörper, dessen Bewegung uns wegen seiner grossen Nähe ihre Eigenthümlichkeiten am deutlichsten erkennen lässt, angewendet ist. Auch unter Zugrundelegung anderer Hypothesen, z. B. des Weber'schen Gesetzes, ist die Mondbewegung bisher noch nicht genauer untersucht worden, offenbar deshalb, weil, wie v. Hepperger am Schlusse seiner

Abhandlung ganz richtig bemerkt, die Entwickelungen „in Folge der krummlinigen Bewegung der Erde und der durch die Sonne bewirkten Störungen mit grossen Schwierigkeiten verbunden" sind.

Wenn hier in dieser Richtung ein erster Schritt, der hoffentlich Nachfolge finden wird, gemacht wird, so ist von vornherein zu beachten, dass das Verfahren bei der ungemeinen Complication der Aufgabe nur ein approximatives sein kann. Auch ist das Thema insofern eingeschränkt worden, als vorzugsweise die Säcularstörung der Länge zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wurde, wozu der Umstand, dass ein Theil der säcularen Beschleunigung des Mondes durch die Theorie noch nicht erklärt ist, aufzufordern schien. Dass hierbei der Radiusvector und die Länge auch in allgemeiner Weise untersucht werden mussten, liegt in der Natur der Sache.

Das Resultat ist ein negatives, da nicht eine Beschleunigung, sondern eine Verzögerung der Mondbewegung gefunden wird, deren Betrag nochdazu zu Annahmen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation nöthigte, welche wenig plausibel erscheinen.

Derartige Rechnungsergebnisse dürfen nach Ansicht des Verfassers nicht dahin führen, die Behandlung der betreffenden Fragen überhaupt aufzugeben. Vielmehr sollte man die Untersuchungen auf verschiedenen Grundlagen weiterführen, „nicht etwa", wie C. Neumann in der erwähnten Anzeige seines Buches sagt, „in der Hoffnung, dass eine solche Theorie sofort zu physikalisch wichtigen Aufschlüssen führen werde, sondern nur in dem Bestreben, den ganzen Kreis der hierher gehörigen Vorstellungen zu ordnen, zu erweitern und vielleicht für künftigen Gebrauch nutzbar zu machen.

I. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Wir nehmen ein im Raume festes Coordinatensystem an, in Bezug auf welches der Schwerpunkt der Erde zur Zeit t die Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 habe. Ein Element dm_0 der Erdmasse habe in Bezug auf den Schwerpunkt die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ und den Abstand ϱ_0 von demselben, so dass

$$\varrho_0^2 = \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 \qquad 1)$$

Das Massenelement der Erde wirkt anziehend auf das Massenelement dm des Mondes, dessen ganze Masse m heisse. In Bezug auf das feste Coordinatensystem habe dm die Coordinaten ξ'. η', ζ', in Bezug auf den Schwerpunkt der Erde x', y', z'. Der Abstand zwischen dm und dm_0 heisse δ, zwischen dm und dem Schwerpunkt der Erde dagegen r', sodass

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 &= (x' - \mathfrak{x}_0)^2 + (y' - \mathfrak{y}_0)^2 + (z' - \mathfrak{z}_0)^2 \\ &= (\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)^2 + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)^2 + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)^2 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Wenn die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Gravitation fortpflanzt, durch $\frac{1}{\theta}$ bezeichnet wird, so ist die Zeit, zu welcher der auf dm wirkende Impuls von dm_0 ausging, gleich $t - \theta\delta$, und zu dieser Zeit waren die Coordinaten von dm_0

$$\xi_0 + \mathfrak{x}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt^3} + \ldots$$

$$\eta_0 + \mathfrak{y}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt^3} + \ldots$$

$$\zeta_0 + \mathfrak{z}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt^3} + \ldots$$

Da nun aber jedenfalls $\theta\delta$, d. h. die Zeit, während welcher die Gravitation die Strecke δ durcheilt, eine sehr kleine Grösse ist, so genügt es, nur die erste Potenz der-

selben zu berücksichtigen, d. h. für die Coordinaten von dm_0 folgende Werthe anzunehmen:

$$\xi_0 + \mathfrak{x}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt}$$

$$\eta_0 + \mathfrak{y}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt}$$

$$\zeta_0 + \mathfrak{z}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt}$$

Der Abstand zwischen dm und dem durch vorstehende Coordinaten bestimmten Orte von dm_0 ist hiernach

$$\delta - \theta\delta\left[\frac{\partial\delta}{\partial(\xi_0+\mathfrak{x}_0)} \cdot \frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial(\eta_0+\mathfrak{y}_0)} \cdot \frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)} \cdot \frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]$$

oder mit Hülfe von 2)

$$\delta + \theta\left[(\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right],$$

und hiernach wird die der ξ-Achse parallele Componente der von dm_0 auf dm geäusserten Beschleunigung:

$$-k^2 dm_0 \frac{\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0 + \theta\delta\,\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt}}{\left\{\delta + \theta\left[(\xi'-\xi_0-\mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (\eta'-\eta_0-\mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (\zeta'-\zeta_0-\mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]\right\}^3}$$

oder, wenn auch hier wieder $\theta^2, \theta^3, \ldots$ vernachlässigt werden und $\xi' - \xi_0 = x'$, $\eta' - \eta_0 = y'$, $\zeta' - \zeta_0 = z'$ gesetzt wird:

$$- k^2 dm_0 \left\{\frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^3} + \frac{\theta}{\delta^2}\,\frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt}\right.$$

$$\left. - 3\theta \cdot \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^4}\left[(x' - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (y' - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (z' - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]\right\}$$

Wir werden nun zunächst in diesen Ausdruck die von der Rotation der Erde herrührenden Werthe von $\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{y}_0}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{z}_0}{dt}$

einsetzen. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Coordinatenaxen mit φ_0, χ_0, ψ_0, so ist

$$\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} = \chi_0\mathfrak{z}_0 - \psi_0\mathfrak{y}_0$$

$$\frac{d\mathfrak{y}_0}{dt} = \psi_0\mathfrak{x}_0 - \varphi_0\mathfrak{z}_0$$

$$\frac{d\mathfrak{z}_0}{dt} = \varphi_0\mathfrak{y}_0 - \chi_0\mathfrak{x}_0$$

Indem wir beachten, dass

$$\mathfrak{x}_0\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + \mathfrak{y}_0\frac{d\mathfrak{y}_0}{dt} + \mathfrak{z}_0\frac{d\mathfrak{z}_0}{dt} = 0$$

ist, erhalten wir für obige Beschleunigungscomponente folgenden Werth:

$$-k^2 dm_0\left\{\frac{x'-\mathfrak{x}_0}{\delta^3} + \frac{\theta}{\delta^2}\frac{d\xi_0}{dt} + \frac{\theta}{\delta^2}(\chi_0\mathfrak{z}_0 - \psi_0\mathfrak{y}_0)\right. \qquad 3)$$

$$-3\theta\frac{x'-\mathfrak{x}_0}{\delta^4}\left[(x'-\mathfrak{x}_0)\frac{d\xi_0}{dt} + (y'-\mathfrak{y}_0)\frac{d\eta_0}{dt} + (z'-\mathfrak{z}_0)\frac{d\zeta_0}{dt}\right]$$

$$\left. + 3\theta\frac{x'-\mathfrak{x}_0}{\delta^4}\left[\mathfrak{x}_0(\chi_0 z' - \psi_0 y') + \mathfrak{y}_0(\psi_0 x' - \varphi_0 z') + \mathfrak{z}_0(\varphi_0 y' - \chi_0 x')\right]\right\}$$

Um die Einwirkung der ganzen Erde zu erhalten, haben wir den Ausdruck 3) über die ganze Erdmasse m_0 zu integriren. Aus 1) und 2) folgt:

$$\delta^2 = r'^2 - 2(x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0) + \varrho_0^2,$$

woraus, wenn wir nur noch die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Mondparallaxe mitnehmen:

$$\frac{1}{\delta^n} = \frac{1}{r'^n}\left[1 + n\frac{x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0}{r'^2} - \frac{n}{2}\frac{\varrho_0^2}{r'^2} + \frac{n(n+2)}{2}\cdot\frac{(x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0)^2}{r'^4}\right] \qquad 4)$$

Wir nehmen nun an, dass die Erde eine aus homogenen concentrischen Schalen zusammengesetzte Kugel ist, so dass der Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt und alle Durchmesser

Hauptträgheitsaxen sind. Wir haben dann nach bekannten Sätzen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{x}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{y}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0\, dm_0 = 0\\
&\int \mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0 \mathfrak{x}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0\, dm_0 = 0\\
&\int \mathfrak{x}_0^2\, dm_0 = \int \mathfrak{y}_0^2\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0^2\, dm_0 = \frac{A_0}{2}\\
&\int \varrho_0^2\, dm_0 = \frac{3}{2} A_0\\
&\int (x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0)^2\, dm_0 = \frac{r'^2}{2} A_0.
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

wenn mit A_0 das Trägheitsmoment der Erde in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe bezeichnet wird.

Mit Hülfe von 4) erhalten wir hieraus folgende Relationen, in denen nicht über Glieder zweiter Ordnung hinsichtlich der Mondparallaxe hinausgegangen ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dm_0}{\delta^n} = \frac{1}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-1)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{\mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}}\cdot x';\ \int \frac{\mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} y';\ \int \frac{\mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} z'\\
&\int \frac{\mathfrak{x}_0^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{A_0}{2r'^n};\ \int \frac{\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \int \frac{\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \int \frac{\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = 0\\
&\int \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{x'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{y' - \mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{y'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{z' - \mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{z'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{(x' - \mathfrak{x}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{x'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n}\\
&\int \frac{(y' - \mathfrak{y}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{y'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n}\\
&\int \frac{(z' - \mathfrak{z}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{z'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n}
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{(y'-\mathfrak{y}_0)(z'-\mathfrak{z}_0)}{\delta^n}\, dm_0 &= \frac{y'z'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
\int \frac{(z'-\mathfrak{z}_0)(x'-\mathfrak{x}_0)}{\delta^n}\, dm_0 &= \frac{z'x'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)(y'-\mathfrak{y}_0)}{\delta^n}\, dm_0 &= \frac{x'y'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\mathfrak{x}_0}{\delta^n}\, dm_0 &= x'^2\frac{nA_0}{2r'^{n+2}} - \frac{A_0}{2r'^n} \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\mathfrak{y}_0}{\delta^n}\, dm_0 &= x'y'\frac{nA_0}{2r'^{n+2}} \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\mathfrak{z}_0}{\delta^n}\, dm_0 &= x'z'\frac{nA_0}{2r'^{n+2}}
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Mit Hülfe dieser Relationen erhält man als Integral von 3):

$$-k^2\left\{\frac{m_0x'}{r'^3} + \left(m_0 - \frac{A_0}{r'^2}\right)\frac{\theta}{r'^2}\frac{d\xi_0}{dt}\right. \quad 7)$$

$$\left. -3\left(m_0 - \frac{A_0}{r'^2}\right)\theta\frac{x'}{r'^4}\left(x'\frac{d\xi_0}{dt} + y'\frac{d\eta_0}{dt} + z'\frac{d\zeta_0}{dt}\right) - \frac{A_0\theta}{2r'^4}(\chi_0 z' - \psi_0 y')\right\}$$

Wir haben hieraus die Componente der bewegenden Kraft zu berechnen, welche die Erde auf den ganzen Mond ausübt. Zu diesem Zweck ist der vorstehende Ausdruck 7) mit dem Massenelement des Mondes zu multipliciren und über die ganze Mondmasse zu integriren. Wir nennen die geocentrischen Coordinaten des Mondschwerpunktes x, y, z; die auf diesen Schwerpunkt bezogenen Coordinaten des Massenelementes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; den Abstand des letzteren vom Schwerpunkte ϱ. Dann ist in 7) einzusetzen

$$x' = x + \mathfrak{x},\quad y' = y + \mathfrak{y},\quad z' = z + \mathfrak{z},$$

$$r'^2 = (x+\mathfrak{x})^2 + (y+\mathfrak{y})^2 + (z+\mathfrak{z})^2 = r^2 + 2(x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z}) + \varrho^2,$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\varrho^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2.$$

Hieraus folgt nach Analogie von 4)

$$\frac{1}{r'^n} = \frac{1}{r^n}\left[1 - n\,\frac{x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z}}{r^2} - \frac{n}{2}\frac{\varrho^2}{r^2} + \frac{n(n+2)}{2}\frac{(x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z})^2}{r^4}\right],$$

wobei Glieder von der dritten Ordnung in Bezug auf den scheinbaren Mondradius vernachlässigt sind.

Man kann hieraus eine Anzahl von Reductionsgleichungen herleiten, die, vom Vorzeichen der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ abgesehen, den Formeln 5) und 6) analog sind, wobei der Mond, wie vorher die Erde, als eine aus concentrischen homogenen Schalen zusammengesetzte Kugel angesehen wird, deren Gesammtmasse m und deren Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe A heissen möge.

Durch Integration erhält man demnach aus 7):

$$-k^2\left\{\frac{m m_0}{r^3}x + \left(m m_0 - \frac{m A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi_0}{dt}\right. \tag{8}$$

$$\left.-3\left(m m_0 - \frac{m A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi_0}{dt} + y\frac{d\eta_0}{dt} + z\frac{d\zeta_0}{dt}\right) - \frac{m A_0 \theta}{2 r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)\right\}$$

wobei die Producte der Trägheitsmomente vernachlässigt sind.

Dies ist die ξ-Componente der bewegenden Kraft, welche die Erde auf den Schwerpunkt des Mondes ausübt. Für den Einfluss der Sonne kommt natürlich ein ähnliches Glied hinzu, in welchem wir folgende Bezeichnungen anwenden wollen:

Es sei m_1 die Masse, A_1 das auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe bezogene Trägheitsmoment der Sonne, welche wir wie Erde und Mond als eine aus homogenen concentrischen Schalen zusammengesetzte Kugel ansehen. Die Coordinaten des Schwerpunktes (Mittelpunktes) in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem seien ξ_1, η_1, ζ_1, die geocentrischen Coordinaten desselben Punktes x_1, y_1, z_1; der Abstand der Mittelpunkte von Erde und Sonne heisse r_1.

Die heliocentrischen Coordinaten des Mondmittelpunktes werden demnach $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$. Der Abstand des letzteren vom Sonnenmittelpunkte heisse Δ. Endlich seien φ_1, χ_1, ψ_1 die Winkelgeschwindigkeiten der Sonnenrotation um die drei Coordinatenaxen.

Hiernach wird die Componente der von Erde und Sonne auf den Mond ausgeübten bewegenden Kraft, wenn wir für den Augenblick die auf das feste Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Mondmittelpunktes ξ, η, ζ nennen:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\left\{\frac{m\,m_0}{r^3}x + \left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi_0}{dt}\right.$$

$$-3\left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi_0}{dt} + y\frac{d\eta_0}{dt} + z\frac{d\zeta_0}{dt}\right)$$

$$\left. - \frac{m\,A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)\right\}$$

$$-k^2\left\{\frac{m\,m_1}{\Delta^3}(x - x_1) + \left(m\,m_1 - \frac{m\,A_1 + m_1\,A}{\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}\frac{d\xi_1}{dt}\right.$$

$$-3\left(m\,m_1 - \frac{m\,A_1 + m_1\,A}{\Delta^2}\right)\frac{\theta(x - x)}{\Delta^4}\left((x - x_1)\frac{d\xi}{dt} + (y - y_1)\frac{d\eta}{dt} + (z - z_1)\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$\left. - \frac{m\,A_1}{2}\frac{\theta}{\Delta^4}\Big(\chi_1(z - z_1) - \psi_1(y - y_1)\Big)\right\} \qquad 9)$$

Da wir nun die geometrische Bewegung des Mondes zu untersuchen haben, so muss auch $\frac{d^2\xi_0}{dt^2}$ gebildet und von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ abgezogen werden, wodurch $\frac{d^2x}{dt^2}$ erhalten wird.

Man findet, wenn φ, χ, ψ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit der Mondrotation bedeuten:

$$m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = -k^2\left\{-\frac{m\,m_0}{r^3}x + \left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi}{dt}\right.$$

$$-3\left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0\,A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi}{dt} + y\frac{d\eta}{dt} + z\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$\left. + \frac{m_0\,A}{2}\cdot\frac{\theta}{r^4}(\chi z - \psi y)\right\}$$

$$- k^2 \left\{ - \frac{m_0 m_1}{r_1^3} x_1 + \left(m_0 m_1 - \frac{m_0 A_1 + m_1 A_0}{r_1^2} \right) \frac{\theta}{r_1^2} \frac{d\xi_1}{dt} \right.$$

$$- 3 \left(m_0 m_1 - \frac{m_0 A_1 + m_1 A_0}{r_1^2} \right) \frac{\theta x_1}{r_1^4} \left(x_1 \frac{d\xi_1}{dt} + y_1 \frac{d\eta_1}{dt} + z_1 \frac{d\zeta_1}{dt} \right)$$

$$\left. + \frac{m_0 A_1}{2} \cdot \frac{\theta}{r_1^4} (\chi_1 z_1 - \psi_1 y_1) \right\} \qquad 10)$$

Bildet man nun aus 9) und 10) die Differenz

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_0}{r^3} x = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + X, \qquad 11)$$

wo

$$\Omega = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right) \qquad 12)$$

In dem Ausdrucke für X, der alle mit θ multiplicirten Glieder umfasst, wollen wir für die Componenten der absoluten Geschwindigkeiten der Sonne constante Werthe annehmen, indem wir setzen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \alpha \ , \ \frac{d\eta_1}{dt} = \beta \ , \ \frac{d\xi_1}{dt} = \gamma.$$

Dies ist allerdings nicht völlig streng; denn wenn die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes des ganzen Systems die constanten Werthe α, β, γ haben, so ist

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \left(1 + \frac{m_0}{m_1} + \cdot \cdot \right) \alpha - \frac{m_0}{m_1} \frac{d\xi_0}{dt} - \cdot \cdot,$$

wo jeder Planet zu berücksichtigen ist. Setzen wir in X einfach $\frac{d\xi_1}{dt} = \alpha$, so vernachlässigen wir damit entweder Glieder von der Ordnung der Producte der Planetenmassen oder von der Ordnung des Quotienten einer Planetenmasse dividirt durch r_1^4. Beide Vernachlässigungen bedürfen keiner Rechtfertigung.

Ferner beachten wir, dass

$$\xi_0 = \xi_1 - x_1,\ \eta_0 = \eta_1 - y_1,\ \zeta_0 = \zeta_1 - z_1;$$
$$\xi = \xi_1 + x - x_1,\ \eta = \eta_1 + y - y_1,\ \zeta = \zeta_1 + z - z_1.$$

Hiernach findet sich

$$\left.\begin{aligned}
X = & -k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\alpha - k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}\alpha \\
& \qquad + k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}\alpha \\
& + k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dr_1}{dt} + k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m_0mr^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dx}{dt} \\
& + 3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& - 3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{dx_1}{dt}+y\frac{dy_1}{dt}+z\frac{dz_1}{dt}\right) \\
& - 3k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta x}{r^3}\frac{dr}{dt} \\
& + 3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta(x-x_1)}{\Delta^4}[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)] \\
& - 3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta x_1}{r_1^4}(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) \\
& + \frac{k^2A}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi z-\psi y) + \frac{k^2A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi_0 z-\psi_0 y) \\
& - \frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)(\chi_1 z_1-\psi_1 y_1) + \frac{k^2A_1}{2}\frac{\theta}{\Delta^4}(\chi_1 z-\psi_1 y)
\end{aligned}\right\}\ 13)$$

Durch cyklische Vertauschung innerhalb der drei Buchstabengruppen x, y, z; α, β, γ; φ, χ, ψ erhält man aus X auch die Componenten Y und Z der von der nicht momentanen Fortpflanzung der Gravitation herrührenden störenden Kraft.

Die Differentialgleichungen der geocentrischen Bewegung des Mondes lauten also:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 (m + m_0) \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} + X \\
\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 (m + m_0) \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} + Y \\
\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 (m + m_0) \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} + Z
\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Wir werden dieselben jedoch für unsere Zwecke transformiren. Zunächst erhalten wir leicht

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - 2k^2 \frac{m + m_0}{r} + k^2 \frac{m + m_0}{a} \qquad 15)$$

$$= 2\int\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz\right) + 2\int (X dx + Y dy + Z dz).$$

wo $k^2 \frac{m + m_0}{a}$ die Integrationsconstante ist und die Integrale als untere Grenze die Osculationsepoche haben.

Ferner geben die Gleichungen 14)

$$\frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_0}{r} = \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + z \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)$$
$$+ (x X + y Y + z Z) \qquad 16)$$

Weil nun aber $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, also

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r^2)}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + \frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2},$$

so erhält man durch Addition von 15) und 16)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 (r^2)}{dt^2} - k^2 \frac{m + m_0}{r} + k^2 \frac{m + m_0}{a}$$
$$= 2\int\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz\right) + \left(x \frac{\partial \Omega}{\partial x} + y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + z \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)$$
$$+ 2\int (X dx + Y dy + Z dz) + (x X + y Y + z Z)$$

Betrachten wir allein die durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation hervorgebrachte Störung, so erhalten wir, wenn δ jene Störung andeutet:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2\frac{m+m_0}{r^3}(r\delta r) \tag{17}$$
$$= 2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right) + \delta\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$
$$+ 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (xX + yY + zZ)$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von Ω lässt sich indessen diese Gleichung noch auf eine andere Form bringen.

Da bis zu den Gliedern von der Ordnung $\frac{r^2}{r_1^3}$ incl.

$$\frac{1}{\varDelta} = \frac{1}{r_1}\left[1 + \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{3}{2}\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{r_1^4}\right],$$

so ist

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{3}{2}\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{r_1^4}\right],$$

oder, da das Glied $\frac{k^2 m_1}{r_1}$ weder zu $\delta\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$, noch zu $2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right)$ einen Beitrag liefert:

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[\frac{3}{2}\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{r_1^4} - \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r^2}\right].$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[3\,\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^4}\cdot x_1 - \frac{x}{r_1^2}\right],$$

und analog $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$.

Ferner:

$$x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z} = r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = 2\,\Omega$$

Mit Rücksicht auf das Spätere sollen hier an Stelle der geocentrischen Coordinaten x_1, y_1, z_1, r_1 der Sonne die auf den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond bezogenen Sonnen-

coordinaten x_0, y_0, z_0, r_0 eingeführt werden. Man findet sofort:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot x \\ y_1 &= y_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot y \\ z_1 &= z_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot z. \end{aligned} \qquad 18)$$

Bezeichnen wir den Factor $\frac{m}{m+m_0}$, der etwa $\frac{1}{81}$ beträgt, durch ε und vernachlässigen ε^2, ε^3 . ., so finden wir

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{3}{2}\frac{(xx_0+yy_0+zz_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}\right]$$
$$+ \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{9}{2}\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4}\cdot r^2 - \frac{15}{2}\frac{(xx_0+yy_0+zz_0)^3}{r_0^6}\right]\varepsilon$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\,\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4}\cdot x_0 - \frac{x}{r_0^2}\right]$$
$$+ \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\,\frac{r^2 x_0}{r_0^4} + 6\,\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4} - \frac{15(xx_0+yy_0+zz_0)^2}{r_0^6}\right]\varepsilon.$$

Analog $\frac{\partial \Omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$.

Wie man sieht sind die mit ε behafteten Glieder von einer höheren Ordnung als die letzten, welche wir bei der Entwickelung noch berücksichtigen wollten, weshalb wir innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze haben:

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{3}{2}\frac{(xx_0+yy_0+zz_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}\right]$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\,\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4}\cdot x_0 - \frac{x}{r_0^2}\right].$$

Hiernach darf man also in der Störungsfunction und ihren Ableitungen die geocentrischen Coordinaten der Sonne durch die auf den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond bezogenen (barycentrischen) Sonnencoordinaten ersetzen.

Wir führen nun ein

$$x = r\cos\beta\cos\lambda \qquad x_0 = r_0\cos\beta_0\cos\lambda_0$$
$$y = r\cos\beta\sin\lambda \qquad y_0 = r_0\cos\beta_0\sin\lambda_0$$
$$z = r\sin\beta \qquad z_0 = r_0\sin\beta_0$$

wo λ und β die geocentrische Länge und Breite des Mondes, λ_0 und β_0 die barycentrische Länge und Breite der Sonne sind. Es ergiebt sich

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{4}\frac{r^2}{r_0^3}[3\cos^2\beta - 2 + 3\cos^2\beta\cos(2\lambda - 2\lambda_0) + 3\sin 2\beta\sin 2\beta_0\cos(\lambda - \lambda_0)],$$

wo bereits die zweite Potenz der Sonnenbreite β_0 vernachlässigt ist. Da jedoch die Störungsfunction schon einen starken Verkleinerungsfactor hat, so werden wir hier auch das Quadrat der Mondbreite sowie das Product der Breiten von Sonne und Mond vernachlässigen, so dass einfach

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{4}\frac{r^2}{r_0^3}[1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_0)]. \qquad 19)$$

Da

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial z_0}dz_0 = d\Omega$$

und

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_0}dy_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial z_0}dz_0 = \frac{\partial\Omega}{\partial r_0}dr_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}d\lambda_0,$$

so nimmt Gleichung 17) folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2\frac{m + m_0}{r^3}(r\delta r) = 4\delta\Omega - 2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}dr_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}d\lambda_0\right) + 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (xX + yY + zZ)$$

oder, da

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{k^2 m_1}{2}\frac{r}{r_0^3}[1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_0)],$$

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2 \left\{\frac{m+m_0}{r^3} - \frac{2m_1}{r_0^3}[1+3\cos(2\lambda - 2\lambda_0]\right\} r\delta r$$
$$= 4\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + 4\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}\delta r_0 + 4\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}\delta\lambda_0$$
$$-2\int\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}d\delta r_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}d\delta\lambda_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial r_0}dr_0\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_0}dr_0\delta\lambda\right.$$
$$+\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0^2}dr_0\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0\partial\lambda_0}dr_0\delta\lambda_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta\lambda$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda_0^2}d\lambda_0\delta\lambda_0\right\} \qquad 20)$$
$$+2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + (xX + yY + zZ)$$

Die beiden ersten Gleichungen 14) geben

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = \left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + (xY - yX)$$
$$= \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + (xY - yX)$$

Da nun $\frac{xdy - ydx}{dt}$ $r^2\cos^2\beta\frac{d\lambda}{dt}$, so hat man

$$r^2\cos^2\beta\frac{d\lambda}{dt} = \text{Const.} + \int\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \int(xY - yX)\,dt,$$

wo die Integrationen von der Osculationsepoche beginnen.

Hinsichtlich der von der endlichen Geschwindigkeit der Gravitation herrührenden Störung hat man demnach

$$r^2\cos^2\beta\frac{d\delta\lambda}{dt} + 2\frac{d\lambda}{dt}r\cos\beta\,\delta\,(r\cos\beta)$$
$$= \delta\int\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \int(xY - yX)\,dt.$$

Mit Vernachlässigung der zweiten Potenz der Mondbreite kann man diese Gleichung schreiben

$$r^2\frac{d\delta\lambda}{dt} \quad -2\frac{d\lambda}{dt}(r\delta r) + \int\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda}\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\delta\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_0}\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_0}\delta\lambda_0\right)dt$$
$$+\int(xY - yX)\,dt \qquad 21)$$

Eine scharfe Integration der Gleichungen 20) und 21) müsste natürlich durch abwechselnde Annäherungen erfolgen.

Die in den entwickelten Gleichungen auftretenden partiellen ersten und zweiten Differentialquotienten der Störungsfunction Ω sind innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenzen die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} &= -\frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial \Omega}{\partial r_1} &= -\frac{3}{4} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)] \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1} &= +\frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial r_1} &= -\frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{r}{r_1^4} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial r_1} &= +\frac{9}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_1^2} &= +3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^5} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)] \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_1 \partial \lambda_1} &= -\frac{9}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial \lambda_1} &= +3 k^2 m_1 \frac{r}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial \lambda_1} &= +3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda_1^2} &= -3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial \lambda} &= -3 k^2 m_1 \frac{r}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} &= -3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1)
\end{aligned}\right\} 22)$$

Ferner ergiebt sich aus 13) und den analogen Ausdrücken für Y und Z:

$$
\begin{aligned}
xX+yY+zZ = {} & 2k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& -2k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdx_1+ydy_1+zdz_1}{dt} \\
& -2k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r}\cdot\frac{dr}{dt} \\
& -k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& +k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& +3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(r^2-xx_1-yy_1-zz_1) \\
& \qquad\times[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)] \\
& -3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(xx_1+yy_1+zz_1) \\
& \qquad\times(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) \\
& -\frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[\varphi_1(zy_1-yz_1)+\chi_1(xz_1-zx_1) \\
& \qquad+\psi_1(yx_1-xy_1)]
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
xY-yX = {} & k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha y-\beta x) \\
& +k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha y-\beta x) \\
& -k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha y-\beta x) \\
& +k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdy_1-ydx_1}{dt} \\
& +k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdy-ydx}{dt} \\
& -3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(xy_1-yx_1)[\alpha(x-x_1) \\
& \qquad+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)] \\
& -3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(xy_1-yx_1)(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) \\
& +\frac{k^2A}{2}\frac{\theta}{r^4}[x(\psi x-\varphi z)-y(\chi z-\psi y)]
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$+\frac{k^2 A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}[x(\psi_0 x-\varphi_0 z)-y(\chi_0 z-\psi_0 y)]$$

$$-\frac{k^2 A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[x(\psi_1 x_1-\varphi_1 z_1)-y(\chi_1 z_1-\psi_1 y_1)]$$

$$+\frac{k^2 A_1}{2}\frac{\theta}{\Delta^4}[x(\psi_1 x-\varphi_1 z)-y(\chi_1 z-\psi_1 y)]$$

$$Xdx+Ydy+Zdz=-k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)$$

$$-k^2 m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)$$

$$+k^2 m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)$$

$$+k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dxdx_1+dydy_1+dzdz_1}{dt}$$

$$+k^2 m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt}$$

$$+3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^3}dr(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

$$25)\qquad -3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^3}dr\frac{xdx_1+ydy_1+zdz_1}{dt}$$

$$-3k^2 m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 dt$$

$$+3k^2 m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(rdr-x_1dx-y_1dy-z_1dz)$$

$$\times[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)]$$

$$-3k^2 m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(x_1dx+y_1dy+z_1dz)$$

$$\times(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)$$

$$+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\varphi+A_0\varphi_0}{r^4}+\frac{A_1\varphi_1}{\Delta^4}\right)(ydz-zdy)$$

$$+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\chi+A_0\chi_0}{r^4}+\frac{A_1\chi_1}{\Delta^4}\right)(zdx-xdz)$$

$$+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{r^4}+\frac{A_1\psi_1}{\Delta^4}\right)(xdy-ydx)$$

$$-\frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[\varphi_1(y_1dz-z_1dy)$$

$$+\chi_1(z_1dx-x_1dz)+\psi_1(x_1dy-y_1dx)]$$

II. Die Störungen der Planetenbewegung.

In den Differentialgleichungen 20) und 21) treten die Störungen δr_0 und $\delta \lambda_0$ auf, d. h. die von der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation herrührenden Störungen des Abstandes der Sonne von dem Schwerpunkte des Systems Erde-Mond und der auf diesen Punkt bezogenen Sonnenlänge. Diese Störungen sind natürlich identisch mit denen der heliocentrischen Coordinaten jenes Schwerpunktes. Zur Berechnung dieser lassen sich die bereits entwickelten Differentialgleichungen nach einer entsprechenden Vereinfachung benutzen. Setzen wir nämlich in 9) und 10) $m_1 = 0$, so erhalten wir die Bewegung der Masse m in Bezug auf die Centralmasse m_0. Ist diese Masse ein System von Massenpunkten, so sind diese im Schwerpunkt vereinigt zu denken. Für diese setzen wir $\frac{d\xi_0}{dt} = \alpha$, $\frac{d\eta_0}{dt} = \beta$, $\frac{d\zeta_0}{dt} = \gamma$, wo α, β, γ constant sind. Hierbei sind offenbar Glieder von der Ordnung der Masse m vernachlässigt, welche wir als ausserordentlich klein im Verhältniss zu m_0 betrachten. Wir werden deshalb überhaupt Glieder mit dem Factor m weglassen.

Hiernach wird

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha + \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \beta + \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma + \frac{dz}{dt}$$

Unter Mitnahme der Hauptglieder erhalten wir somit:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2 \left\{\frac{m_0}{r^3}x + \frac{m_0 \theta \alpha}{r^2} - 3 m_0 \frac{\theta x}{r^4}(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \frac{A_0 \theta}{2}(\chi_0 z - \psi'_0 y)\right\}$$

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = + \frac{k^2 m x}{r^3}.$$

Die Subtraction ergiebt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(m_0 + m)\frac{x}{r^3} = -k^2\theta m_0 \frac{\alpha}{r^2}$$

$$+ 3k^2\theta m_0 (\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{x}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)$$

Unter dem Centralkörper wollen wir jetzt die Sonne verstehen, so dass $m_0 = 1$ gesetzt werden kann.

Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} X &= -k^2\theta\frac{\alpha}{r^2} + 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{x}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y) \\ Y &= -k^2\theta\frac{\beta}{r^2} + 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{y}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\psi_0 x - \varphi_0 z) \\ Z &= -k^2\theta\frac{\gamma}{r^2} + 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{z}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\varphi_0 y - \chi_0 x), \end{aligned}\right\} \quad 26)$$

so werden die Differentialgleichungen der heliocentrischen Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} &= X \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} &= Y \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} &= Z \end{aligned}\right\} \quad 27)$$

Aus diesen Gleichungen folgt in bekannter Weise, wenn $\frac{k^2(1+m)}{a}$ eine Integrationsconstante bedeutet,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2k^2(1+m)}{r} + \frac{k^2(1+m)}{a} = 2\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

wo von der Osculationsepoche an zu integriren ist.

Ferner folgt aus 27)

$$\frac{x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r} = xX + yY + zZ;$$

mithin, weil

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + \frac{x\,d^2x + y\,d^2y + z\,d^2z}{dt^2},$$

ergeben die obigen Gleichungen durch Addition

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{k^2(1+m)}{r} + \frac{k^2(1+m)}{a} = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (xX + yY + zZ).$$

Bezeichnet δr die von der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation herrührende Störung des Radiusvectors, so ergiebt vorstehende Gleichung:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{(r\delta r)}{r^3} = 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (xX + Yy + zZ). \qquad 28)$$

Wir suchen zweitens eine Gleichung, welche die Störung der in der xy-Ebene gezählten wahren Länge λ giebt.

Man hat aus 27)

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = xY - yX;$$

also, wenn man von der Osculationsepoche an integrirt und für diese Parameter und Neigung der Bahn gegen die xy-Ebene mit p und i bezeichnet,

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = k\sqrt{p(1+m)}\cos i + \int(xY - yX)\,dt.$$

Setzt man zur Abkürzung die Projection von r auf die xy-Ebene gleich ϱ, so hat man also

$$\varrho^2\frac{d\lambda}{dt} = k\sqrt{p(1+m)}\cdot\cos i + \int(xY - yX)\,dt.$$

Für die Störung $\delta\lambda$ hat man demnach die Differentialgleichung

$$\varrho^2\frac{d\delta\lambda}{dt} + 2\frac{d\lambda}{dt}\varrho\delta\varrho = \int(xY - yX)\,dt.$$

Da nun $\delta\varrho$ von der Ordnung der Grösse θ ist, so kann man statt $\frac{d\lambda}{dt}$ den ungestörten Werth

$$\frac{k\sqrt{p(1+m)}}{\varrho^2}\cdot\cos i$$

einsetzen, so dass

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2k\sqrt{p(1+m)}}{\varrho^4}\cos i\,(\varrho\delta r) + \frac{1}{\varrho^2}\int (xY - yX)\,dt. \qquad 29)$$

Da

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2,$$

so ist

$$\varrho\delta\varrho = r\delta r - z\delta z.$$

Man wird demnach auch δz zu berechnen haben. Aus der dritten Gleichung 27) ergiebt sich sofort

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{\delta z}{r^3} = 3k^2(1+m)\,z\frac{(r\delta r)}{r^5} + Z. \qquad 30)$$

Wir wenden uns zunächst zu der Störungsgleichung für δr. Man findet

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = &-\frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} \\ &+ \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}[\varphi_0(ydz - zdy) \\ &+ \chi_0(zdx - xdz) + \psi_0(xdy - ydx)] \end{aligned}$$

Nun ist, wenn ☊ die Knotenlänge, i die Neigung der Bahn gegen die xy-Ebene, p den Parameter bedeutet,

$$\begin{aligned} ydz - zdy &= k\sqrt{p(1+m)}\sin i \sin ☊\, dt \\ zdx - xdz &= -k\sqrt{p(1+m)}\sin i \cos ☊\, dt \\ xdy - ydx &= k\sqrt{p(1+m)}\cos i\, dt, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = &-\frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} \\ &+ \frac{k^3\theta A_0\sqrt{p}}{2r^4}[\varphi_0 \sin i \sin ☊ - \chi_0 \sin i \cos ☊ \\ &+ \psi_0 \cos i]\,dt. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne mit ω_0, die Neigung und Knotenlänge des Sonnenäquators in Bezug auf die xy-Ebene mit J_0 und K_0, so ist

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \quad \omega_0 \sin J_0 \sin K_0 \\ \chi_0 &= -\omega_0 \sin J_0 \cos K_0 \\ \psi_0 &= \quad \omega_0 \cos J_0, \end{aligned}$$

wodurch die letzte Klammergrösse wird

$$\omega_0 [\sin J_0 \sin i \cos (K_0 - \Omega) + \cos J_0 \cos i] = \omega_0 \cos N_0,$$

wenn N_0 die Neigung des Sonnenäquators gegen die Planetenbahn bezeichnet. Hierdurch wird

$$X dx + Y dy + Z dz = -\frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz)$$
$$+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} + \frac{1}{2}k^3\theta A_0 \omega_0 \sqrt{p} \cos N_0 \frac{dt}{r^4}$$

Nun ist

$$\int \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{r^2} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^2} + 2\int (\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3},$$

mithin

$$\int_0^t (X dx + Y dy + Z dz) \quad -k^2\theta \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^2} + k^2\theta \int_0^t (\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3}$$
$$+ \frac{1}{2}k^3\theta A_0 \omega_0 \sqrt{p} \cos N_0 \int_0^t \frac{dt}{r^4}$$
$$+ k^2\theta \frac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0}{r_0^3},$$

wo die Integrale als untere Grenze die Osculationsepoche $t = 0$ haben, und x_0, y_0, z_0, r_0 für diese Zeit gelten.

Ist u das Argument der Breite, so findet man leicht

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r(\alpha' \cos u + \beta' \sin u),$$

wo wie in A. N. 2630

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos \Omega + \beta \sin \Omega \\ \beta' &= -\alpha \sin \Omega \cos i + \beta \cos \Omega \cos i + \gamma \sin i. \end{aligned}$$

Da ferner $u = v + \omega$, wenn v die wahre Anomalie, ω den Bogenabstand des Perihels vom Knoten bedeutet, so ist auch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r\,(\alpha'' \cos v + \beta'' \sin v),$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \quad \alpha' \cos\omega + \beta' \sin\omega \\ \beta'' &= -\alpha' \sin\omega + \beta' \cos\omega. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\frac{dr}{r^3} = \alpha'' \int \cos v\,\frac{dr}{r^2} + \beta'' \int \sin v\,\frac{dr}{r^2}.$$

Diese Integrationen sind leicht auszuführen.

Da nämlich $dr = k\sqrt{\frac{1+m}{p}} \cdot e \sin v\, dt$, wo e die Excentricität bedeutet, so ist

$$\int \cos v\,\frac{dr}{r^2} = \frac{ek}{2}\sqrt{\frac{1+m}{p}}\int \frac{\sin 2v}{r^2}\,dt = \frac{e}{2p}\int \sin 2v\,dv = -\frac{e}{4p}\cos 2v$$

$$\int \sin v\,\frac{dr}{r^2} = \frac{ek}{2}\sqrt{\frac{1+m}{p}}\int \frac{1-\cos 2v}{r^2}\,dt = \frac{e}{2p}\int (1-\cos 2v)\,dv = \frac{e}{4p}(2v - \sin 2v).$$

Mithin

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\frac{dr}{r^3} = -\frac{e}{4p}(\alpha'' \cos 2v + \beta'' \sin 2v - 2\beta'' v) + \text{Const.}$$

Endlich ist

$$\int \frac{dt}{r^4} = \frac{1}{k\sqrt{p\,(1+m)}}\int \frac{dv}{r^2} = \frac{1}{k p^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+m}}\int (1 + e\cos v)^2\,dv$$

$$= \frac{1}{k p^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+m}}\int \left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos v + \frac{e^2}{2}\cos 2v\right) dv$$

$$= \frac{1}{k p^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+m}}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)v + 2e \sin v + \frac{e^2}{4}\sin 2v\right] + \text{Const.}$$

Hiernach wird

$$\int_0^t (Xdx+Ydy+Zdz) = -k^2\theta\frac{\alpha''\cos v+\beta''\sin v}{r^2}$$

$$-\frac{k^2\theta e}{4p}(\alpha''\cos 2v+\beta''\sin 2v-2\beta'' v)$$

$$+\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{2p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)v\right.$$

$$\left.+2e\sin v+\frac{e^2}{4}\sin 2v\right]$$

$$+k^2\theta\frac{\alpha''\cos v_0+\beta''\sin v_0}{r_0^2} \tag{31}$$

$$+\frac{k^2\theta e}{4p}(\alpha''\cos 2v_0+\beta''\sin 2v_0+2\beta'' v_0$$

$$-\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{2p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)v_0\right.$$

$$\left.+2e\sin v_0+\frac{e^2}{4}\sin 2v_0\right].$$

In 28) tritt auch die Grösse $xX+yY+zZ$ auf. Wir finden leicht

$$\begin{aligned} xX+yY+zZ &= 2k^2\theta\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{r^2} \\ &= 2k^2\theta\frac{\alpha''\cos v+\beta''\sin v}{r} \end{aligned} \tag{32}$$

Setzt man nun 31) und 32) in 28) ein, so ergiebt sich

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{r\delta r}{r^3} = -\frac{k^2\theta e}{2p}(\alpha''\cos 2v+\beta''\sin 2v-2\beta'' v)$$

$$+\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)v\right.$$

$$\left.+2e\sin v+\frac{e^2}{4}\sin 2v\right]$$

$$+C,$$

wo

$$C=2k^2\theta\frac{\alpha''\cos v_0+\beta''\sin v_0}{r_0^2}+\frac{k^2\theta e}{2p}(\alpha''\cos 2v_0+\beta''\sin 2v_0-2\beta'' v_0)$$

$$-\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{p^2}\left[\left(1+\frac{c^2}{2}\right)v_0+2e\sin v_0+\frac{e^2}{4}\sin 2v_0\right]$$

Setzen wir ferner

$$D = \frac{k^2\theta}{p}\left(e\beta'' + \frac{A_0\omega_0\cos N_0}{p}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\right)$$
$$E = \frac{2k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{p^2},$$
$$F = -\frac{k^2\theta}{2p}\left((\beta'' - \frac{A_0\omega_0\cos N_0}{p}\frac{e}{2}\right)$$
$$G = -\frac{k^2\theta}{2p}\alpha'',$$

so nimmt die Differentialgleichung für δr folgende Gestalt an

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{r\delta r}{r^3} \qquad 33)$$
$$= C + Dv + Ee\sin v + Fe\sin 2v + Ge\cos 2v.$$

Der Umstand, dass diese Differentialgleichung auf der rechten Seite nur die Variable v enthält, ist ein Fingerzeig, dass man diese vortheilhaft als unabhängige Variable gebrauchen kann.

Mit Zugrundelegung der für die ungestörte Bewegung geltenden Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{r^2}, \quad \frac{dr}{dt} = k\sqrt{\frac{1+m}{p}}\, e\sin v,$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k^2(1+m)e\cos v}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

erhält man, wenn man $1+m=1\ldots$ setzt,

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\delta r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\delta r}{dt} + r\frac{d^2\delta r}{dt^2}$$
$$= \frac{k^2e\cos v}{r^2}\delta r + \frac{2k^2e\sin v}{r^2}\frac{d\delta r}{dv} + r\left(\frac{k^2p}{r^4}\frac{d^2\delta r}{dv^2} - \frac{2k^2e\sin v}{r^3}\frac{d\delta r}{dv}\right)$$
$$= \frac{k^2p}{r^3}\left(\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \frac{er\cos v}{p}\delta r\right) = \frac{k^2p}{r^3}\left(\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \delta r - \frac{r}{p}\delta r\right).$$

Setzt man dies in 33) ein, so ergiebt sich

$$\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \delta r = \frac{r^3}{k^2p}(C + Dv + Ee\sin v \qquad 34)$$
$$+ Fe\sin 2v + Ge\cos 2v) = W.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v + \sin v \int \cos v W dv$$
$$- \cos v \int \sin v W dv. \qquad 35)$$

Die Berechnung dieses Ausdruckes erfordert folgende Integrationen:

$$\int r^3 \cos v dv \qquad \int r^3 \sin v dv$$
$$\int r^3 v \cos v dv \qquad \int r^3 v \sin v dv$$
$$\int r^3 \sin v \cos v dv \qquad \int r^3 \sin^2 v dv$$
$$\int r^3 \sin 2v \cos v dv \qquad \int r^3 \sin 2v \sin v dv$$
$$\int r^3 \cos 2v \cos v dv \qquad \int r^3 \cos 2v \sin v dv.$$

Diese Integrale lassen sich meist ohne grosse Mühe in geschlossener Form erhalten, nämlich

$$\int r^3 \cos v dv = a^3 \sqrt{1-e^2} \left[\left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E - \frac{3}{2} e \mu t \right]$$

(μ = mittlere Bewegung, E = exc. Anomalie.)

$$\int r^3 \sin v \cos v dv = a^3 (1 - e^2) \left[e \cos E - \frac{1}{4} \cos 2E \right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \cos v dv = \frac{2p}{e^3} \left[p^2 \log \operatorname{nat} r - 2pr + \frac{r^2}{2} \right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \cos v dv = \frac{2p^3}{e^3} v - \frac{2a^3}{e^3} \sqrt{1-e^2} \left(4 - \frac{11}{2} e^2 + 3e^4\right) E$$
$$+ \frac{6a^3}{e^3} \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 \mu t + \frac{4a^3}{e^2} \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right) \sin E$$
$$- \frac{a^3 \sqrt{1-e^2}}{2e} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \sin 2E$$

$$\int r^3 \sin v dv = \frac{p}{2e} r^2$$

$$\int r^3 v \sin v dv = \frac{p}{2e} \left(r^2 v - a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \mu t\right)$$

$$\int r^3 \sin^2 v dv = \frac{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4} (2E - \sin 2E)$$

$$\int r^3 \sin 2v \sin v\, dv = \frac{2a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2}\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{3}{2}e\right)E - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e}v \right.$$
$$\left. + (1-e^2)\sin E + \frac{e}{4}\sin 2E\right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \sin v\, dv = \frac{p}{2e} r^2 \cos 2v + \frac{2p^2}{e^2}\left(a\cos E + \frac{p}{e}\log\text{nat}\, r\right)$$

Die Benutzung dieser Ausdrücke würde aber eine wenig übersichtliche Form für die Störung δr ergeben, und wir ziehen es deshalb vor, die Integrale nach Potenzen von e zu entwickeln, wobei wir nur die Anfangsglieder zu kennen brauchen.

Da $r^3 = p^3(1 - 3e\cos v \ldots)$ ist, so findet man leicht

$$\int r^3 \cos v\, dv = p^3\left[-\frac{3}{2}ev + \sin v - \frac{3}{4}e\sin 2v \ldots\right]$$

$$\int r^3 v \cos v\, dv = p^3\left[v\sin v + \cos v - \frac{3}{4}ev^2 - \frac{3}{4}ev\sin 2v - \frac{3}{8}e\cos 2v \ldots\right]$$

$$\int r^3 \sin v \cos v\, dv = p^3\left[-\frac{1}{4}\cos 2v + \frac{3}{4}e\cos v + \frac{1}{4}e\cos 3v \ldots\right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \cos v\, dv = p^3\left[-\frac{1}{2}\cos v - \frac{1}{6}\cos 3v + \frac{3}{4}e\cos 2v + \frac{3}{16}e\cos 4v \ldots\right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \cos v\, dv = p^3\left[\frac{1}{2}\sin v + \frac{1}{6}\sin 3v - \frac{3}{4}ev \right.$$
$$\left. - \frac{3}{4}e\sin 2v - \frac{3}{16}e\sin 4v \ldots\right]$$

$$\int r^3 \sin v\, dv = p^3\left[-\cos v + \frac{3}{4}e\cos 2v \ldots\right]$$

$$\int r^3 v \sin v\, dv = p^3\left[\sin v - v\cos v - \frac{3}{8}e\sin 2v + \frac{3}{4}ev\cos 2v \ldots\right]$$

$$\int r^3 \sin^2 v\, dv = p^3\left[-\frac{1}{4}\sin 2v + \frac{1}{2}v - \frac{3}{4}e\sin v + \frac{1}{4}e\sin 3v \ldots\right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \sin v\, dv = p^3\left[\frac{1}{2}\sin v - \frac{1}{6}\sin 3v - \frac{3}{4}ev + \frac{3}{16}e\sin 4v \ldots\right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \sin v\, dv = p^3\left[\frac{1}{2}\cos v - \frac{1}{6}\cos 3v + \frac{3}{16}e\cos 4v \ldots\right]$$

In einigen dieser Integrale tritt v ausserhalb des Sinus und Cosinus auf; diese Glieder sind in dem zweiten und siebenten Integrale allerdings nicht vollständig angegeben, jedoch sind sie deshalb nicht von Bedeutung, weil sie mit höheren Potenzen von e multiplicirt sind und ausserdem periodische Factoren haben; v tritt in diesen nur in der ersten Potenz auf. Dagegen tritt v^2 nur in dem zweiten Integrale auf, und zwar ohne periodischen Factor. Die Vernachlässigung von e^2, e^3 ... ist daher berechtigt, da die wichtigsten der säcularen Glieder mitberücksichtigt sind.

Nun ist

$$\begin{aligned}\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v &+ \frac{C}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \cos v\, dv - \cos v \int r^3 \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{D}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 v \cos v\, dv - \cos v \int r^3 v \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Ee}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \sin v \cos v\, dv \right.\\ &\qquad \left. - \cos v \int r^3 \sin^2 v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Fe}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \sin 2v \cos v\, dv \right.\\ &\qquad \left. - \cos v \int r^2 \sin 2v \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Ge}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \cos 2v \cos v\, dv \right.\\ &\qquad \left. - \cos v \int r^3 \cos 2v \sin v\, dv\right\}\end{aligned}$$

d. h. mit Vernachlässigung von e^2, e^3 ....

$$\begin{aligned}\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v + \frac{Ca^2}{k^2} + \frac{Da^2}{k^2} v \qquad 36)\\ - \frac{3}{2}\frac{Ca^2}{k^2} ev \sin v - \left(\frac{3}{4}\frac{Da^2}{k^2} + \frac{1}{2}\frac{Ea^2}{k^2}\right) ev \cos v - \frac{3}{4}\frac{Da^2}{k^2} ev^2 \sin v\\ - \frac{1}{3}\frac{Fa^2}{k^2} e \sin 2v - \frac{1}{3}\frac{Ga^2}{k^2} e \cos 2v\end{aligned}$$

Die Constanten c_1 und c_2 hat man gemäss der Bedingung zu bestimmen, dass für die Osculationsepoche, d. h. für $t = 0$, sowohl δr als auch $\frac{d\delta r}{dt}$ verschwinden müssen. Wenn wir

die mit e multiplicirten Glieder bei dieser Bestimmung, welche durchaus nicht die äusserste Schärfe beansprucht, vernachlässigen, so haben wir mit Rücksicht auf die Relation

$$\frac{d\delta r}{dt} = \frac{d\delta r}{dv} \cdot \frac{k\sqrt{p}}{r^2}$$

folgende Bedingungsgleichungen:

$$c_1 \sin v_0 + c_2 \cos v_0 + \frac{a^2}{k^2}(C + Dv_0) = 0$$

$$c_1 \cos v_0 - c_2 \sin v_0 + \frac{a^2}{k^2} D \qquad = 0,$$

woraus

$$c_1 = -\frac{a^2}{k^2}[(C + Dv_0) \sin v_0 + D \cos v_0]$$

$$c_2 = -\frac{a^2}{k^2}[(C + Dv_0) \cos v_0 - D \sin v_0].$$

Es ist zweckmässig, an dieser Stelle eine kurze Erwägung über die Coefficienten C, D, E, F, G anzustellen. In diesen tritt neben den Grössen α'' und β'' auch der Coefficient $\frac{A_0 \omega_0}{p}$ auf, in welchem A_0 das Trägheitsmoment der Sonne, ω_0 die Rotationsgeschwindigkeit derselben, p den Parameter der Planetenbahn bedeutet. Obgleich nun das Trägheitsmoment des Sonnenkörpers unbekannt ist, so können wir doch annehmen, dass es kleiner als $\frac{2}{5} R_0^2$ ist, wenn R_0 den Radius der Sonne bedeutet, deren Masse wir, wie bereits früher gesagt, gleich 1 gesetzt haben. Hieraus ergiebt sich nun, dass $\frac{A_0 \omega_0}{p}$ ein ausserordentlich kleiner Bruchtheil der Geschwindigkeit eines Planeten, z. B. der Erde, sein muss, während α'' und β'' entweder von derselben Ordnung wie diese Geschwindigkeit, oder doch wenigstens merkliche Bruchtheile derselben sind. Wir werden deshalb mit vollem Rechte alle Glieder mit dem Factor $\frac{A_0 \omega_0}{p}$ vernachlässigen, wodurch

unsere Constanten werden, wenn nur die erste Potenz von e mitberücksichtigt wird:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{2k^2\theta}{a}(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0) + \frac{k^2\theta e}{2a}(\alpha''\cos 2v_0 \\ &\qquad + \beta''\sin 2v_0 - 2\beta'' v_0) \\ D &= \frac{k^2\theta}{a} e\beta'' \\ E &= 0 \\ F &= -\frac{k^2\theta}{2a}\beta'' \\ G &= -\frac{k^2\theta}{2a}\alpha'' \end{aligned}\right\} \quad 37)$$

Es wird übrigens erlaubt sein, in C das zweite Glied gegen das erste zu vernachlässigen, so dass

$$C = \frac{2k^2\theta}{a}(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0). \qquad 38)$$

Hiernach erhält man für die soeben bestimmten Integrationsconstanten:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -2a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\sin v_0 \\ &= -a\theta(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \beta'') \\ c_2 &= -2a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\cos v_0 \\ &= -a\theta(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin v_0 + \alpha'') \end{aligned}\right\} \quad 39)$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck 36) für δr ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta r = 2a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0) &- a\theta(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \beta'')\sin v \\ &- a\theta(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 + \alpha'')\cos v \\ &+ \frac{1}{6}a\theta\beta'' e\sin 2v + \frac{1}{6}a\theta\alpha'' e\cos 2v \\ 40) \qquad &+ a\theta\beta'' ev \\ &- 3a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)ev\sin v \\ &- \frac{3}{4}a\theta\beta'' e^2 v\cos v \\ &- \frac{3}{4}a\theta\beta'' e^2 v^2 \sin v. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist formell vollständig ausreichend, wenn auch in den Coefficienten kleine Glieder den Hauptgliedern gegenüber vernachlässigt sind.

Wir wenden uns jetzt zu der Gleichung 29), welche die Störung der Länge in der xy-Ebene giebt. Wir setzen fest, dass für die Osculationsepoche die Bahnebene mit der xy-Ebene zusammenfällt, also $i = 0$, $z = 0$, $\varrho = r$ ist. Allmählich werden i und z von 0 verschiedene Werthe annehmen, deren zweite Potenzen und Producte mit Störungsgrössen wir jedoch vernachlässigen wollen. Wir werden deshalb durchweg $\varrho = r$, $\delta\varrho = \delta r$, $\cos i = 1$ setzen, und Gleichung 29) wird, wenn man die Planetenmasse der Sonnenmasse gegenüber vernachlässigt:

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2k\sqrt{p}\,\frac{\delta r}{r^3} + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)\,dt.$$

Da aber

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = \frac{d\delta\lambda}{dv}\cdot\frac{k\sqrt{p}}{r^2},$$

so geht diese Gleichung über in

$$\frac{d\delta\lambda}{dv} = -2\,\frac{\delta r}{r} + \frac{1}{k\sqrt{p}}\int(xY - yX)\,dt. \qquad 41)$$

Wir haben nach 26)

$$xY - yX = \frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha y - \beta x) + \frac{k^2\theta A_0\psi_0}{2r^2}.$$

Nun ist

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i)$$
$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i),$$

mithin, wenn man

$$\cos i = 1,$$
$$u = v + \omega,$$
$$\Omega + \omega = \Pi$$

setzt,

$$xY - yX = -k^2\theta(-\alpha\sin\Pi + \beta\cos\Pi)\frac{\cos v}{r}$$
$$+ k^2\theta(\alpha\cos\Pi + \beta\sin\Pi)\frac{\sin v}{r} + \frac{k^2\theta A_0\psi_0}{2r^2}.$$

Zur Abkürzung wollen wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} \alpha\cos\Pi + \beta\sin\Pi &= \alpha''' \\ -\alpha\sin\Pi + \beta\cos\Pi &= \beta''' \end{aligned}\right\} 42)$$

Vernachlässigen wir wie bei der Berechnung von δr das völlig bedeutungslose mit A_0 multiplicirte Glied, so ist

$$xY - yX = k^2\theta\frac{\alpha'''\sin v - \beta'''\cos v}{r}.$$

Das Integral $\int(xY - yX)\,dt$ lässt sich zwar mit Leichtigkeit streng berechnen, da

$$\int\frac{\sin v}{r}\,dt = \frac{\sqrt{p}}{ek}\log\text{nat}\,r$$
$$\int\frac{\cos v}{r}\,dt = \frac{\sqrt{p}}{ek}\left(v - \frac{E}{\cos\varphi}\right),$$

wo φ den Excentricitätswinkel bedeutet.

Wir ziehen jedoch auch an dieser Stelle eine Entwickelung nach den Potenzen von e vor, von denen wir übrigens, mit Vernachlässigung unwesentlicher Glieder, nur die erste beibehalten.

Wir finden

$$\int(xY - yX)\,dt = -k\sqrt{a}\,\theta(\alpha'''\cos v + \beta'''\sin v)$$
$$+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{4}(\alpha'''\cos 2v + \beta'''\sin 2v)$$
$$+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{2}\beta'''\cdot v$$
$$-H,$$

wo

$$H = -k\sqrt{a}\,\theta(\alpha'''\cos v_0 + \beta'''\sin v_0)$$
$$+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{4}(\alpha'''\cos 2v_0 + \beta'''\sin 2v_0) + k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{2}\beta'''v_0.$$

Es wird auch hier genügen, nur das Hauptglied zu berücksichtigen, d. h. zu setzen:

$$H = -k\sqrt{a}\,\theta\,(\alpha''' \cos v_0 + \beta''' \sin v_0). \qquad 43)$$

Ferner findet man mit analogen Vernachlässigungen aus 40):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r}{r} = 2\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0) & - \theta(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \beta'')\sin v \\
& - \theta(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 + \alpha'')\cos v \\
& - \frac{\theta}{2}(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 \\
& \qquad + \frac{2}{3}\alpha'')\, e\cos 2v \\
& - \frac{\theta}{2}(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 \\
& \qquad + \frac{2}{3}\beta'')\, e\sin 2v \\
& + \theta\beta'' ev \\
& - 3\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\, ev\sin v \\
& + \frac{1}{4}\theta\beta'' e^2 v\cos v \\
& - \frac{3}{4}\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\, e^2 v\sin 2v \\
& - \frac{3}{4}\theta\beta'' e^2 v^2 \sin v.
\end{aligned}$$

Hiernach ergiebt sich dann nach 41)

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\lambda}{dv} = & - \theta[(4\alpha'' - \alpha''')\cos v_0 + (4\beta'' - \beta''')\sin v_0] \\
& + \theta[2\alpha''\sin 2v_0 - 2\beta''\cos 2v_0 + 2\beta'' - \beta''']\sin v \\
& + \theta[2\alpha''\cos 2v_0 + 2\beta''\sin 2v_0 + 2\alpha'' - \alpha''']\cos v \\
& + \theta\left[\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 + \frac{2}{3}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'''\right] e\cos 2v \\
& + \theta\left[\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \frac{2}{3}\beta'' + \frac{1}{4}\beta'''\right] e\sin 2v \\
& - \frac{\theta}{2}[4\beta'' - \beta''']\, ev \\
& + 6\theta[\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0]\, ev\sin v
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\,\theta\beta''e^2 v\cos v\\
&+3\,\theta\,[\alpha''\cos v_0+\beta''\sin v_0]\,e^2 v\sin 2v\\
&+\frac{3}{2}\,\theta\beta''e^2v^2\sin v.
\end{aligned}
$$

Die Integration dieser Gleichung giebt:

$$
\begin{aligned}
\delta\lambda = K &- \theta\,[(4\alpha''-\alpha''')\cos v_0+(4\beta''-\beta''')\sin v_0]\,v\\
&+\theta\,[2\,(\alpha''\cos 2v_0+\beta''\sin 2v_0)+2\alpha''-\alpha''']\sin v\\
&-\theta\,[2\,(\alpha''\sin 2v_0+\beta''\cos 2v_0)+2\beta''-\beta''']\cos v\\
&+\frac{\theta}{2}\left[\alpha''\cos 2v_0+\beta''\sin 2v_0+\frac{2}{3}\alpha''+\frac{1}{4}\alpha'''\right]e\sin 2v\\
&-\frac{\theta}{2}\left[\alpha''\sin 2v_0-\beta''\cos 2v_0+\frac{2}{3}\beta''+\frac{1}{4}\beta'''\right]e\cos 2v\\
&+\frac{5}{2}\,\theta\beta''e^2v\sin v \qquad\qquad (44)\\
&-6\theta\,[\alpha''\cos v_0+\beta''\sin v_0]\,ev\cos v\\
&-\frac{3}{2}\,\theta\,[\alpha''\cos v_0+\beta''\sin v_0]\,e^2v\cos 2v\\
&-\frac{3}{2}\,\theta\beta''e^2v^2\cos v\\
&-\frac{1}{4}\,\theta\,(4\beta''-\beta''')\,ev^2.
\end{aligned}
$$

Für K findet man das Hauptglied:

$$
\begin{aligned}
K=\theta\,[(4\alpha''-\alpha''')\cos v_0&+(4\beta''-\beta''')\sin v_0]\,v_0\\
&-\theta\,[2\,(\alpha''\cos 2v_0+\beta''\sin 2v_0)+2\alpha''-\alpha''']\sin v_0\\
&+\theta\,[2\,(\alpha''\sin 2v_0-\beta''\cos 2v_0)+2\beta''-\beta''']\cos v_0
\end{aligned}
$$

oder reducirt

$$
K=\theta\,[(4\alpha''-\alpha'''-\beta''')\cos v_0+(4\beta''+\alpha'''-\beta''')\sin v_0] \qquad (45)
$$

Wenn es sich um eine genaue numerische Berechnung von δr und $\delta\lambda$ handelte, so würde der Umstand, dass in den Gleichungen 40), 44), 45) von allen Coefficienten nur die Haupttheile berücksichtigt sind, in's Gewicht fallen. Es

wäre in diesem Falle z. B. völlig illusorisch, rein periodische Glieder mit $\sin 2v$ und $\cos 2v$ noch mitzunehmen, da diese mit e multiplicirt sind, während in den Coefficienten von $\sin v$ und $\cos v$, sowie in den constanten Gliedern e vernachlässigt ist. Es ist aber wohl zu beachten, dass es sich hier gar nicht um eine zahlenmässige Summation der Störungsglieder, sondern nur um die Feststellung ihrer Form und eine ungefähre Bestimmung der Einzelbeträge handelt, weshalb die hier vorgenommenen Vernachlässigungen als durchaus zweckmässig anzusehen sind.

Wünscht man aus irgend welchem Grunde eine weitere Entwickelung der Coefficienten, so ist dieselbe nach der vorgetragenen Methode mit Leichtigkeit zu erlangen.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir noch die Störung senkrecht zur Bahnebene erörtern, obgleich dieselbe im Folgenden keine Berücksichtigung finden wird. Die Störungsgrösse ist hier z, also, wenn wir Glieder von der Ordnung θ^2 sowie auch A_0 vernachlässigen, nach 26) und 27)

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + k^2 (1 + m) \frac{z}{r^3} = - k^2 \theta \frac{\gamma}{r^2}.$$

Diese Gleichung soll in ähnlicher Weise wie die Differentialgleichung 33) umgeformt werden. Es ist nämlich

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{k^2 p}{r^3} \left(\frac{d^2 \left(\frac{z}{r}\right)}{d v^2} + \frac{z}{r} - \frac{r}{p} \frac{z}{r} \right),$$

mithin wird die Gleichung, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{z}{r} = s \tag{46}$$

setzt,

$$\frac{d^2 s}{d v^2} + s = - \frac{\theta \gamma}{p} r. \tag{47}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \frac{\theta \gamma}{p} \sin v \int r \cos v \, d v + \frac{\theta \gamma}{p} \cos v \int r \sin v \, d v.$$

Nun ist

$$\int r \cos v\, dv = \frac{p}{e}\left(v - \frac{E}{\cos\varphi}\right)$$

$$\int r \sin v\, dv = \frac{p}{e} \log \text{nat}\, r,$$

mithin

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \frac{\theta\gamma}{e} \sin v \left(v - \frac{E}{\cos\varphi}\right) + \frac{\theta\gamma}{e} \cos v \log \text{nat}\, r. \qquad 48)$$

Entwickelt man nach Potenzen von e, so lauten die Anfangsglieder

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \theta\gamma + \frac{\theta\gamma}{2} e v \sin v.$$

Da für die Osculationsepoche $t = 0$

$$s = 0 \text{ und } \frac{ds}{dv} = 0,$$

so ergiebt sich genähert

$$c' = \theta\gamma \sin v_0, \quad c'' = \theta\gamma \cos v_0,$$

also mit dem mehrfach erörterten beschränkten Genauigkeitsgrade der Coefficienten:

$$s = \theta\gamma \cos(v - v_0) - \theta\gamma + \frac{\theta\gamma}{2} e v \sin v. \qquad 49)$$

Ist der Planet, dessen Störungen hier berechnet sind, von einem Trabanten begleitet, so gelten die Störungswerthe für den Schwerpunkt des Systems.

Die hier berechneten Störungsgrössen δr und $\delta\lambda$ werden in den folgenden Entwickelungen, in denen allerdings nur die Hauptglieder Berücksichtigung finden, unter der Bezeichnung δr_1 und $\delta\lambda_1$ auftreten.

III. Die Bewegung des Mondes.

Wir haben die Gleichungen 20) und 21) zuerst in der Weise zu integriren, dass wir die Glieder von der Ordnung der Excentricitäten, Neigungen und der Sonnenstörungen des Mondes vernachlässigen. Die Differentialgleichung 20) wird alsdann

$$a\frac{d^2\delta r}{dt^2} + k^2\left(\frac{m+m_0}{a^3} - \frac{2m_1}{a_1^3}\right)a\delta r \tag{50}$$
$$= 2\int(X dx + Y dy + Z dz) + (xX + yY + zZ),$$

wo a_1 die halbe grosse Axe der von der Sonne beschriebenen Elipse ist, und a die mittlere Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt bedeutet.

Gleichung 21) wird alsdann

$$a^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2a\frac{d\lambda}{dt}\delta r + \int(xY - yX)\,dt,$$

oder, wenn man für $\frac{d\lambda}{dt}$ die mittlere Winkelbewegung n des Mondes setzt,

$$a^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2an\delta r + \int(xY - yX)\,dt. \tag{51}$$

Für die auftretenden Kraftcomponenten sind dann natürlich unter demselben Gesichtspunkte nur die Hauptglieder auszuwählen.

Man findet, wenn l und l_1 die mittleren Längen von Mond und Sonne, n_1 die mittlere Bewegung der Sonne bedeutet,

$$xX + yY + zZ = \theta a^2\Big\{2n^2(\alpha\cos l + \beta\sin l) - \frac{9}{2}n_1^2(\alpha\cos l_1 + \beta\sin l_1)$$
$$- \frac{3}{2}n_1^2[\alpha\cos(2l - l_1) + \beta\sin(2l - l_1)] + 2n^2 n_1 a_1 \sin(l_1 - l)\Big\}$$

$$\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{dt}=\theta a^2 n\Big\{n^2(\alpha\sin l-\beta\cos l)-\frac{3}{2}n_1^2(\alpha\sin l_1-\beta\cos l_1)$$
$$+\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\sin(2l-l_1)-\beta\cos(2l-l_1)]+n^2n_1a_1(\cos l_1-l)$$
$$+\frac{m}{m_0}n^3a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}+\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\Big\}$$

$$xY-yX=\theta a^2\Big\{n^2(\alpha\sin l-\beta\cos l)-\frac{3}{2}n_1^2(\alpha\sin l_1-\beta\cos l_1)$$
$$+\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\sin(2l-l_1)-\beta\cos(2l-l_1)]+n^2n_1a_1\cos(l_1-l)$$
$$+\frac{m}{m_0}n^3a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}+\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\Big\}$$

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\theta a^2 n\Big\{-n(\alpha\cos l+\beta\sin l)+\frac{3}{2}n_1(\alpha\cos l+\beta\sin l_1)$$
$$-\frac{3}{2}\frac{n_1^2}{2n-n_1}[\alpha\cos(2l-l_1)+\beta\sin(2l-l_1)]+\frac{n^2n_1}{n_1-n}a_1\sin(l_1-l)\Big\}$$
$$+\frac{a}{2}ht+\frac{a}{2}C,$$

wo

$$h=2\theta an\left\{\frac{m}{m_0}\cdot n^3a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}-\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right\} \qquad 52a)$$

$$C=-2\theta an\Big\{-n(\alpha\cos l^{(0)}+\beta\sin l^{(0)})+\frac{3}{2}n_1(\alpha\cos l_1^{(0)}$$
$$+\beta\sin l_1^{(0)})-\frac{3}{2}\frac{n_1^2}{2n-n_1}\left[\alpha\cos(2l^{(0)}-l_1^{(0)})+\beta\sin(2l^{(0)}-l_1^{(0)})\right]$$
$$+\frac{n^2n_1}{n_1-n}a_1\sin(l_1^{(0)}-l^{(0)})\Big\}, \qquad 52b)$$

wenn $l^{(0)}$ und $l_1^{(0)}$ für die Osculationsepoche $t=0$ gelten.

Einige der hier auftretenden Glieder, die sich unmittelbar aus den Formeln für die Kraftcomponenten ergaben, könnten übrigens ihrer Kleinheit wegen hier fortgelassen werden.

Setzen wir noch

$$n^2-2n_1^2=\nu^2, \qquad 53)$$

so erhalten wir aus 50)

$$\frac{d^2(\delta r)}{dt^2} + \nu^2 \delta r = \theta a \Big\{ 3 n_1 \left(n - \frac{3}{2} n_1\right)(\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$
$$- \frac{3}{2} n_1^2 \frac{4n - n_1}{2n - n_1} [\alpha \cos (2l - l_1) + \beta \sin (2l - l_1)]$$
$$+ \frac{2 n^2 n_1^2}{n - n_1} a_1 \sin (l - l_1) \Big\} + h t + C.$$

Um diese Gleichung zu integriren, beachten wir, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \nu^2 y = \sum \alpha_i \cos (\varkappa_i x + a_i) + \sum \beta_i \sin (\lambda_i x + b_i) + h x + C,$$

in welcher die a_i, b_i, α_i, β_i, $\varkappa_i$, λ_i sowie h und C gegebene Constanten bedeuten, das allgemeine Integral hat

$$y = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x + \sum \frac{\alpha_i}{\nu^2 - \varkappa_i^2} \cos (\varkappa_i x + a_i)$$
$$+ \sum \frac{\beta_i}{\nu^2 - \lambda_i^2} \sin (\lambda_i x + b_i) + \frac{h}{\nu^2} x + \frac{C}{\nu^2},$$

wo c_1 und c_2 die Integrationsconstanten sind.

Dies auf die Differentialgleichung für δr angewandt giebt

$$\delta r = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t + 3 \theta a n_1 \frac{n - \frac{3}{2} n_1}{\nu^2 - n_1^2} (\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$
$$- \frac{3}{2} \theta a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{(2n - n_1)[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \cos (2l - l_1) + \beta \sin (2l - l_1)]$$
$$+ 2 \theta a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{(n - n_1)[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \sin (l - l_1) + \frac{h t}{\nu^2} + \frac{C}{\nu^2} \qquad 54)$$

Um die Constanten c_1 und c_2 zu bestimmen bedenke man, dass für die Osculationsepoche $t = 0$ auch δr und $\frac{d \delta r}{dt}$ verschwinden. Hieraus erhält man

$$c_1 = -3 \theta a n_1 \frac{n - \frac{3}{2} n_1}{\nu^2 - n_1^2} (\alpha \cos l_1^{(0)} + \beta \sin l_1^{(0)})$$
$$+ \frac{3}{2} \theta a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{(2n - n_1)[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \cos (2 l^{(0)} l_1^{(0)}) + \beta \sin (2 l^{(0)} l_1^{(0)})]$$
$$- 2 \theta a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{(n - n_1)[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \sin (l^{(0)} - l_1^{(0)}) - \frac{C}{\nu^2}$$

$$c_2 = 3\,\theta\, a\, n_1^2 \frac{n - \frac{3}{4} n_1}{\nu(\nu^2 - n_1^2)} (\alpha \sin l_1^{(0)} - \beta \cos l_1^{(0)})$$

$$- \frac{3}{2}\,\theta\, a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{\nu[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \sin(2\,l^{(0)} - l_1^{(0)}) - \beta \sin(2\,l^{(0)} - l_1^{(0)})]$$

$$- 2\,\theta\, a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{\nu[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \cos(l^{(0)} - l_1^{(0)}) - \frac{h}{\nu^3}$$

Den gefundenen Werth 54) von δr haben wir nun in die Gleichung 51) einzusetzen. Bei der hier innegehaltenen Genauigkeit ergab sich

$$\int (xY - yX)\,dt = \frac{1}{n} \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

so dass

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a} c_1 \cos \nu t - \frac{2n}{a} c_2 \sin \nu t - n\,\theta\,(\alpha \cos l + \beta \sin l)$$

$$- \frac{9}{2}\,\theta\, n_1 \frac{(n - n_1)^2}{n^2 - 3n_1^2} (\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$

$$- \frac{3}{2}\,\theta \frac{n_1^2}{2n - n_1} \frac{11n^2 + 3n_1^2 - 6nn_1}{3n^2 + 3n_1^2 - 4nn_1} [\alpha \cos(2l - l_1) + \beta \sin(2l - l_1)]$$

$$+ \theta \frac{n^2 n_1}{n_1 - n} \cdot \frac{3n_1 + 2n}{3n_1 - 2n} a_1 \sin(l_1 - l) - \frac{h}{a} \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)} \cdot t - \frac{C}{a} \cdot \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)}.$$

Die Integration ergiebt

$$\delta\lambda = -\frac{2n}{a\nu} c_1 \sin \nu t + \frac{2n}{a\nu} c_2 \cos \nu t - \theta\,(\alpha \sin l - \beta \cos l)$$

$$- \frac{9}{2}\,\theta \frac{(n - n_1)^2}{n^2 - 3n_1^2} (\alpha \sin l_1 - \beta \cos l_1)$$

$$- \frac{3}{2}\,\theta \frac{n_1^2}{(2n - n_1)^2} \frac{11n^2 + 3n_1^2 - 6nn_1}{3n^2 + 3n_1^2 - 4nn_1} [\alpha \sin(2l - l_1) - \beta \cos(2l - l_1)]$$

$$- \frac{\theta\, n^2 n_1}{(n_1 - n)^2} \cdot \frac{3n_1 + 2n}{3n_1 - 2n} a_1 \cos(l_1 - l)$$

$$- \frac{h}{2a} \cdot \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)} \cdot t^2 - \frac{C}{a} \cdot \frac{3n^2 + 2n_1^2}{2n(n^2 - 2n_1^2)} \cdot t + c_3. \quad 55)$$

Die neue Integrationsconstante c_3 ist so zu bestimmen, dass für die Osculationsepoche $t = 0$ auch $\delta\lambda = 0$ wird.

Die Gleichungen 54) und 55) geben eine ungefähre Vorstellung von den durch die endliche Geschwindigkeit der Gravitation bedingten Störungen der Mondbewegung. Will man die Annäherung weiter treiben, so fragt es sich, was für Störungsglieder ein derartiges Interesse beanspruchen, dass ihre schärfere Entwickelung der Mühe lohnt. Offenbar ist es nur die Säcularstörung der Länge, die, falls überhaupt vorhanden, mit der Zeit merklich werden könnte; wir werden uns deshalb auch nur angelegen sein lassen, diese genauer kennen zu lernen.

Die für δr und $\delta \lambda$ gefundenen Werthe 54) und 55) haben wir nun zur Berechnung der indirecten Glieder in den vollständigen Differentialgleichungen 20) und 21) zu verwenden.

Wir haben uns schon überzeugt, dass der Unterschied der geocentrischen und barycentrischen Sonnencoordinaten für uns bedeutungslos ist, weshalb wir, um nicht jetzt die Bezeichnungen zu ändern, statt des in 20) und 21) auftretenden Index 0 überall den Index 1 schreiben.

Setzen wir für den Radiusvector des Mondes den Werth

$$r = a\,[1 + \Sigma f_i \cos(\lambda_i t + b_i)]\,, \tag{56}$$

so wird

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^3}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$
$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3}{a^3}\sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i)\,.$$

Dies haben wir in die rechte Seite von 20) einzusetzen; für $\frac{k^2 m_1}{r_0^3}$ genügt es aber n_1^2 zu setzen, da Glieder mit diesem kleinen Factor, welche ausserdem mit der Excentricität der Erdbahn multiplicirt sind, völlig unbedeutend sind.

Gleichung 20) nimmt hiernach folgende Gestalt an

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + (n^2 - 2n_1^2)(r\delta r) = 2\int(X dx + Y dy + Z dz) + (xX + yY + zZ) \\
+ [3n^2 \sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i) + 6 n_1^2 \cos(2l - 2l_1)] a \delta r \\
57) \qquad - 6 n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\delta\lambda - 3 n_1^2 a^2 [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{\delta r_1}{a_1} \\
+ 6 n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\, \delta\lambda_1 \\
+ \frac{3}{2} n_1^2 a^2 \int [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{d\delta r_1}{a_1} \quad - 3 n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1)\, d\delta\lambda_1 \\
+ 3 n_1^2 a \int [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{dr_1}{a_1} \delta r \quad - 9 n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1) \frac{dr_1}{a_1} \delta\lambda \\
- 6 n_1^2 a^2 \int [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{dr_1}{a_1} \frac{\delta r_1}{a_1} \quad + 9 n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1) \frac{dr_1}{a_1} \delta\lambda_1 \\
- 6 n_1^2 a \int \sin(2l - 2l_1)\, d\lambda_1\, \delta r \quad - 6 n_1^2 a^2 \int \cos(2l - 2l_1)\, d\lambda_1\, \delta\lambda \\
+ 9 n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1)\, d\lambda_1 \frac{\delta r_1}{a_1}, \quad + 6 n_1^2 a^2 \int \cos(2l - 2l_1)\, d\lambda_1\, \delta\lambda_1
\end{aligned}
$$

Wie man sieht, sind in dieser Gleichung die Producte der Coefficienten f_i der Mondungleichheiten, sowie deren Producte mit der Erdbahnexentricität sowie Quadrat etc. der letzteren zum Theil bereits vernachlässigt. In den mit n_1^2 multiplicirten Gliedern sollen auch die ersten Potenzen dieser Grössen vernachlässigt werden, soweit dies noch nicht geschehen ist.

Auf der rechten Seite von Gl. 21) setzen wir

$$\lambda = l + \sum g_i \cos(\lambda_i t + b_i),$$

also

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \sum g_i \lambda_i \cos(\lambda_i t + b_i),$$

wodurch, wenn man noch mit

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left[1 - 2\sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i)\right]$$

multiplicirt:

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) - \frac{2\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt$$
$$+ \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda}\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\delta\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_1}\delta r_1 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_1}\delta\lambda_1\right)dt,$$

oder, indem man in den von Ω abhängigen Gliedern die Excentricitäten etc. vernachlässigt

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) - \frac{2\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt$$
$$- 3n_1^2\int\sin(2l - 2l_1)\frac{\delta r}{a} - 3n_1^2\int\cos(2l - 2l_1)\,\delta\lambda$$
$$58)\qquad + \frac{9}{2}n_1^2\int\sin(2l - 2l_1)\frac{\delta r_1}{a_1} + 3n_1^2\int\cos(2l - 2l_1)\,\delta\lambda_1$$

Wir betrachten zuerst die Gleichung 58). Um die Säcularglieder in $\delta\lambda$ zu erhalten, haben wir in $\frac{d\delta\lambda}{dt}$ die nicht periodischen der Zeit t proportionalen Glieder aufzusuchen. Ein solches Glied tritt zunächst in $-\frac{2n}{a^2}(r\delta r)$ auf, weshalb die Neubestimmung dieser Grösse aus 57) nothwendig ist. In den anderen Gliedern von 58), in denen die Grössen δr, $\delta\lambda$, δr_1, $\delta\lambda_1$ durchweg mit Verkleinerungsfactoren behaftet sind, kann man die schon bekannten Annäherungen verwenden.

Um das betreffende Glied aus

$$-2\frac{\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i)$$

zu erhalten, hat man in δr nur die Glieder von der Form $t\cos(\lambda_i t + \text{Const.})$ oder $t\sin(\lambda_i t + \text{Const.})$ zu berücksichtigen. Da derartige Glieder aber in 54) nicht vorhanden sind, so ist für unsern Zweck

$$-2\frac{\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) = 0$$

zu setzen.

In dem Gliede

$$\frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt = \frac{1}{a^2}\left[1 - 2\sum f_i\cos(\lambda_i t + b_i)\right]\int(xY - yX)\,dt$$

müssen zuerst die in $xY - yX$ auftretenden constanten Glieder bestimmt werden. Bezeichnet man durch Π und Π_1 die Längen des Mond- und Sonnenperigäums, so sind die hier in Betracht kommenden Werthe von $\lambda_i t + b_i$, d. h. die Argumente der bedeutendsten Ungleichheiten der Mondbewegung, die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} l - \Pi \\ 2l - 2\Pi \end{array}\right\} \text{(Mittelpunktsgleichung)}$$

$$\begin{array}{ll} l - 2l_1 + \Pi & \text{(Evection)} \\ 2l - 2l_1 & \text{(Variation)} \\ l_1 - \Pi_1 & \text{(jährliche Gleichung).} \end{array}$$

Wird der der jährlichen Gleichung entsprechende Werth von f_i mit f_5 bezeichnet, so erhält man nach weitläufigen Rechnungen als constantes Glied in $xY - yX$ den Werth

$$\theta \left[k^2 m n - \frac{1}{2} \frac{k^2 m_1}{a_1^3} a^2 \left(\frac{e_1}{2} + f_5 \right) (\alpha \sin \Pi_1 - \beta \cos \Pi_1) + \frac{k^2}{2} \left(\frac{A\psi + A_0 \psi_0}{a^2} - \frac{A_1 \psi_1 a^2}{a_1^4} \right) \right],$$

in welchem freilich das mittelste Glied, da es von der Ordnung $n_1^2 e_1$ resp. $n_1^2 f_i$ ist, ausgelassen wird.

Glieder von der Form $t \sin(\lambda_i t + \text{Const.})$ oder $t \cos(\lambda_i t + \text{Const.})$, welche gleichfalls in $\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\,dt$ der Zeit t proportionale unperiodische Glieder erzeugen könnten, sind in $xY - yX$ nicht vorhanden, so dass für unsere Zwecke

$$\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\,dt = \theta \left[\frac{k^2 m n}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{k^2 m_1}{a_1^3} \left(\frac{e_1}{2} + f_5 \right) (\alpha \sin \Pi - \beta \cos \Pi) + \frac{k^2}{2} \left(\frac{A\psi + A_0 \psi_0}{a^4} - \frac{A_1 \psi_1}{a_1^4} \right) \right] t$$

oder genügend genau

$$\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\,dt = \theta \left[\frac{k^2 m n}{a^2} + \frac{k^2}{2} \left(\frac{A\psi + A_0 \psi_0}{a^4} - \frac{A_1 \psi_1}{a_1^4} \right) \right] t.$$

Die vier letzten in 58) auftretenden Glieder ergeben bei der hier festgesetzten Genauigkeitsgrenze kein säculares Glied.

Die Differentialgleichung für $\delta\lambda$ lautet demnach

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) + \theta\left[\frac{k^2mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right]t \qquad 59)$$

wo für $(r\delta r)$ nur das der Zeit proportionale unperiodische Glied einzusetzen ist.

Wir wenden uns nunmehr zu der Gleichung 57), um das soeben genannte Glied zu bestimmen. Dasselbe wird offenbar hervorgebracht durch ein analog gestaltetes Glied auf der rechten Seite von 57).

Zunächst ist das constante Glied in $2\,\frac{Xdx + Ydy + Zdz}{dt}$ zu untersuchen. Die mühsame und langwierige Entwickelung, welche hier nicht vorgeführt werden soll, ergab als constanten Theil

$$\frac{k^2 m_1 a^2}{2a_1^3}\,\theta\left[n_1(f_5 - g_5) - n(2f_5 + e_1)\right]\left[\alpha\sin\Pi_1 - \beta\cos\Pi_1\right]$$
$$+ 2k^2mn^2\theta + k^2a^2n\theta\left(\frac{A\omega}{a^4}\cos J + \frac{A_0\omega_0}{a^4}\cos J_0 + \frac{A_1\omega_1}{a_1^4}\cos J_1\right)$$
$$- 2k^2\theta A_1\frac{a^2}{a_1^4}n\psi_1,$$

wo ω, ω_0, ω_1 die Rotationsgeschwindigkeiten von Mond, Erde und Sonne, J, J_0, J_1 die mittleren Neigungswinkel der betreffenden Aequatoren gegen die Ebene der Mondbahn bedeuten. Aus bereits erörterten Gründen kann das erste Glied fortgelassen werden.

Mit ausschliesslicher Rücksicht auf das entwickelte Glied haben wir also

$$2\int(Xdx + Ydy + Zdz) = 2a^2n\theta\left[\frac{k^2mn}{a^2}\right.$$
$$\left. + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\omega\cos J + A_0\omega_0\cos J_0}{a^4} + \frac{A_1\omega_1\cos J_1}{a_1^4}\right) - k^2\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right]t.$$

Indess lässt sich dieser Ausdruck mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Lage der Mondbahn noch vereinfachen. Es ist nämlich leicht zu erkennen, dass die mittleren Neigungen der Aequatoren gegen die Mondbahn wenig von den Neigungen der Aequatoren gegen die Ekliptik abweichen; die Cosinusse werden von den Cosinussen der zuletzt genannten Neigungen nur um Grössen von der Ordnung des Quadrates der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik verschieden sein. Hiernach ist zu setzen:

$$\omega \cos J = \psi, \ \ \omega_0 \cos J_0 = \psi_0, \ \ \omega_1 \cos J_1 = \psi_1,$$

woraus

$$2\int(Xdx+Ydy+Zdz) = 2a^2 n\theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2}+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}-\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right]t.$$

Hinsichtlich eines der Zeit proportionalen Gliedes ist ferner

$$xX + yY + zZ = 0.$$

Desgleichen mit Hülfe der gefundenen angenäherten Störungswerthe

$$\begin{aligned}
[3n^2 \textstyle\sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i) + 6n_1^2 \cos(2l - 2l_1)]\, a\delta r &= 0 \\
6n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\, \delta\lambda &= 0 \\
3n_1^2 a^2 \left[1 + 3\cos(2l - 2l_1)\right] \frac{\delta r_1}{a_1} &= 0 \\
6n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\, \delta\lambda_1 &= 0.
\end{aligned}$$

In 57) folgen nun zehn Integrale, von denen wir sofort diejenigen vier, welche dr_1 enthalten, fortlassen dürfen, da sie nur Glieder von der Ordnung $n_1^2 e_1$ ergeben. Es ist demnach zu untersuchen, ob die übrig bleibenden sechs Integrale unter dem Integralzeichen Constanten enthalten, welche innerhalb unserer Genauigkeitsgrenze liegen. Das ist, wie man leicht erkennt, nicht der Fall, weshalb diese Integrale sämmtlich = 0 zu setzen sind.

Die Gleichung 57) lautet demnach:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + (n^2 - 2n_1^2)(r\delta r)$$
$$= 2a^2 n\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t,$$

also mit ausschliesslicher Rücksicht auf das säculare Glied:

$$r\delta r = \frac{2a^2 n}{n^2 - 2n_1^2}\,\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t.$$

Setzt man dies in 59) ein, so erhält man

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{3n^2 + 2n_1^2}{n^2 - 2n_1^2}\,\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t,$$

mithin

$$\delta\lambda = -\frac{3n^2 + 2n_1^2}{2(n^2 - 2n_1^2)}\,\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t^2. \quad 60)$$

Dies ist also die Säcularstörung der Mondlänge, deren Werth sich, wie der Vergleich mit 52a) und 55) zeigt, durch eine erste Berücksichtigung der indirecten Glieder auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen nicht geändert hat. Wie das Vorzeichen von $\delta\lambda$ zeigt, hat man es nicht mit einer Beschleunigung, sondern mit einer Verzögerung der Bewegung des Mondes zu thun, und dieses Resultat würde auch Bestand behalten, wenn man durch weiter getriebene Approximationen, die auf Grund des Vorhergehenden principiell einfach, in der Ausführung aber äusserst complicirt sein werden, den Werth von $\delta\lambda$ noch schärfer bestimmen wollte.

Die genaue numerische Berechnung von $\delta\lambda$ ist auch abgesehen von dem unbekannten Factor θ wegen der Unbekanntschaft mit den Trägheitsmomenten A, A_0, A_1 nicht möglich.

Nennen wir die Radien von Mond, Erde und Sonne ϱ, ϱ_0, ϱ_1, so können wir setzen

$$A = \frac{2}{5}\varrho^2 m \varepsilon$$

$$A_0 = \frac{2}{5}\varrho_0^2 m_0 \varepsilon_0$$

$$A_1 = \frac{2}{5}\varrho_1^2 m_1 \varepsilon_1,$$

wo die Factoren ε, ε_0, ε_1 vermuthlich ächte Brüche sind, da die betreffenden Körper höchst wahrscheinlich nach dem Mittelpunkte zu an Dichtigkeit zunehmen.

Man kann hiernach $\delta\lambda$ unter folgender Form darstellen:

$$\delta\lambda = -\frac{3}{2}\frac{1+\frac{2}{3}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}{1-2\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}\cdot\frac{am}{m_0+m}\cdot n^2\theta\left[1+\frac{1}{5}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\frac{\psi}{n}\cdot\varepsilon\right.$$
$$\left.+\frac{1}{5}\frac{m_0}{m}\cdot\left(\frac{\varrho_0}{a}\right)^2\frac{\psi_0}{n}\varepsilon_0-\frac{1}{5}\frac{m_0+m}{m}\cdot\frac{a_1}{a}\cdot\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\left(\frac{\varrho_1}{a}\right)^2\frac{\psi_1}{n}\varepsilon_1\right]t^2. \qquad 61)$$

Nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit der Gravitation das G-fache der Lichtgeschwindigkeit ist, welche für die Zeiteinheit des mittleren Sonnentages in planetrischer Längeneinheit ausgedrückt $\frac{86400}{497.78}$ beträgt, so ergiebt sich für t tropische Jahrhunderte

$$\delta\lambda = -\frac{925772''}{G}\left[1+0.000004\,\varepsilon+0.1118\,\varepsilon_0-0.0008\,\varepsilon_1\right]t^2,$$

oder, wenn man die ganz unmerklichen Glieder vernachlässigt,

$$\delta\lambda = -\frac{257^0\,9'\,32''}{G}\left[1+0.1118\,\varepsilon_0\right]t^2.$$

Um die Säcularstörung der Länge des Mondes auf ein erträgliches Maass herabzudrücken, müsste man daher der Geschwindigkeit der Gravitation einen immensen Werth beilegen, vielleicht das Millionfache der Lichtgeschwindigkeit.

Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen.

Von E. v. Weber.

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Die Theorie der besonderen Systeme Pfaff'scher Gleichungen, welche in der vorliegenden Mitteilung untersucht werden, umfasst diejenige der partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen als einen speciellen Fall, und bildet gleichzeitig die Grundlage einer allgemeinen Integrationstheorie der letzteren; es gelingt nämlich auf Grund der nachfolgenden Entwicklungen, die Darboux'sche Integrationstheorie der Gleichungen 2. O.[1]) nicht nur zu vervollständigen und nach Lie'schen Principien geometrisch zu interpretieren, sondern auch auf Gleichungen und Gleichungssysteme beliebiger Ordnung zu übertragen.[2])

Im ersten Abschnitt entwickeln wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die genannten Pfaff'schen Systeme Integralflächen der grösstmöglichen Mannigfaltigkeit besitzen und charakterisieren hierdurch eine Klasse von Inte-

1) Ann. de l'Ec. Norm. VII, 1870; vgl. auch König, Math. Ann. 24.

2) Ansätze in dieser Richtung finden sich bereits in den Bäcklund'schen Abhandlungen Math. Ann. 11 und 13; der zuletzt genannte Aufsatz enthält auch schon z. T. die Resultate, welche ich in einer früheren Mitteilung (Sitzungsber. der k. bayer. Ak., 1895, Bd. XXV, Heft I) unter III gegeben habe.

grationsproblemen, welche die partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in 3 Variabeln und die Systeme solcher Gleichungen umfasst; im zweiten Abschnitt werden hinreichende (aber im allgemeinen nicht notwendige) Bedingungen dafür angegeben, dass sich die im I. Teil studierten Integrationsprobleme auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen lassen.

I. Abschnitt.

1. Sind x, y unabhängige, z eine abhängige Variable, so sei:

$$\alpha_i^{(k)} \equiv \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \quad (\alpha_0^{(0)} \equiv z).$$

Verstehen wir unter f eine Funktion von x, y, z, $\alpha_0^{(1)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$, unter δx, dx, .. $d\alpha_n^{(n)}$ beliebige Incremente, so setzen wir:

$$D_x^{(\nu)}(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{s} \alpha_r^{(s+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_r^{(s)}}$$

$$D_y^{(\nu)}(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{s=0}^{\nu} \sum_{r=0}^{s} \alpha_{r+1}^{(s+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_r^{(s)}}$$

$$\delta f \equiv D_x^{(n-1)}(f)\,\delta x + D_y^{(n-1)}(f)\,\delta y + \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s^{(n)}}\,\delta \alpha_s^{(n)},$$

$$df \equiv D_x^{(n-1)}(f)\,dx + D_y^{(n-1)}(f)\,dy + \sum_{s=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_s^{(n)}}\,d\alpha_s^{(n)}.$$

also z. B.:

$$\delta \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)}\,\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)}\,\delta y; \quad d\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)}\,dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)}\,dy$$

$$(1) \qquad (i = 0, 1, \ldots k; \; k = 0, 1, \ldots n-1).$$

Ist ferner stets:

$$d\delta x \equiv \delta dx, \quad d\delta y \equiv \delta dy, \quad d\delta \alpha_i^{(n)} \equiv \delta d\alpha_i^{(n)},$$

so folgt aus (1)

$$d\,\delta\alpha_i^{(k)} \equiv \delta\,d\alpha_i^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots n-2),$$

während wir die Ausdrücke

$$d\,\delta\alpha_{i-1}^{(n-1)} - \delta\,d\alpha_{i-1}^{(n-1)} \equiv d\alpha_{i-1}^{(n)}\,\delta x - \delta\alpha_{i-1}^{(n)}\,dx + d\alpha_i^{(n)}\,\delta y - \delta\alpha_i^{(n)}\,dy$$
$$\equiv (d\,\delta)_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots n)\,[1]$$

setzen wollen. Notieren wir noch die Identität:

$$(2) \qquad d(\delta f) - \delta(df) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{i-1}^{(n-1)}}\,(d\,\delta)_i^{(n)}$$

2. Betrachten wir nun die k Pfaff'schen Ausdrücke:

$$(3) \qquad (\delta)_i \equiv M_i\,\delta x + N_i\,\delta y + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\delta\alpha_s^{(n)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots k;\ k \geqq 1 \text{ und } \leqq n)$$

worin die M_i, N_i, $A_{s,i}$ Funktionen von x, y, z, $\alpha_0^{(1)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$ bedeuten. Wir nehmen an, dass aus dem Gleichungssystem:

$$(4) \qquad (\delta)_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k)$$

keine Relation zwischen δx, δy allein folgt, so dass nicht alle k-gliedrigen Determinanten der Matrix

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} A_{0,1}, & A_{1,1}, \ldots & A_{n,1} \\ A_{0,2}, & \ldots & \\ \cdot & & \\ A_{0,k} & \cdot & A_{n,k} \end{matrix} \right\|$$

identisch verschwinden, dass dagegen alle $k+2$-gliedrigen Determinanten der aus $2k$ Zeilen und $n+3$ Colonnen bestehenden Matrix

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_i, & A_{0,i}, & A_{1,i}, & \cdot\ A_{n,i}, & 0 \\ N_i, & 0, & A_{0,i}, & \ldots & A_{n,i} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

---

[1]) Vgl. den § 4 meiner Arbeit: „Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen", Math. Ann. 47.

identisch Null sind, ohne dass dies bei allen $k+1$-gliedrigen Determinanten der Fall ist.

Aus dem Verschwinden aller $k+2$-gliedrigen Determinanten der Matrix, die aus (6) durch Streichung der ersten Colonne hervorgeht, und aus dem Umstande, dass nicht alle k-gliedrigen Determinanten (5) Null sind, lässt sich beweisen, dass die k Gleichungen mit der Unbekannten μ:

$$\varphi_i(\mu) = \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\mu^{n-s} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{7}$$

genau $n-k+1$ Wurzeln gemein haben. Seien dieselben durch die Gleichung

$$\chi(\mu) \equiv \sum_{r=0}^{n-k+1} \varrho_r\,\mu^{n-k+1-r} = 0$$

definiert, so kann man also setzen:

$$\varphi_i(\mu) \equiv \chi(\mu) \cdot \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri}\,\mu^{k-1-r}.$$

Die λ_{ri}, ϱ_i sind rational durch die $A_{s,j}$ ausdrückbar: umgekehrt hat man:

$$A_{s,j} \equiv \sum_{r=0}^{s} \varrho_r\,\lambda_{s-r,j}. \tag{8}$$

3. Aus unseren Voraussetzungen über die Ausdrücke (3) folgt ferner, dass sich die $2k$ Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} U_i &\equiv M_i + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\alpha_s^{(n+1)} = 0 \\ V_i &\equiv N_i + \sum_{s=0}^{n} A_{s,i}\,\alpha_{s+1}^{(n+1)} = 0 \end{aligned}\right. \quad (i = 1, 2, \ldots k) \tag{9}$$

auf genau $k+1$ in den $\alpha_s^{(n+1)}$ unabhängige Gleichungen reducieren. Diese können nun auf folgende Form gebracht werden:

$$(10) \qquad K_i = \sum_{s=0}^{n-k+1} \varrho_s \, \alpha_{s+i}^{(n+1)} + \varkappa_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots k).$$

In der That kann man die Funktionen $\varkappa_i$ eindeutig so bestimmen, dass für jeden Wert der $\alpha_i^{(n+1)}$ die Beziehungen gelten:

$$(11) \qquad U_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} K_s, \quad V_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} K_{s+1};$$

denn die Coefficienten der $\alpha_i^{(n+1)}$ sind wegen (8) auf beiden Seiten gleich, und die Vergleichung der von $\alpha_i^{(n+1)}$ freien Glieder liefert für die Unbekannten $\varkappa_i$ die $2k$ Bedingungen:

$$M_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} \varkappa_s; \quad N_i = \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{si} \varkappa_{s+1};$$

dass aber alle $k+2$-gliedrigen Determinanten der zu diesen Gleichungen gehörigen Matrix verschwinden, ohne dass dies alle $k+1$-gliedrigen thun, folgt aus den Voraussetzungen der N. 2, wenn man für die A_{sj} ihre Werte (8) in (6) substituirt und beachtet, dass ϱ_0 als nicht identisch verschwindend angenommen werden kann.

Da man aus denselben Gründen die K_s vermöge (11) als lineare homogene Funktionen der U_i, V_i ausdrücken kann, so sind die Systeme (9) und (10) völlig äquivalent.

4. Als „Charakteristik n. O." des Pfaff'schen Systems (4) bezeichnen wir jeden Streifen n. O., der einem der $n-k+1$ folgenden Gleichungssysteme genügt:

$$(12) \quad dy = \Lambda_\nu \, dx$$

$$(13) \quad d\alpha_i^{(r)} = \left(\alpha_i^{(r+1)} + \Lambda_\nu \, \alpha_{i+1}^{(r+1)}\right) dx \, (i=0, \ldots r; \; r = 0, \ldots n-1)$$

$$(14) \quad d\alpha_i^{(n)} = \left(\alpha_i^{(n+1)} + \Lambda_\nu \, \alpha_{i+1}^{(n+1)}\right) dx \, (i = 0, 1, \ldots n),$$

unter $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_{n-k+1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(15) \qquad \chi(-\Lambda) = 0,$$

unter den $\alpha_i^{(n+1)}$ Funktionen von $x \, . \, . \, \alpha_n^{(n)}$ verstanden, die (10) befriedigen. Die Elimination der $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (10) (14) führt wegen (15) auf die folgenden Gleichungen, die (14) ersetzen können:

$$(16) \qquad \sum_{s=0}^{n-k} B_{s,\nu}\, d\alpha_{i+s}^{(n)} + \varkappa_i\, dx = 0 \;\; (i = 0, 1, \ldots k),$$

$$\left(B_{s,\nu} \equiv \sum_{r=0}^{s} \varrho_r\, (-\varDelta_\nu)^{s-r}\right).$$

Aus unserer Definition folgt, dass alle ∞^2 Flächenelemente $n + 1$. 0., die sich an eine Charakteristik anschliessen, den Gleichungen (10) genügen.

5. Ein mit dem Pfaff'schen System (12) (13) (16) äquivalentes System erhält man auch, wenn man in jeder der Identitäten

$$(17) \qquad (\delta)_i \equiv \sum_{s=1}^{n} \varrho_{s\,i}\, (d\,\delta)_s^{(n)} \;\; (i = 1, 2, \ldots k)$$

die Coefficienten der δx, δy, $\delta \alpha_r^{(n)}$ auf beiden Seiten gleichsetzt, und hierauf die $\varrho_{s\,i}$ eliminiert. Zur Verification dieser Thatsache bemerken wir, dass aus der einzelnen Identität (17) durch die geschilderte Operation ausser den Relationen (12) (15) zwei Gleichungen für die $d\alpha_i^{(n)}$ hervorgehen, die andererseits auch erhalten werden, wenn man aus dem entsprechenden Gleichungspaar (9) und aus (14) die $\alpha_i^{(n+1)}$ eliminiert. Unsere Behauptung folgt dann aus der Aequivalenz von (9) und (10).

6. Ist nun s ein „gemeinsamer Streifen n. O. der Pfaff'schen Gleichungen (4)", d. h. genügt s den Gleichungen (4), so folgt aus (17), dass die n Gleichungen

$$(18) \qquad (d\,\delta)_i^{(n)} = 0 \;\; (i = 1, 2, . \, n)$$

sich auf genau $n-k$ unabhängige reducieren, wenn die dx, dy, $d\alpha_i^{(n)}$ den Relationen (12) (16) genügen; es können nämlich nicht alle k-gliedrigen Determinanten der Matrix

$$\| \varrho_{si} \|$$

identisch verschwinden, da sich sonst entgegen unserer Voraussetzung über die Ausdrücke (3) für dieselben eine lineare Identität ergäbe. Wenn nun keine der Relationen

$$(19) \qquad \delta y = \Lambda_\nu \, \delta x \; (\nu = 1, 2, .. \, n-k+1)$$

erfüllt ist, so kann man aus (12) (16) (18) die Grössen dx, dy, $d\alpha_r^{(n)}$ eindeutig bestimmen, wie aus der Form dieser Gleichungen leicht hervorgeht. Bezeichnen wir mit $d_\nu x, d_\nu y$, $d_\nu \alpha^{(n)}$ dieses Lösungssystem, mit e, e', e'' successive Elemente n. O. von s, so gibt es $n-k+1$ zu e benachbarte, mit ihm vereinigt liegende Elemente e_ν $(x + d_\nu x, \ldots \alpha_n^{(n)} + d_\nu \alpha_n^{(n)})$; aus der geometrischen Bedeutung der Gleichungen (18) folgt dann[1]), dass diese Elemente mit e, e' zusammen auf demselben Element $n+1.0.\,E$ gelegen sind, das nach der Schlussbemerkung der vorigen N. die Relationen (10) befriedigt. Desgleichen gibt es $n-k+1$ zu e' benachbarte Elemente e'_ν $(x + d_\nu x + \delta x + d_\nu \delta x, \ldots .)$, die mit e' e'' zusammen ein den Relationen (10) genügendes Element $n+1.0.E'$ bestimmen; die Incremente $d_\nu dx .. d_\nu \delta\alpha_n^{(n)}$ berechnen sich aus (12) (16) (18), nachdem man darin unter Berücksichtigung der N. 1 die $x .. \alpha_n^{(n)}$ durch $x + \delta x$ etc. ersetzt hat. Durch s geht mithin ein und nur ein Streifen $n+1.0.S$, dessen Elemente $E, E' ..$ den Gleichungen (10) genügen[2]), und die Elemente e_ν, $e'_\nu \ldots$ erfüllen für $\nu = 1, ..$

---

1) Vgl. meine pag. 425 citierte Arbeit § 4.

2) Dasselbe folgt kürzer daraus, dass die Elimination der $a_i^{(n+1)}$ aus (10) und:

$$\ldots\ldots \; \delta a_i^{(n)} = a_i^{(n+1)} \, \delta x + a_{i+1}^{(n+1)} \, \delta y \; (i = 0, 1, .. \, n)$$

$n-k+1$ einen und denselben, auf S gelegenen, zu s benachbarten und mit ihm vereinigt liegenden Streifen s_1.

7. Verlangen wir nun, dass s_1 wieder ein Streifen des Pfaff'schen Systems (4) sei, so müssen vermöge unserer Annahmen über s die Beziehungen gelten:

$$d_\nu(\delta)_i \equiv 0, \quad (i=1, \ldots k)$$

wie auch e auf s gewählt sein mag. Da nun aus (17), indem man darin d und δ durch d_ν ersetzt, die Beziehungen

$$(d_\nu)_i \equiv 0$$

folgen, so hat man auch $\delta(d_\nu)_i \equiv 0$, da doch e' und e'_ν ebenso wie e und e_ν Elemente einer Charakteristik sind.

Mithin setzt sich unsere Forderung in die andere um, dass die (von den zweiten Differentialen freien) Ausdrücke

$$d_\nu(\delta)_i - \delta(d_\nu)_i \tag{20}$$

identisch verschwinden, wenn die $d_\nu x$, $d_\nu y$, $d_\nu \alpha_i^{(n)}$ den Relationen (12) (16), die $\delta x \ldots$ den Gleichungen (18) genügen. Nun sind aber die $d_\nu x$ etc. auch durch (12) und (14) definiert, unter den $\alpha_i^{(n+1)}$ Grössen verstanden, die (10) befriedigen, und das allgemeinste Incrementensystem $\delta\alpha_i^{(n)}$, das (18) erfüllt, ist demzufolge durch

$$\alpha_i^{(n+1)}\delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)}\delta y \tag{21}$$

gegeben, worin die $\alpha_i^{(n+1)}$ dieselbe Bedeutung haben, wie in (14), während die δx, δy ganz willkürlich bleiben.[1])

Führt man jetzt die Differentiationen in (20) nach N. 1 aus und ersetzt hinterher die Incremente durch ihre Werte (14) (21), so erhält man nach kurzer Rechnung als not-

---

auf die Bedingungen (4) führt, und dass, wenn diese erfüllt sind, aus den genannten Gleichungen die $\alpha_i^{(n+1)}$ sich eindeutig berechnen lassen, wenn keine der Relationen (19) erfüllt ist.

1) Vgl. das Citat auf pag. 429.

wendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass s_1 wieder ein Streifen des Pfaff'schen Systems (4) sei, die folgenden: Man muss vermöge der Gleichungen (9) oder (10) identisch haben:

$$D_x^{(n)}(V_i) = D_y^{(n)}(U_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots k), \tag{22}$$

oder, was wegen (11) dasselbe ist:

$$D_x^{(n)}(K_{s+1}) = D_y^{(n)}(K_s) \qquad (s = 0, 1, \ldots k-1). \tag{23}$$

8. Da somit, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, auf s_1 als einen gemeinsamen Streifen der Pfaff'schen Gleichungen (4) wieder dieselben Schlüsse angewendet werden können, wie auf s, so kommt man durch unbegrenzte Wiederholung dieser Schlussweise zu dem Resultat, dass durch s eine und nur eine Fläche v hindurchgeht, die den Gleichungen (4) sowohl als auch den $k+1$ partiellen Differentialgleichungen $n+1$. O. (10) identisch genügt. Bemerken wir nämlich, dass die Fläche v, sofern sie überhaupt existiert, schon durch die Forderung, s (und S) zu enthalten und irgend einer der Gleichungen (10) zu genügen, völlig bestimmt sein muss, so folgt die Existenz dieser Fläche aus den bekannten Fundamentaltheoremen[1]), wenn wir gewisse Continuitätsbedingungen als erfüllt ansehen; also:

„Bestehen die Relationen (23), so geht durch jeden gemeinsamen Streifen n. O. von (4), der keine der Gleichungen (19) befriedigt, eine und nur eine „Integralfläche" des Pfaff'schen Systems (4), welche aus je ∞^1 Charakteristiken eines jeden der $n-k+1$ verschiedenen Systeme aufgebaut ist."

Das so erhaltene Integral (4) hängt offenbar ab von $n-k+1$ arbiträren Funktionen je eines Arguments.[1])

1) Genügt s ausser den Relationen (4) auch einer der Gleichungen (19), ohne indes eine Charakteristik zu sein, so geht durch ihn eine Integralfläche von (4), die ihm entlang eine Rückkehr-

9. Sind die Voraussetzungen der NN. 2 und 8 in Betreff der Ausdrücke (3) erfüllt, so nennen wir die Gesamtheit der $n-k+1$ Charakteristikensysteme der Gleichungen (4) ein „unbeschränkt integrables Streifensystem" und bezeichen es mit dem Symbol $S^{(n)}_{n-k}$. Je nachdem nun die Ausdrücke (3) keine, oder 1, 2, .. k unabhängige lineare Combinationen der Form $\delta\Phi_i$ gestatten (unter den Φ_i Funktionen von $x \,..\, \alpha^{(n)}_n$ verstanden), ergiebt sich eine wichtige Einteilung der Systeme $S^{(n)}_{n-k}$ in $k+1$ Arten, die wir mit dem Symbol

$$24) \qquad S^{(n)}_{n-k,\,l} \, (l = 0, 1, \ldots k)$$

bezeichnen wollen.[1]) Besonderes Interesse bietet der Fall $l=k$; man kann dann die $(\delta)_i$ durch die $\delta\Phi_i$ ersetzen und demzufolge den Ausdrücken M_i, N_i, $A_{s,i}$ der N. 2 bez. die Bedeutungen

$$D^{(n-1)}_x(\Phi_i),\ D^{(n-1)}_y(\Phi_i),\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha^{(n)}_s}$$

beilegen. Die Bedingungen (23) sind jetzt eine Folge derjenigen der N. 2; man erkennt dies entweder nach N. 7 aus (2), indem man f durch die Φ_i ersetzt, oder direkt daraus, dass die Relationen (22) nunmehr identisch, nicht nur ver-

kante n. O. besitzt (vgl. meine pag. 425 citierte Arbeit, § 7); durch eine Charakteristik geht eine Schaar von Integralflächen, die noch von einer arbiträren Funktion eines Arguments abhängt. Die Integralflächen des Textes sind, als Schaaren von ∞^2 Flächenelementen aufgefasst, die allgemeinsten „Integraläquivalente" des Pfaff'schen Systems, das aus der ersten Gruppe der Gleichungen (1) und aus (4) gebildet wird.

1) Die in meiner früheren Note und in meiner Arbeit Math. Ann. 47 betrachteten Systeme sind demnach mit $S^{(n)}_{0,\,l}\,(l=0,1,..n)$, das Charakteristikensystem einer Gleichung n. O. mit $S^{(n)}_{n-1,\,1}$ zu bezeichnen; den Fall $S^{(1)}_{0,0}$ betrachtet gelegentlich Herr Bäcklund (Math. Ann. 18); Beispiele für die Fälle $S^{(2)}_{0,0}$ und $S^{(2)}_{0,1}$ finden sich in meiner oben citierten Arbeit.

möge (9), erfüllt sind. Die k in Bezug auf die $\alpha_r^{(n)}$ unabhängigen Gleichungen n. O.:

$$\Phi_i = C_i \, (i = 1, 2, \ldots k), \tag{25}$$

in denen die C_i willkürliche Constante bedeuten und die wir als ein Involutionssystem bezeichnen, besitzen dann ein gemeinsames Integral mit $n - k + 1$ arbiträren Funktionen, in dem Sinne, dass durch jeden ihrer gemeinsamen Streifen n. O. im allgemeinen eine und nur eine gemeinsame Integralfläche hindurchgeht.

10. Die vorstehenden Bemerkungen gelten auch, wenn einige der C_i, etwa die m ersten $(0 \leq m \leq k)$, durch Null ersetzt werden; die Bedingungen der N. 2 müssen jetzt vermöge der Gleichungen

$$\Phi_1 = 0, \ldots \Phi_m = 0$$

bestehen, und auf eben diese Relationen ist auch bei der Wahl des Ausgangsstreifens s (N. 6) Rücksicht zu nehmen.

11. Die Bedingungen (23) drücken aus, dass die Gleichungen $n + 1$. O. (10) im Sinne der vorigen N. ein Involutionssystem bilden. Ist umgekehrt ein System von $k + 1$ involutorischen, in Bezug auf die $\alpha_i^{(n+1)}$ linearen und unabhängigen Gleichungen $n + 1$. O. vorgelegt, so kann man dasselbe, wie leicht zu sehen, auf die Form (10) bringen, worauf durch (3) und (17) ein System $S_{n-k,l}^{(n)}$ definiert ist, wenn man setzt:

$$M_i = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri} \varkappa_r; \quad N_i = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_{ri} \varkappa_{r+1}; \quad A_{s,i} = \sum_{r=0}^{s} \varrho_r \lambda_{s-r,i},$$

unter den λ_{ri} irgend welche k^2 Funktionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ mit nicht identisch verschwindender Determinante verstanden. Der Charakter l des Systems $S_{n-k,l}^{(n)}$ bestimmt sich dann durch algebraische Operationen, die l integrabeln Combinationen $\delta\Phi_i$ der Ausdrücke $(\delta)_i$ durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme.

II. Abschnitt.

1. Wir betrachten ein Pfaff'sches System

$$(\delta)_i = 0 \quad (i = 1, 2 \,..\, k) \tag{1}$$

von der in I, NN. 2 und 7 geschilderten Beschaffenheit und das dazu gehörige System von $k+1$ linearen partiellen Differentialgleichungen $n+1$. O. (vgl. I, (10)):

$$K_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots k). \tag{2}$$

Aus den Beziehungen I (23) folgt dann leicht: Differentiirt man die Relationen (2) j-mal partiell nach x und y, wobei die Grössen $\alpha_i^{(h)}$ als Funktionen von x und y betrachtet werden, so reducieren sich die resultierenden Gleichungen vermöge aller vorhergehenden auf $k+j+1$ der Form:

$$K_i^{(j)} \equiv \sum_{h=0}^{m+1} \varrho_h \, \alpha_{h+i}^{(n+j+1)} + \varkappa_i^{(j)} = 0 \quad (i = 0, 1, \,..\, k+j), \tag{3}$$

worin zur Abkürzung $m = n - k$ gesetzt ist[1]).

2. Unter einer „Charakteristik $n+r$. 0." des Pfaff'schen Systems (1) verstehen wir einen Streifen $n+r$.0., der die folgenden Differentialgleichungen befriedigt:

$$dy = \varDelta_\mu \, dx; \tag{4}$$

$$d\alpha_i^{(h)} = \left(\alpha_i^{(h+1)} + \varDelta_\mu \, \alpha_{i+1}^{(h+1)}\right) dx \, (i = 0, 1 \,..\, h;\ h = 0, 1, \,.. \,..\, n+r-1); \tag{5}$$

$$d\alpha_i^{(n+r)} = \left(\alpha_i^{(n+r+1)} + \varDelta_\mu \, \alpha_{i+1}^{(n+r+1)}\right) dx \, (i = 0, 1 \,..\, n+r), \tag{6}$$

unter $\varDelta_\mu$ eine der $m+1$ Wurzeln $\varDelta_1 \,..\, \varDelta_{m+1}$ der Gleichung

$$\chi(-\varDelta) = 0 \tag{7}$$

---

1) $K_i^{(0)} \equiv K_i$; $\varkappa_i^{(0)} \equiv \varkappa_i$.

(vgl. I (15)), unter den Grössen $\alpha_0^{(n+1)} \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ irgendwelche Funktionen von $x\,y\,z\,\alpha_0^{(1)} \dots \alpha_n^{(n)}$ verstanden, die den Gleichungen

(8) $K_i^{(h)} = 0 \; (i = 0, 1 \dots k + h;\; h = 0, 1, \dots r - 1)$

(9) $K_i^{(r)} = 0 \; (i = 0, 1 \dots k + r)$

identisch genügen; die Systeme (8) (9) sollen auch von den Integrationsconstanten $x \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, mithin von allen Flächenelementen des Streifens erfüllt werden. Eine solche Charakteristik bezeichnen wir generell mit $C_\mu^{(n+r)}$. Die $m + 1$ Charakteristikensysteme $n + r$. O. bilden zusammen ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_m^{(n+r)}$[1]).

Die Elimination der $\alpha_i^{(n+r+1)}$ aus (6) und (9) führt auf die $k + r + 1$ totalen Differentialgleichungen

$$(10) \dots [d]_{i,\mu} \equiv \sum_{h=0}^{m} B_{h,\mu}\, d\alpha_{i+h}^{(n+r)} + x_i^{(r)}\, dx = 0 \; (i = 0, 1, \dots k + r)$$

$$\left(B_{h,\mu} \equiv \sum_{j=0}^{h} \varrho_j (-\varDelta_\mu)^{h-j}\right)$$

die wir mit (4) (5) zusammen als die Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r)}$ bezeichnen wollen. Ist $\varDelta_\mu$ keine mehrfach zählende Wurzel von (7)[2]), so sind längs jedes Streifens $C_\mu^{(n)}$ ∞^1 $C_\mu^{(n+1)}$ bestimmt, deren einzelner durch Angabe eines seiner Elemente $n + 1$. 0. festgelegt ist; ebenso gehen durch jede $C_\mu^{(n+1)}$ ∞^1 $C_\mu^{(n+2)}$ etc.

3. Wir verstehen unter F eine Funktion der Grössen $x \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, setzen

$$A_i = \frac{\partial F}{\partial \alpha_i^{(n+r)}}$$

---

[1]) Vgl. I, N. 9; doch durchzieht dieses System nicht den ganzen Raum $x \dots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$, sondern nur die durch (8) definierte Mannigfaltigkeit.

[2]) Vgl. § 1 meiner Arbeit in den Math. Ann. Bd. 47.

ferner, wie in I, N. 1:

$$dF = D_x^{(n+r-1)}(F)\,dx + D_y^{(n+r-1)}(F)\,dy + \sum_{h=0}^{n+r} A_h\, d\alpha_h^{(n+r)},$$

und nehmen an, dass dF eine integrable Combination der Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r)}$ sei, d. h. dass man für alle Werte der Incremente dx, dy, $d\alpha_i^{(n+r)}$ vermöge (8) identisch habe:

$$(11) \qquad \sigma\,(dy - A_\mu\,dx) + \sum_{i=0}^{k+r} \sigma_i\,[d]_{i,\mu} \equiv dF,$$

unter σ, σ_i nicht näher bestimmte Funktionen von $x \cdots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ verstanden. Solche integrable Combinationen sind z. B. die Ausdrücke $dK_i^{(r-1)}$; doch setzen wir voraus, dass aus den Gleichungen

$$(12) \quad dF = 0,\ dK_i^{(r-1)} = 0\ (i = 0, 1 \ldots k + r - 1)$$

vermöge (8) keine Relation zwischen dx, dy allein folgt[1]), insbesondere also auch, dass zwischen den linken Seiten dieser Relationen keine lineare Identität besteht; dF sei dann eine eigentliche integrable Combination der $C_\mu^{(n+r)}$ genannt. Für F erhält man aus (11), indem man darin die Coefficienten der $dx \ldots$ auf beiden Seiten gleichsetzt und die σ, σ_i eliminiert, ein System homogener linearer partieller Differentialgleichungen 1. O., worin die Variabeln $x \ldots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ den Relationen (8) zu genügen haben, und sich die Zahl der unabhängigen Variabeln demgemäss reduciert. Alle etwa vorhandenen integrabeln Combinationen der $C_\mu^{(n+r)}$ werden also durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme gefunden.

---

[1]) Im Falle $r = 0$ soll dasselbe für die Gleichungen

$$dF = 0,\ (d)_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots k)$$

gelten.

4. Unsere Annahme in Bezug auf F ist mit der andern äquivalent, dass der Ausdruck

$$D_x^{(n+r)}(F) + \varDelta_\mu D_y^{(n+r)}(F)$$

vermöge (8) (9) verschwinde, d. h. dass vermöge (8) eine Identität der Form

$$\sum_{h=0}^{k+r} \lambda_h K_h^{(r)} \equiv \varrho\,(D_x^{(n+r)}(F) + \varDelta_\mu D_y^{(n+r)}(F)) \tag{13}$$

bestehe, unter ϱ, λ_i Funktionen von $x \,.\,.\, \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ verstanden. Also verschwinden vermöge (8) alle $k+r+3$-gliederigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{array}{llllll} \varkappa_0^{(r)} & , \varrho_0, & \varrho_1, \ldots & 0 & , & 0 \\ \varkappa_1^{(r)} & , 0, & \varrho_0, \ldots & 0 & , & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & & \cdot \\ \varkappa_{k+r}^{(r)} & , 0, & 0, \ldots & \varrho_m & , & \varrho_{m+1} \\ D_x^{(n+r-1)}(F), & A_0, & A_1, \ldots & A_{n+r} & , & 0 \\ D_y^{(n+r-1)}(F), & 0, & A_0, \ldots & A_{n+r-1}, & & A_{n+r} \end{array} \right\| \tag{14}$$

was für F wieder ein System partieller Differentialgleichungen 1. O. darstellt, dessen gemeinsame Integrale aber nunmehr die etwaigen integrabeln Combinationen aller $m+1$ $C_{(n+r)}$-systeme liefern.

Es möge umgekehrt F obigen Bedingungen genügen, aber nicht alle $k+r+2$-gliedrigen Determinanten der Matrix (14), insbesondere aber auch nicht alle aus den letzten $n+r+2$ Colonnen gebildeten,[1]) zum Verschwinden bringen; dann besitzen die Gleichungen (7) und:

$$\sum_{h=0}^{n+r} A_h (-\varDelta)^{n+r-h} = 0$$

---

1) Sonst würde aus (12) eine Relation für dx, dy folgen.

wie leicht ersichtlich, genau m gemeinsame Wurzeln, die mit $\varDelta_1 \ldots \varDelta_{r-1}\, \varDelta_{r+1} \ldots \varDelta_{m+1}$ bezeichnet und durch die Gleichung:

$$(15) \qquad \sum_{h=0}^{m} \varrho'_h (-\varDelta)^{m-h} = 0$$

gegeben seien. Man verificiert nunmehr leicht, dass eine Identität der Form (13) besteht, sowie dass die $k+r+2$ in den $\alpha_i^{(n+r)}$ unabhängigen Relationen, auf die sich demnach die Gleichungen (9) und:

$$D_x^{(n+r)}(F) = 0, \quad D_y^{(n+r)}(F) = 0$$

reducieren, die folgende Form erhalten können:

$$(16) \quad L_i^{(0)} \equiv \sum_{h=0}^{m} \varrho'_h\, \alpha_{h+i}^{(n+r+1)} + l_i^{(0)} = 0 \quad (i = 0, 1, \cdot k + r + 1).$$

Durch j-malige Differentiation dieser Gleichungen, die vermöge (8) ein Involutionssystem bilden (I, N. N. 10, 11), erhält man vermöge (8) und der vorhergehenden Differentiationsgleichungen $k+r+j+2$ Gleichungen

$$(17) \qquad L_i^{(j)} = 0 \qquad (i = 0, 1 \ldots k + r + j + 1).$$

Die „Charakteristiken $C_\nu^{(n+r+r')}$" des Involutionssystems (16) sind definiert durch die Gleichungen:

$$dy = \varDelta_\nu dx;\; d\alpha_i^{(h)} = (\alpha_i^{(h+1)} + \varDelta_\nu \alpha_{i+1}^{(h+1)})dx \quad (h = 0, 1, \ldots k + r + r')$$

worin $\varDelta_\nu$ eine Wurzel von (15) bedeutet und die $\alpha_i^{(n+l)}$ die, Relationen (8) (17) (18) identisch erfüllen, und bilden ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_{m-1}^{(n+r+r')}$[1]; die Gleichung

$$(18) \qquad F = C$$

---

1) Vgl. die Anm. pag. 435.

hat also mit (1) ein Integral gemein, das von m willkürlichen Funktionen je eines Arguments abhängt, indem durch jeden gemeinsamen Streifen $n+r$. O. von (1)[1]) und (18) eine und nur eine Fläche hindurchgeht, die den Gleichungen (1) (18) genügt.

5. Man entnimmt dem Vorhergehenden leicht den folgenden allgemeinen Satz:

„Ist $r' \geqq r$, F' eine Funktion von $x \ldots \alpha_{n+r'}^{(n+r')}$ und besitzen die Definitionsgleichungen der $C_\mu^{(n+r')}$ von (1) die integrabele Combination dF', so ist auch df eine solche, unter f irgend eine Funktion von F und F' verstanden."

6. Sei die ganze Zahl $s \geqq r$, ferner $\nu \gtrless \mu$, Φ eine Funktion von $x \ldots \alpha_{n+s}^{(n+s)}$, $d\Phi$ eine eigentliche integrable Combination der Definitionsgleichungen der $C_\nu^{(n+s)}$ von (1), so ist $d\Phi$ offenbar auch eine eigentliche integrable Combination der $C_\nu^{(n+s)}$ des Involutionssystems (16); also reducieren sich die $k+s+4$ Gleichungen:

$$L_i^{(s-r)} = 0, \; D_x^{(n+s)}(\Phi) = 0, \; D_y^{(n+s)}(\Phi) = 0$$

auf $k+s+3$ in den $\alpha_i^{(n+s+1)}$ unabhängige, die vermöge der vorhergehenden Gleichungen (17) und vermöge (8) ein Involutionssystem bilden, und die Gleichungen (1) (18) nnd $\Phi = C$ haben somit ein Integral mit $m-1$ willkürlichen Funktionen gemein; durch Wiederholung dieser Schlussweise erhält man schliesslich folgendes Theorem:

„Ist die ganze Zahl $\lambda \leqq m$, sind die partiellen Differentialgleichungen

(19) $$F_1 = C_1, \; F_2 = C_2 \ldots F_\lambda = C_\lambda$$

---

1) Ein Streifen $n+r$. O. von (1) ist ein solcher, dessen Elemente n. O. den Gleichungen (1), dessen Elemente $n+1$. O. den Relationen (2) etc. genügen.

bezw. von der Ordnung $n+r_1, \cdots n+r_\lambda$ und ist $n+r$ die grösste dieser Zahlen, besitzen ferner die Definitionsgleichungen der Charakteristiken $C_1^{(n+r_1)}, \ldots C_\lambda^{(n+r_\lambda)}$ des Pfaff'schen Systems (1) bez. die eigentlichen integrabeln Combinationen $dF_1 \ldots dF_\lambda$, so definieren das System (1) und die Gleichungen (19) durch ihre gemeinsamen Charakteristiken $n+r.0.$ ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ und besitzen daher ein gemeinsames Integral mit $m-\lambda+1$ arbiträren Funktionen, indem durch jeden ihrer gemeinsamen Streifen $n+r.0.$, der keine Charakteristik des Systems $S_{m-\lambda}^{(n+r)}$ ist, eine und nur eine gemeinsame Integralfläche hindurchgeht."

7. Wir nehmen endlich an, dass die Funktionen $F_1 \ldots F_m, F'_1 \ldots F'_m$ bez. die Ordnung $n+r_1, \ldots n+r_m, n+r'_1, \ldots n+r'_m$ besitzen, dass man habe $r_i > r'_i \, (i = 1, 2, \ldots m)$, und dass r die grösste der Zahlen r_i sei. Es sei ferner für $i = 1, 2, \ldots m$ dF_i eine eigentliche integrable Combination der $C_i^{(n+r_i)}$, dF'_i eine solche der $C_i^{(n+r'_i)}$ des Pfaff'schen Systems (1); im Falle $r_i = r'_i$ setzen wir überdies voraus, dass zwischen den Ausdrücken

$$(20) \qquad dF_i, dF'_i, dK_h^{(r_i-1)} \, (h = 0, 1 \ldots k + r_i - 1)$$

bez. im Falle $r_i = 0$, zwischen den Ausdrücken

$$(21) \qquad dF_i, dF'_i, (d)_j \, (j = 1, 2, \ldots k)^{1)}$$

keine lineare Identität bestehe.

Ist jetzt $s^{(n)}$ ein gemeinsamer Streifen n. O. der Gleichungen (1), der keiner der $m+1$ Relationen (4) genügt, so ist ihm entlang ein und nur ein Streifen $s^{(n+r)}$ bestimmt, dessen Elemente $n+r.0.$ die Relationen (8) befriedigen

---

[1]) Vgl. die Anmerkung, pag. 436.

(I, N. 8). Drücken wir die zu $s^{(n+r)}$ gehörigen Grössen $x \ldots \alpha_{n+r}^{(n+r)}$ als Funktionen eines Parameters aus und substituieren diese Werte in die m Funktionspaare F_i, F'_i, so kann man die m Funktionen φ_i auf eine und wesentlich nur eine Weise so bestimmen, dass man für jeden Wert des Parameters identisch hat:

$$\varphi_i(F_i, F'_i) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, .. m).$$

Diese Bestimmung wäre nur dann unausführbar, wenn sich die beiden Funktionen eines Paars vermöge unserer Substitution auf Constante reducierten, dann aber wäre, wie leicht zu sehen, $s^{(n)}$ eine Charakteristik von (1), was ausgeschlossen wurde. Ist so die Form der Functionen φ_i gefunden, so ist $s^{(n+r)}$ ein gemeinsamer Streifen der Gleichungen (1) und:

$$\varphi_i(F_i, F'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots m),$$

welche nach N. 5 und 6 mit (1) zusammen ein unbeschränkt integrables Streifensystem $S_0^{(n+r)}$ bestimmen. Das Letztere wäre nur dann nicht der Fall, wenn einer der Ausdrücke $d\varphi_i$ keine eigentliche integrable Combination des zugehörigen $C_i^{(n+r_i)}$-systems wäre; dann aber hätte man notwendig $r_i = r'_i$, und $s^{(n)}$ genügte einer der Relationen (4) oder es bestände zwischen den Ausdrücken (20) bezw. (21) eine lineare Identität, was unseren Annahmen gleichfalls widerspricht. Da nun die Integralflächen eines Systems $S_0^{(n+r)}$ sich durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmen lassen, da ausserdem auch die Funktionenpaare F_i, F'_i als Integrale solcher Gleichungen erhalten werden (N. 3), so können wir schliesslich den Satz aussprechen:

„Unter den zu Anfang dieser N. gemachten Voraussetzungen kann die Aufsuchung der allgemeinsten Integral-

fläche von (1) durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme geleistet werden."[1])

Existirt nicht für m, sondern nur für λ der $m+1$ Charakteristikensysteme von (1) je ein Funktionenpaar F_i, F'_i der geschilderten Beschaffenheit, so vereinfacht sich die Integration von (1) insoferne, als sie auf die Aufsuchung der Integralflächen gewisser Systeme $S^{(n+r)}_{m-\lambda}$ zurückkommt.

---

[1]) Ersetzt man im Vorstehenden das System (1) durch die einzige Gleichung

$$\delta F^{(n)} = 0$$

(I, N. 1), so erhält man die Integrationstheorie der part. Differentialgleichungen n. O. in 3 Variabeln, im Falle $n=2$ eine Erweiterung der Darboux'schen Theorie, indem die derselben anhaftende Beschränkung auf Funktionenpaare gleicher Ordnung aufgehoben erscheint.

Ueber den Eiweissumsatz bei Zufuhr von Antipepton.

Von **Carl Voit.**

(Eingelaufen 22. Januar 1896.)

Herr Dr. Alexander Ellinger hat in meinem Laboratorium Versuche über den Eiweissumsatz bei Zufuhr von Antipepton am Hunde angestellt.

Zu einer Zeit als man glaubte, die Aufnahme der Stoffe aus dem Verdauungsschlauche in die Säfte erfolge einfach durch Osmose, nahm man an, das Eiweiss müsse, bevor es in die Säfte übergehen könne, durch die Verdauung unter Eintritt von Wasser in leicht osmirende Stoffe, in „Peptone" verwandelt werden, da man bei osmotischen Versuchen das gewöhnliche Eiweiss nicht oder nur in minimaler Menge durch eine Membran hindurch gehen sah.

Wenn aber das gewöhnliche Eiweiss nur als „Pepton" resorbirt werden kann, dann muss man annehmen, dass das resorbirte Pepton irgendwo im Körper wieder in gewöhnliches Eiweiss unter Abspaltung von Wasser zurückverwandelt wird.

Ist dies Alles so, so muss das Pepton vollständig und in allen Stücken die Rolle des Eiweisses übernehmen, und man muss im Stande sein mit Pepton unter Zusatz von stickstofffreien Nahrungsstoffen nicht nur den Organismus auf seinem Bestande an Eiweiss zu erhalten, sondern auch einen Ansatz von Eiweiss zu bewirken. Es könnte aber

auch sein, dass das Pepton nur als ein sehr guter Eiweissschützer wirkt, ähnlich oder vielleicht noch besser als der Leim; in diesem Falle würde der Körper stets, trotz reichlicher Peptonfütterung, noch etwas Eiweiss von sich verlieren, und es dürfte kein Stickstoffgleichgewicht der Einnahmen und Ausgaben sowie kein Ansatz von Eiweiss eintreten.

Es ist selbstverständlich, dass man zur Lösung dieser Frage zu dem Pepton kein anderes eiweisshaltiges Nahrungsmittel geben darf; denn in diesem Falle könnte der Ansatz von Eiweiss aus dem Eiweiss dieses Nahrungsmittels erfolgt sein; nur wenn der Ansatz von Eiweiss grösser ist als der Eiweissgehalt jenes Nahrungsmittels, könnte ein sicherer Schluss gezogen werden.

Nach den ersten Ernährungsversuchen mit „Pepton" verschob sich bekanntlich, namentlich durch die Untersuchungen von Kühne, der Begriff dieses Stoffes. Man bezeichnete mit diesem Namen anfangs das Produkt der Verdauung des Eiweisses durch verdünnte Salzsäure und Pepsin. Man lernte aber später Zwischenprodukte zwischen dem Säureeiweiss und dem letzten Produkt der Magenverdauung, dem eigentlichen Pepton (Amphopepton) kennen, nämlich die sogenannten Albumosen; ebenso Zwischenprodukte zwischen dem Globulin und den letzten Verdauungsprodukten der Pankreasverdauung, dem Antipepton und dem Hemipepton, welches letztere bei der weiteren Verdauung zersetzt wird.

Es war also nöthig mit allen diesen Produkten Ernährungsversuche anzustellen.

Adamkiewicz hat mit dem sogenannten Witte'schen Pepton, einem Gemenge von viel Albumosen und wenig Amphopepton, gearbeitet und bei Zugabe von Fett einen geringen Stickstoffansatz beobachtet. Leider erstreckt sich sein Versuch nur auf einen einzigen Tag.

Dann hat Pollitzer Versuche mit Amphopepton und mit zwei Albumosen, der Protalbumose und der Heteroalbumose, angestellt und mit allen drei Stoffen einen Eiweissansatz erhalten; allerdings ist dabei der Harn nicht in einwandfreier Weise aufgesammelt worden.

Endlich hat V. Gerlach mit den Albumosen in dem Witte'schen Präparat und mit dem durch Pankreasverdauung hergestellten Antipepton Versuche gemacht; bei ersterem zeigte sich ein Ansatz von Eiweiss; bei letzterem erhielt er kein Resultat, da der Hund nach Einnahme des Antipeptons erkrankte. Auch hier wurde der Harn nicht direkt aufgefangen.

Alle übrigen Beobachter gaben die verschiedenen Peptonpräparate des Handels mit anderen stickstoffhaltigen Nahrungsmitteln z. B. mit Reis etc., grösstentheils bei Versuchen am Menschen. Sie entschieden daher nur, ob der Körper bei Zufuhr von Eiweiss in anderen Nahrungsmitteln und Zusatz von Pepton sich auf seinem Eiweissgleichgewicht zu erhalten vermag und Ansatz von Eiweiss stattfindet. Diese Versuche sind von hohem Werthe für die Ernährung Kranker, aber sie entscheiden nicht, ob die Peptone vollständig für das Eiweiss eintreten oder nur als ausgezeichnete Eiweissschützer gewirkt haben.

Nach den angegebenen Versuchen erscheint es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass die Albumosen einen Ansatz von Eiweiss bewirken, auch wohl das Amphopepton; aber wie das Antipepton wirkt, das ist noch nicht entschieden.

Diese Frage hat Herr Dr. Ellinger zu beantworten gesucht, da uns von Seiten der Farbwerke von Meister, Lucius und Brüning in Höchst in dankenswerthester Weise das kostbare Material (sogenanntes Drüsenpepton) zur Verfügung gestellt worden war.

Es wurde in den entscheidenden Versuchen bei dem gleichen Hunde das Drüsenpepton in seiner Wirkung mit dem Eiweissrückstand des mittelst Wasser ausgelaugten

Fleisches, mit der Somatose (Albumose), die wir von der Fabrik Bayer und Comp. in Elberfeld bereitwilligst erhalten hatten, und mit Witte'schen Albumosen verglichen.

Es ergab sich bei einem Ueberschuss des Eiweisses des Fleischpulvers und den Witte'schen Albumosen ein Ansatz von Eiweiss am Körper. Von der Somatose wurde viel mit dem Koth entleert, so dass eine dritte Vergleichung nicht möglich war; jedoch wurde so viel gesehen, dass sie ebenfalls das Eiweiss ersetzt. Bei dem Drüsenpepton (Antipepton) trat kein Ansatz von Eiweiss, sondern ein beträchtlicher Verlust von Eiweiss vom Körper ein, so dass das Antipepton nur eiweissschützend wirkt und für das Eiweiss nicht vollständig eintritt.

Das Antipepton ist also wohl schon weiter zersetzt, so dass es im Organismus nicht mehr in Eiweiss zurückverwandelt werden kann. Dieses Resultat steht auch in Uebereinstimmung mit der Angabe von Siegfried über die Fleischsäure, welche wahrscheinlich identisch ist mit dem Antipepton, sowie auch mit den Molekulargewichtsbestimmungen von C. Paals, nach denen das Molekulargewicht des Antipepton's nicht grösser ist als das des Traubenzuckers, während die Albumosen und das Eieralbumin ein viel höheres Molekulargewicht ergaben. Dr. Ellinger hat für das von ihm angewendete Drüsenpepton ebenfalls ein sehr niederes Molekulargewicht erhalten.

Beiträge zur Potentialtheorie.[1])

Von **Walther Dyck.**

(*Eingelaufen 31. Dezember 1895.*)

II.

Die Gauss'sche Formel für die gegenseitige Umwindung zweier Raumcurven und ihre Ausdehnung auf höhere Mannigfaltigkeiten. Darstellung der Windungszahl zweier Mannigfaltigkeiten durch Kronecker'sche Charakteristiken gewisser Functionensysteme.

Der vorliegende zweite Theil der „Beiträge zur Potentialtheorie" behandelt zunächst ausführlich die Theorie der Umschlingung zweier geschlossener, sich nicht schneidender Linien im Raume, giebt sodann die Definition der Umschlingung für Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen in einem n-dimensionalen Gebiete und entwickelt die zugehörigen analytischen Formulirungen in Erweiterung der für zwei Curven im Raume gewonnenen Darstellungen.

Im ersten Abschnitte handelt es sich um die genaue Darlegung der Beziehungen des Gauss'schen Integrals für die Anzahl der Umschlingungen zweier Raumcurven zu den im ersten Theile dieser Beiträge (diese

---

1) Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Juli 1895.

Sitzungsberichte 1895, pag. 261 ff.[1]) entwickelten Formeln für die Kronecker'sche Charakteristik gewisser Functionensysteme.

Indem wir die Raumcurven auf zwei verschiedene Arten, in Parameterform (§ 2) und als Schnitte je zweier Flächen (§ 3), analytisch festlegen, ergeben sich zwei wesentlich verschiedene Functionensysteme mit zwei, beziehungsweise mit drei Variabeln, deren Kronecker'sche Charakteristik mit der Gauss'schen Windungszahl übereinstimmt. Die verschiedenen Integral- und Summenformeln für die Charakteristik, die wir in den „Beiträgen I" aufgestellt haben, führen zu einer Reihe, zum Theil neuer Methoden für die Herleitung der Windungszahl. Dabei sind die für die Parameterdarstellung gewonnenen Formeln, die sich unmittelbar an die Gauss'sche Darstellung anknüpfen lassen, nicht überführbar in die Formeln, welche unter Zugrundelegung der Raumcurven als Schnitt je zweier Flächen aufzustellen sind. Die §§ 4 und 5 sind deshalb dem Beweise der Uebereinstimmung der auf die eine und andere Weise gewonnenen Zahlen gewidmet.

Im zweiten Abschnitte wird zuvörderst (in § 6) die Definition der Anzahl der Windungen einer k-fachen Mannigfaltigkeit um eine $n-k-1$-fache innerhalb eines Gebietes von n unabhängigen Variabeln („im linearen Raume von n Dimensionen" nach der aus der Geometrie übertragenen Redeweise) in directer Analogie mit den durch die analytischen Formulirungen des ersten Abschnittes gewonnenen Formeln aufgestellt.[2])

1) Der I. Theil der vorliegenden „Beiträge zur Potentialtheorie" ist im Folgenden kurz durch „Beiträge I" bezeichnet.

2) Es ist mir nicht bekannt, dass die Frage nach der Umschlingung von höheren Mannigfaltigkeiten schon behandelt worden ist. Herr H. Brunn hat (1887) in einer anlässlich seiner Promotion aufgestellten Thesis auf die Möglichkeit, zwei zweidimensionale Gebilde (speciell „Kugelflächen") im Raume von fünf Dimensionen in einander zu schlingen hingewiesen.

Indem wir auch hier für unsere Mannigfaltigkeiten von zwei, den obigen analogen, Darstellungen (in Parameterform (§ 7) und direct durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten (§ 8)) ausgehen, erscheint die Windungszahl als Kronecker'sche Charakteristik für zwei wesentlich verschiedene Systeme von Functionen von $n-1$, beziehungsweise von n Variabeln. Die Uebereinstimmung der auf den beiden Wegen gewonnenen Zahlen wird (in § 8) in analoger Weise wie im ersten Abschnitte bewiesen. Ohne auf die verschiedenen Formeln für die Darstellung der Windungszahl, wie sie nunmehr aus den Entwicklungen des ersten Theiles dieser Beiträge sich ergeben, näher einzugehen, bezeichnen wir zum Schlusse (in § 9) noch eine merkwürdige gegenseitige Lagenbeziehung ganzer Classen von Mannigfaltigkeiten. Mit der Darstellung der k-dimensionalen und der $n-k-1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten des n-dimensionalen Raumes ist nämlich gleichzeitig je ein ganzes System von Mannigfaltigkeiten 0ter und $n-1^{\text{ter}}$, 1ter und $n-2^{\text{ter}}$, 2ter und $n-3^{\text{ter}}$ u. s. w. Ordnung gegeben, denen s ä m m t l i c h e i n u n d d i e s e l b e W i n d u n g s z a h l zugehört. Diese Beziehung scheint mir besonders geeignet, die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik für die Lagenverhältnisse der verschiedenen durch ein solches Functionensystem zu definirenden Gebilde hervortreten zu lassen.

Erster Abschnitt.

Theorie der gegenseitigen Umwindung zweier Raumcurven.

§ 1.

Das Gauss'sche Integral.

Gauss hat in einer bekannten Notiz vom Jahre 1833 (Werke, Band V, Nachlass, Zur Elektrodynamik, pag. 605), die Anzahl der Umschlingungen zweier geschlossener, sich nicht schneidender Linien M_1' und M_1'' durch das folgende Doppelintegral dargestellt:

$$1)\qquad V = \frac{1}{4\pi}\cdot\int\!\!\int \frac{\begin{vmatrix} z_1''-z_1' & -dz_1' & dz_1'' \\ z_2''-z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3''-z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}}{\sqrt{(z_1''-z_1')^2+(z_2''-z_2')^2+(z_3''-z_3')^2}^{\,3}}\ ^{1)};$$

hierbei bezeichnen z_1', z_2', z_3', beziehungsweise z_1'', z_2'', z_3'', die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der ersten, beziehungsweise der zweiten, Linie und ist die Integration über beide Linien ausgedehnt.

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen besitzt eine sehr einfache geometrische Bedeutung, auf welche Schering, von welchem auch die erste Ableitung der Gauss'schen Formel herrührt[2]), aufmerksam gemacht hat. Es stellt

---

[1]) Man vergleiche bezüglich des hier gewählten Vorzeichens der Determinante die am Schlusse dieses Paragraphen folgende Bemerkung.

[2]) Man vergleiche: O. Böddicker, „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen mit Anwendungen in der Elektrodynamik". Ausführung der Göttinger Inauguraldissertation Böddickers, erschienen 1876 bei Spemann in Stuttgart.

nämlich der Zähler den sechsfachen Inhalt dar des von zwei Linienelementen $d\sigma_1'$ beziehungsweise $d\sigma_1''$ der beiden Curven bestimmten Tetraeders, oder den Inhalt eines Parallelepipeds, von welchem drei Seiten durch $d\sigma_1'$, $d\sigma_1''$ und durch die Verbindungslinie der Anfangspunkte beider Linienelemente gebildet sind; der Nenner ist gleich der dritten Potenz der Entfernung der beiden Linienelemente von einander.

Für die Ausführung der Integration ist zu beachten, dass hiebei jede der Curven in bestimmter Richtung zu durchlaufen ist. Wir setzen diese dadurch fest, dass wir in beiden Curven je einen (übrigens willkürlichen) Punkt herausgreifen, in diesem die eine der beiden entgegengesetzten Richtungen der Tangente als positive Fortschreitungsrichtung auszeichnen (was durch die Wahl des Vorzeichens der Richtungscosinus an dieser Stelle geschieht) und nun in dieser Richtung die Bogenlängen zählen. Wir haben dann um die Richtung beizubehalten stets im Sinne der wachsenden Bögen fortzuschreiten, d. h. die Bogenelemente:

$$2') \qquad d\sigma_1' = \sqrt{dz_1'^2 + dz_2'^2 + dz_3'^2}$$

und

$$2'') \qquad d\sigma_1'' = \sqrt{dz_1''^2 + dz_2''^2 + dz_3''^2}$$

sind für die ganze Integration positiv zu nehmen.

Bestehen die Curven aus mehreren getrennten, in sich geschlossenen Theilen, so führt unter Voraussetzung einer gemeinsamen analytischen Definition für die einzelnen Zweige, die Bestimmung der Fortschreitungsrichtung auf e i n e m dieser Züge deren Fixirung auch auf den übrigen Zügen mit sich.

Der Nenner des Ausdruckes unter dem Integralzeichen

$$r^3 = \sqrt{(z_1'' - z_1')^2 + (z_2'' - z_2')^2 + (z_3'' - z_3')^2}^{\,3}$$

ist positiv zu nehmen.

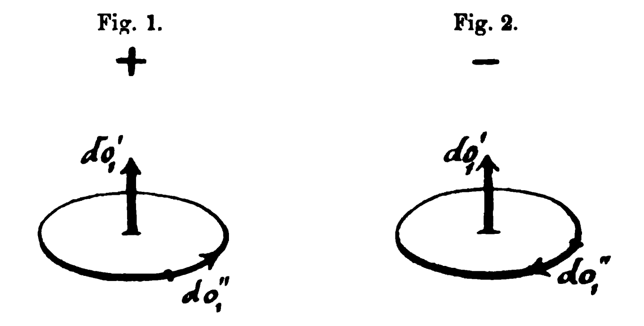
Es sei hier erwähnt, dass wir alle in der Folge auftretenden Quadratwurzelausdrücke positiv annehmen; es ist dies gestattet, weil dieselben unter dem Wurzelzeichen stets eine Summe von Quadraten enthalten, welche im Allgemeinen nicht sämmtlich gleichzeitig in den betrachteten Gebieten verschwinden, so dass also die Wurzel innerhalb des Gebietes ihr Vorzeichen nicht wechselt.

Rechnen wir nun in unserem Coordinatensystem die Richtung der Axe z_1 nach Osten, die von z_2 nach Norden, die von z_3 nach dem Zenith, so gibt das Vorzeichen der Inhaltsdeterminante die folgende Unterscheidung für die gegenseitige Richtung der Elemente do'_1 und do''_1:

Stellt man sich in die positive Richtung des Elements do'_1 der ersten Curve und blickt auf das Element do''_1 der zweiten Curve, so dreht dieses im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers um do'_1, wenn die Determinante

$$3)\qquad \begin{vmatrix} z''_1 - z'_1 & -dz'_1 & dz''_1 \\ z''_2 - z'_2 & -dz'_2 & dz''_2 \\ z''_3 - z'_3 & -dz'_3 & dz''_3 \end{vmatrix}$$

positiv ist (vergl. Fig. 1), im Sinne des Uhrzeigers, wenn diese Determinante negativ ist (Fig. 2). Dieselben Be-



ziehungen ergeben sich dabei, wenn wir von do_1'' nach do_1' blicken [1]).

§ 2.

Formeln für die Windungszahl unter der Voraussetzung, dass die beiden Raumcurven in Parameterdarstellung gegeben sind.

a) Das Gauss'sche Doppelintegral.

Der Gauss'sche Ausdruck für die Windungszahl V lässt sich direct ausführen, wenn man die beiden Linien in Parameterdarstellung gegeben annimmt. Es seien durch

$$4') \quad \begin{aligned} z_1' &= \varphi_1(\lambda_1) \\ z_2' &= \varphi_2(\lambda_1) \\ z_3' &= \varphi_3(\lambda_1) \end{aligned} \qquad \text{und } 4'') \quad \begin{aligned} z_1'' &= \psi_1(\lambda_2) \\ z_2'' &= \psi_2(\lambda_2) \\ z_3'' &= \psi_3(\lambda_2) \end{aligned}$$

die Coordinaten der Punkte unserer beiden Raumcurven dargestellt, abhängig von den Parametern λ_1 bez. λ_2. Wir setzen dabei, der präcisen Ausdrucksweise wegen, die Functionen φ_i und ψ_i als eindeutige, reelle Functionen der reellen unbeschränkt veränderlichen Grössen λ_1 bez. λ_2 voraus;

---

1) Es schien für die vorliegenden Untersuchungen zweckmässig, durch die eben gegebene Auszeichnung des einen der beiden zu einander symmetrischen Coordinatensysteme die Vorzeichen + und — der Determinante in die bestimmte Beziehung zu den Figuren 1 und 2 zu bringen. Dabei habe ich, um für die in der Regel als „positiv" bezeichnete Drehung Fig. 1 auch eine positive Windungszahl zu erhalten, die Gauss'sche Determinante noch mit einem Minuszeichen versehen, welches übrigens bei der Ableitung der zweiten und dritten Colonne der Zählerdeterminante durch Differentiation der ersten Colonne naturgemäss in die Formel eintritt.

die φ_i und ψ_i seien ferner stetig und überall endlich,[1]) und nach den Parametern λ_1, beziehungsweise λ_2, differentiirbar. Die Raumcurven sollen keinen Punkt mit einander gemein haben, d. h. $\psi_1 - \varphi_1$, $\psi_2 - \varphi_2$, $\psi_3 - \varphi_3$ niemals zugleich für dieselben Werthe der λ verschwinden. Ferner sollen niemals gleichzeitig die drei Ableitungen φ_{11}, φ_{21}, φ_{31} der Functionen $\varphi_i(\lambda_1)$ nach λ_1 verschwinden und gleiches für die Ableitungen ψ_{12}, ψ_{22}, ψ_{32} der Functionen $\psi_i(\lambda_2)$ nach λ_2 gelten.

Es ergiebt sich dann unmittelbar für die Windungszahl V das Doppelintegral:

$$
5) \qquad V = \frac{1}{4\pi} \cdot \iint \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 - \varphi_1 & -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{\sqrt{(\psi_1 - \varphi_1)^2 + (\psi_2 - \varphi_2)^2 + (\psi_3 - \varphi_3)^2}^{\,3}} \cdot d\lambda_1 \, d\lambda_2,
$$

bei welchem den obigen Voraussetzungen zufolge die Integration über die λ an eine Grenzbedingung nicht mehr gebunden ist.

Um die Richtung für die Integration auf beiden Linien nach den in § 1 gegebenen Bestimmungen festzulegen, wählen wir an einer bestimmten (aber übrigens willkürlichen) Stelle jeder der beiden Curven diejenige Richtung für die Zählung der Bogenlängen, für welche die dem Linienelemente $d\sigma_1$ (bez. $d\sigma_2$) an dieser Stelle entsprechende Aenderung $d\lambda_1$ (bez. λ_2) positiv ist. Da nun für die Elemente der beiden Curven

1) So dass wir hier, was indess die Allgemeinheit der Betrachtungen nicht wesentlich beschränkt, nur von ganz im Endlichen gelegenen Curven reden.

6') $$do_1' = \sqrt{\varphi_{11}'^2 + \varphi_{21}'^2 + \varphi_{31}'^2} \cdot d\lambda_1$$

beziehungsweise

6") $$do_1'' = \sqrt{\psi_{12}'^2 + \psi_{22}'^2 + \psi_{32}'^2} \cdot d\lambda_2$$

ist, so folgt, da wir die Quadratwurzeln positiv annehmen, dass wir für die Integration im ganzen Gebiete die Elemente $d\lambda_1$ bez. $d\lambda_2$ positiv zu nehmen haben, also, kurz ausgedrückt, dass wir im Sinne der wachsenden Werthe λ_1 und λ_2 über die Curven zu integriren haben.[1])

Aus Formel (5) für V ist nun die Bedeutung der Windungszahl als Kronecker'scher Charakteristik direct zu erschliessen. Die Entwicklungen der §§ 1 und 2 der „Beiträge I" (Formel (12) auf Seite 266) ergeben nämlich unmittelbar den Satz:

Stellt man das Gauss'sche Integral für die Umschlingung zweier Raumcurven mit Hülfe einer Parameterdarstellung (4) der Curven dar, so ist die Windungszahl V gleich der Kronecker'schen Charakteristik des Systems der drei Functionen:

7) $$\psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1), \quad \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1), \quad \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),$$

der zwei Variabeln λ_1, λ_2.

Deuten wir nach Formel (2) der „Beiträge I" die drei Functionen im Raume der Coordinaten z_1, z_2, z_3,[2])

---

1) Die Darstellung ist in dieser weitläufigen Form mit Rücksicht auf die im Folgenden enthaltenen Ausführungen gegeben.

2) Es ist absichtlich mit Rücksicht auf die folgenden Formeln die Bezeichnung der Coordinaten durch z_i beibehalten; diese treten hier an die Stelle der x_i der Formel (2) in den „Beiträgen I", während die in jener Formel mit z_i bezeichneten Parameter hier durch die λ_i ersetzt sind.

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1),\\
z_2 &= \psi_2(\lambda_2) - \varphi_2(\lambda_1),\\
z_3 &= \psi_3(\lambda_2) - \varphi_3(\lambda_1),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

so folgt der Satz:

Die Zahl der gegenseitigen Umwindungen der in (4) dargestellten Raumcurven ist gleich der Zahl der Windungen der Fläche (8) um den Nullpunkt.

Die Fläche (8) ist dabei auf die einfachste Weise geometrisch aus den beiden Curven abzuleiten. Legt man nämlich durch den Nullpunkt des Coordinatensystems Strahlen parallel zu den zweifach unendlich vielen zwischen beiden Raumcurven zu ziehenden Sehnen und schneidet auf diesen Strahlen je die Längen dieser Sehnen (gemessen in der Richtung von der ersten zur zweiten Curve) ab, so bilden die Endpunkte dieser Strahlen eben die Fläche (8).[1])

Die Formeln (8) ergeben weiter, dass die Gestalt der Fläche von einer gegenseitigen durch Parallelverschiebung der beiden Curven hervorgerufenen Lagenveränderung

---

1) Man kann sich auch eine anschauliche Vorstellung von unseren Flächen dadurch verschaffen, dass man sie als „Translationsflächen" auffasst, die sich auf eine zur $M_1'': z_i = \psi_i(\lambda_2)$ congruente und auf eine zweite aus der M_1' durch „Spiegelung am Nullpunkt" entstandene Curve $z_i = -\varphi_i(\lambda_1)$ als Leitcurven beziehen. Herr Finsterwalder hat mehrere Modelle solcher Flächen construirt, die im Brill'schen Verlage erschienen sind. Eines derselben bezieht sich speciell auf zwei in orthogonalen Ebenen gelegenen Kreise als Leitlinien, versinnlicht also gerade den für unsere Betrachtungen elementarsten Fall der gegenseitigen Umschlingung zweier Kreise. Auch Lie, der die Theorie der Translationsflächen in Verbindung mit den entsprechenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgebaut hat (Vergl. neben älteren Untersuchungen die zusammenfassenden Darstellungen in den Berichten der Leipziger Gesellschaft d. W. Bd. 44), veranlasste im Leipziger mathematischen Institut die Herstellung von Modellen gewisser Translationsflächen.

unabhängig ist und dabei nur die Lage der Fläche gegen den Coordinaten-Anfangspunkt geändert wird; die Windungszahlen, welche die Fläche mit Bezug auf die verschiedenen Punkte des Raumes aufweist, geben also zugleich die Windungszahlen der beiden Curven für alle möglichen durch Parallelverschiebung entstehende Lagen.

Die Entwicklungen in den „Beiträgen I" zeigen nunmehr, dass wir sofort noch zwei weitere Darstellungen für die Windungszahl V bilden können, nämlich mit Hülfe eines einfachen Integrals und durch eine Summenformel. Wir betrachten noch kurz diese Darstellungen und ihre geometrische Bedeutung.

b) Darstellung von V durch ein einfaches Integral.

Die Windungszahl lässt sich (nach Formel (26) der „Beiträge I", für $k = 0$) darstellen durch das einfache Integral:

$$9) \qquad V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{((\psi_2-\varphi_2)^2 + (\psi_3-\varphi_3)^2) \cdot \sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}} \cdot d\mathfrak{o}_1,$$

ausgedehnt über

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0,$$

welches die Windungszahl der Schnittcurve der Fläche (8) mit der Ebene

$$z_1 = \psi_1 - \varphi_1 = 0$$

um den Nullpunkt darstellt und in welchem $d\mathfrak{o}_1$ ein stets positiv zu nehmendes Element bedeutet, welches den beiden Gleichungen:

$$10') \qquad d\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\varphi_{11}} \cdot d\lambda_2$$

beziehungsweise

$$10^{*})\qquad d\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\psi_{12}} \cdot d\lambda_1$$

entsprechend für die Ausführung der Integration zu verwenden ist.[1]) Es ergiebt sich dann (indem man die Determinante nach der ersten Horizontalreihe auflöst und die oben genannten Formen für $d\mathfrak{o}_1$ benützt) folgende Form des einfachen Integrals:

$$11)\qquad V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -d\lambda_2 & d\lambda_1 \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} & \psi_{22} \\ \psi_3 - \varphi_3 & -\varphi_{31} & \psi_{32} \end{vmatrix}}{((\psi_2 - \varphi_2)^2 + (\psi_3 - \varphi_3)^2)}.$$

Führen wir hier die Coordinaten z_1', z_2', z_3' beziehungsweise z_1'', z_2'', z_3'' der beiden Raumcurven (4) ein, so können wir auch schreiben:

$$12)\qquad V = \frac{1}{2\pi} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ z_2'' - z_2' & -dz_2' & dz_2'' \\ z_3'' - z_3' & -dz_3' & dz_3'' \end{vmatrix}}{((z_2'' - z_2')^2 + (z_3'' - z_3')^2)},$$

das Integral erstreckt über $z_1'' - z_1' = 0$.

---

1) Deutet man die Parameter λ_1, λ_2 als rechtwinklige Coordinaten einer Ebene, so ist $d\mathfrak{o}_1$ nichts anderes als das Linienelement der Curve

$$\psi_1(\lambda_2) - \varphi_1(\lambda_1) = 0,$$

dargestellt durch seine Projectionen $d\lambda_1, d\lambda_2$ auf die Axen. — Ueber diese Deutung der λ, die ich hier nicht weiter verfolge, vergleiche man die Schlussbemerkungen des § 9.

In dieser Form lässt sich die geometrische Bedeutung dieses einfachen Integrals am leichtesten übersehen:

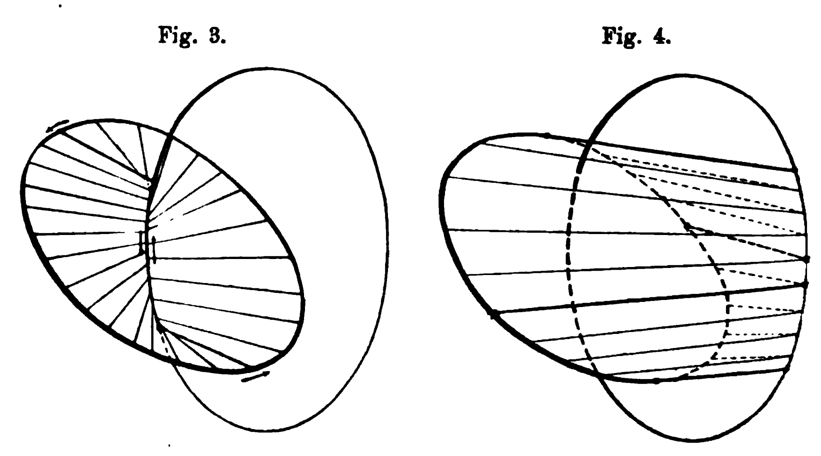
Man denke sich nämlich eine Gerade, stets parallel zur Ebene $z_2\, z_3$ bleibend, an den beiden Curven entlang gleiten, so misst die Anzahl der vollen Umdrehungen, die diese Gerade im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers bei dieser Bewegung beschreibt, die Anzahl der gegenseitigen Umwindungen beider Curven.

Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieses Satzes sofort durch Aufstellung des die Umdrehungszahl darstellenden Integrals. Für die anschauungsmässige Verfolgung der Bewegung der Geraden ist dabei noch folgendes zu beachten: Denkt man sich durch die gleitende Gerade eine Ebene parallel zur Ebene $z_2 z_3$ gelegt, so erfährt die Gerade in dieser Ebene die zu messende, drehende Bewegung und gleichzeitig wird die Ebene selbst in Richtung der Axe z_1 parallel verschoben. Besondere Stellen der Bewegung sind nun: Erstens diejenigen, in welchen der Sinn jener Drehung umkehrt; diese sind durch das Verschwinden der Zählerdeterminante unseres Integrals gekennzeichnet. (Vergl. die beiden durch $\times\times$ bezeichneten Stellen in nebenstehender Figur 4.) Zweitens diejenigen, in welchen die Richtung der Parallelverschiebung der Ebene umkehrt. Die letzteren Stellen sind durch das Verschwinden von ψ_{12} beziehungsweise von φ_{11} gegeben, d. h. durch diejenigen Lagen der sich verschiebenden Ebene, in welchen sie eine der beiden Curven berührt. Berührt dabei die Ebene die zweite Curve (ist also $\psi_{12} = 0$), so gleitet die bewegliche Gerade auf dieser im Sinne ihrer augenblicklichen Bewegung fort, während die Bewegung auf der ersten Curve direct umkehrt (vergl. die beiden durch $\circ\circ$ bezeichneten Stellen in den nebenstehenden Figuren 3 und 4). Dem entspricht analytisch, dass aus der Formel (10*) für das positiv zu nehmende Element $d\,o_1$:

$$d\mathfrak{o}_1 = \frac{\sqrt{\varphi_{11}^2 + \psi_{12}^2}}{\psi_{12}} \cdot d\lambda_1$$

folgt, dass mit ψ_{12} gleichzeitig $d\lambda_1$ sein Zeichen wechselt. Ein Gleiches ergiebt sich bezüglich des gleichzeitigen Zeichenwechsels von φ_{11} und $d\lambda_2$. Die beiden Curven werden also im gegenwärtigen Falle nicht (wie im Falle des Doppelintegrals (5)) im Sinne der wachsenden Parameter λ_1 und λ_2 durchlaufen, sondern im Sinne des positiven Elementes $d\mathfrak{o}_1$. Die nebenstehenden Figuren dienen noch zur Versinnlichung des Umstandes, dass nach dem Gesagten bei der Bewegung der gleitenden Geraden im Allgemeinen einzelne Theile der beiden Curven mehrfach in verschiedener Richtung, andere gar nicht von der Geraden überstrichen werden können.

Fig. 3. Fig. 4.



Weiter aber zeigen sie, dass der Verlauf dieser Bewegung sich auch aus mehreren getrennten Cyklen zusammensetzen kann, ohne dass darum die fraglichen Curven aus mehreren Zügen zu bestehen brauchen. Der Sinn, in welchem in diesem Falle die einzelnen Theilbewegungen zu addiren sind, wird festgelegt durch den an einer Anfangsstelle der Be-

wegung auf beiden Raumcurven (gemäss § 2, pag. 454) eingetragenen Richtungssinn, durch welchen auch die Richtung beim Beginne jeder in sich geschlossenen Theilbewegung der Geraden festgelegt wird.

c) Darstellung von V durch eine (Kronecker'sche) Summenformel.

Aus Formel (13) und (14) der „Beiträge I" ergeben sich für V sofort die beiden Summenformeln:

$$\text{13a)} \qquad V = \sum \operatorname{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\}$$

und

$$\text{13b)} \qquad V = \frac{1}{2} \cdot \sum \operatorname{sign.} \left\{ (\psi_3 - \varphi_3) \cdot \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\},$$

wobei die erste Summe sich erstreckt auf alle Punkte, für welche

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \quad \psi_3 - \varphi_3 > 0$$

ist, die letztere auf alle Punkte

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0.$$

Schreiben wir auch diese Formeln direct in den Coordinaten z_i' und z_i'' der beiden Raumcurven, so lauten sie, wenn man rechts noch mit $d\lambda_1 \cdot d\lambda_2$ multiplicirt:

$$\text{14a)} \qquad V = \sum \operatorname{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} \right\}$$

und

$$\text{14b)} \qquad V = \frac{1}{2} \cdot \sum \operatorname{sign.} \left\{ (z_3'' \quad z_3') \cdot \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} \right\},$$

die Summen ausgedehnt über

$$z_1'' - z_1' = 0, \quad z_2'' - z_2' = 0, \quad z_3'' - z_3' > 0,$$

beziehungsweise über:

$$z_1'' - z_1' = 0, \quad z_2'' - z_2' = 0;$$

dabei ist zu beachten, dass hier dz_i' und dz_i'' diejenigen Aenderungen der Coordinaten bezeichnen, welche positiven $d\lambda_1$ und $d\lambda_2$ entsprechen.

Die geometrische Bedeutung dieser Formeln ist unmittelbar ersichtlich:

Es wird die Windungszahl V bestimmt durch die Punktcharakteristiken der scheinbaren Doppelpunkte, welche das System der beiden Raumcurven vom Zenith aus gesehen (vergl. Seite 452) darbietet.

Dabei ergiebt sich folgende anschauliche Deutung für das Vorzeichen der beiden in der zweiten Summenformel enthaltenen Factoren:

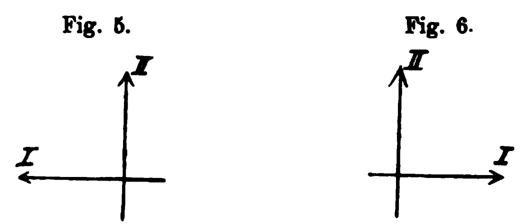
Der erste Factor $z_3'' - z_3'$ entscheidet durch sein Vorzeichen, ob im scheinbaren Doppelpunkt die erste der Curven unterhalb oder oberhalb der zweiten Curve verläuft.

Das Vorzeichen des zweiten Factors, der Determinante:

$$15) \qquad \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 = \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_2'' \\ -dz_1' & dz_2'' \end{vmatrix}$$

trennt die scheinbaren Doppelpunkte in zwei zu einander symmetrische Gattungen in folgender Weise: Man projicire die beiden Curven in der Richtung vom Zenith aus auf die Ebene $z_1\, z_2$ und trage in der Projection die auf der Curve festgesetzte Fortschreitungsrichtung ein. Unterscheidet man dann die beiden Curven wie in den obigen beiden Determinanten als erste und zweite, so entsprechen einem posi-

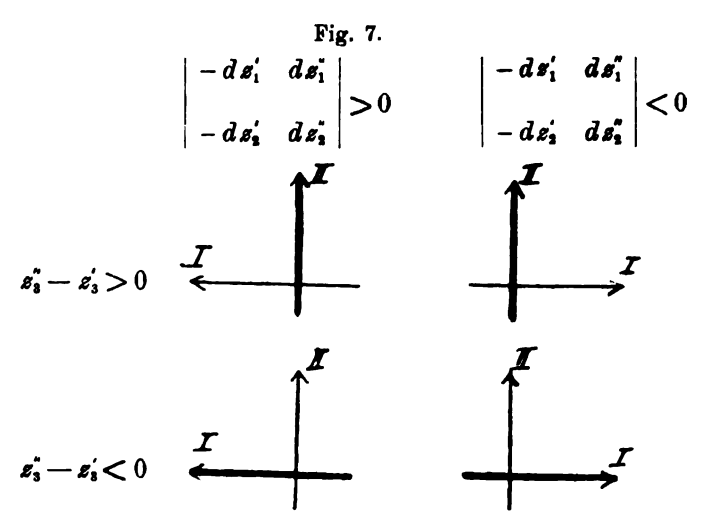
tiven, beziehungsweise einem negativen Werthe der Determinanten in den scheinbaren Doppelpunkten die durch Fig. 5 und 6



gekennzeichneten beiden Fälle. Die Determinante giebt nämlich den mit dem bekannten Möbius'schen Vorzeichen versehenen doppelten Inhalt des Dreiecks, welches durch die beiden vom scheinbaren Doppelpunkt (im positiven Richtungssinne) auslaufenden Bogenelemente bestimmt ist.

Die Formeln (14a, 14b) zählen also die Windungszahl V ab gemäss der durch die folgende Figur 7 gegebenen Unterscheidung der scheinbaren Doppelpunkte, die wir in ihrer Ansicht in Richtung vom Zenith aus darstellen und wobei die stark gezeichnete Curve dem Beschauer näher liegen soll:

Fig. 7.



Die Formel (14a) erstreckt sich nur über die Punkte, für welche $z_3'' - z_3' > 0$ ist. Dabei lässt sich diese Formel unmittelbar in die andere (14b) überführen, wenn wir beachten, dass

$$16)\quad \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\} = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} \right\} = 0$$

ist, falls wir die Summation über alle scheinbaren Doppelpunkte (die Unterschiede im Sinne der Figuren 5 und 6 genommen) erstrecken. Es entspricht diese hier unmittelbar geometrisch einleuchtende Beziehung der allgemeinen Formel, welche Kronecker für die Vorzeichensumme aller Punktcharakteristiken eines Functionensystems aufgestellt hat (vgl. „Beiträge I“, pag. 268).

§ 3.

Formeln für die Windungszahl unter der Voraussetzung, dass die beiden Raumcurven als Schnittlinien je zweier Flächen gegeben sind.

Nimmt man die beiden Raumcurven M_1' und M_1'' je durch zwei Gleichungen zwischen den Variabeln z_1, z_2, z_3 gegeben an und zwar die M_1'' durch:

$$17'')\quad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned}$$

die M_1' analog durch:

$$17')\quad \begin{aligned} F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned}$$

so lässt sich das Gauss'sche Doppelintegral für die Windungszahl nicht allgemein aufstellen. Dagegen treten hier direct die Formeln für die Kronecker'sche Charak-

teristik K des Systems der vier Functionen (mit drei Variabeln)

18) $$F_0, F_1, F_2, F_3 \quad \text{ein.}$$

Es lässt sich aus den geometrischen Entwicklungen, die Kronecker insbesondere in den Abschnitten II und V seiner Abhandlung über Functionensysteme vom März 1869 gegeben hat und in welchen die Charakteristik als Windungszahl einer gewissen ebenen Curve um den Nullpunkt erscheint (vgl. hiezu „Beiträge I", § 3), die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik als Zahl der gegenseitigen Windungen zweier Raumcurven (im Falle von drei Variabeln) herleiten. Wir gehen indess auf diese Form der Herleitung nicht näher ein, beweisen vielmehr in den folgenden §§ 4 und 5 die Uebereinstimmung der in den §§ 1 und 2 gegebenen Gauss'schen Zahl V mit der im gegenwärtigen § definirten Kronecker'schen Charakteristik K durch eine directe Vergleichung der für V abgeleiteten Summenformel (13a) und der entsprechenden, sogleich zu erwähnenden Summenformel für K (Formel (26a)).

Aus den in den „Beiträgen I" entwickelten Formeln (12), (26) und (13), (14) ergiebt sich die Darstellung der Zahl K durch ein dreifaches, durch ein zweifaches und durch ein einfaches Integral, sowie durch den Kronecker'schen Summenausdruck, Formeln, die wir der Vollständigkeit halber in Kürze hierher setzen.

a) Das dreifache Integral für K lautet:

19) $$K = \frac{1}{\omega_3} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} F & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}^{\,4}} \cdot do_3;$$

hier ist

$$do_3 = dz_1 \cdot dz_2 \cdot dz_3 \tag{20}$$

das positiv zu nehmende Element der Integration und die Integration über die Gesammtheit der reellen Werthe z_1, z_2, z_3 zu erstrecken.

b) Um die Darstellung durch ein zweifaches Integral zu erhalten, zeichnen wir eine der Functionen F_i z. B. F_0 aus und es folgt dann

$$K = \frac{1}{\omega_2} \cdot \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}^{\,3} \cdot \sqrt{F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2}} \cdot do_2, \tag{21}$$

wo do_2 das stets positiv zu nehmende Element der Fläche $F_0 = 0$, über welche die Integration zu erstrecken ist, bezeichnet. Für die Integration ist es zweckmässig, do_2 in den drei verschiedenen Formen

$$do_2 = \frac{\sqrt{F_{01}^2 + F_{02}^2 + F_{03}^2}}{F_{0i}} \cdot dz_k \cdot dz_l \tag{22}$$

$$i, k, l = 1, 2, 3$$

anzunehmen.

c) Das einfache Integral erstreckt sich über eine der in Betracht kommenden Curven, z. B. über $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, in welchem Falle wir erhalten:

$$23)\qquad K = \frac{1}{\omega_1}\cdot\int \frac{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}}{\sqrt{F_2^2+F_3^2}^{\,2}\cdot\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \end{Vmatrix}^2}}\cdot do_1,$$

wobei do_1 das stets positiv zu nehmende Linienelement der Curve $F_0 = 0$, $F_1 = 0$ bezeichnet, welches für die Integration (beim Auflösen der Zählerdeterminante nach den Unterdeterminanten der Matrix der ersten beiden Reihen) zweckmässig in den Formen

$$24)\qquad do_1 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{11} & F_{12} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{0k} & F_{0l} \\ F_{1k} & F_{1l} \end{vmatrix}}\cdot dz_i \qquad i, k, l = 1, 2, 3$$

anzunehmen ist.

Die Factoren ω_1, ω_2, ω_3 der drei Integralausdrücke sind beziehungsweise:

$$25)\qquad \omega_3 = 2\pi^2, \qquad \omega_2 = 4\pi, \qquad \omega_1 = 2\pi.$$

d) Als Summenformel zur Darstellung von K endlich ergeben sich, wenn wir die Functionen F_0, F_1, F_2 vor der letzten F_3 auszeichnen, die Formeln:

$$26\,a)\qquad K = -\sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix}\right\},$$

und

$$26\text{b)}\qquad K = \frac{1}{2}\cdot\Sigma\,\text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ 0 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_3 & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}\right\},\qquad .$$

die erstere Summe erstreckt über die Punkte, für welche

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 > 0$$

ist, die letztere ausgedehnt über die Punkte

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0.$$

Man hat dabei die Relation

$$27)\qquad \Sigma\,\text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix}\right\} = 0,$$

falls die Summe über alle Punkte

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0$$

erstreckt wird.

Bezüglich der geometrischen Bedeutung der vorstehenden Integralformeln sei auf die Entwicklungen der „Beiträge I" verwiesen. Auf die Discussion der Summenformeln haben wir sogleich einzugehen.

§ 4.

Ableitung einer neuen Formel für die Bestimmung der Charakteristik K.

Es handelt sich nunmehr in den folgenden §§ 4 und 5 darum, die Uebereinstimmung der Zahl V (der §§ 1 und 2) mit der jetzt (in § 3) betrachteten Zahl K zu erweisen.

Zunächst stehen, wie schon die geometrische Bedeutung der verschiedenen Ausdrücke erkennen lässt, die für beide gewonnenen Formeln in keiner directen Beziehung zu einander. Um sie mit einander in Verbindung zu bringen und ihre gegenseitige Stellung zu kennzeichnen, verfahren wir folgendermassen:

Wir knüpfen an die beiden Summenformeln (13a) und (26a) für V und K an und zeigen, dass die in diesen Formeln dargestellten Zahlen an denselben Stellen und in gleichem Sinne sich ändern, wenn wir die gegenseitige Lage der Curven M_1' und M_1'' durch Bewegung derselben abändern. Nunmehr bringen wir beide Curven, ohne sie zu deformiren, in eine solche Lage, dass sie keinerlei gegenseitige Verschlingung mehr besitzen (was unter Voraussetzung von ganz im Endlichen gelegenen Curven stets möglich ist); für diese Lage ist V sowohl wie K gleich Null. Bewegen wir von dieser Ausgangslage der Zählung aus die Curven in ihre ursprüngliche Lage zurück, so ändern sich die beiden Zahlen in gleicher Weise und damit folgt schliesslich für die Endlage:

28) $$V = K.$$

Gleichzeitig aber gewinnen wir in dieser Abzählung der Aenderungen der Zahlen V, beziehungsweise K im Laufe der Bewegung der Curven M_1' und M_1'' gegen einander eine neue Methode zur Bestimmung unserer Windungszahl.[1])

---

1) Die hier angewendete Methode der Abzählung einer Charakteristik hat Kronecker ganz allgemein formulirt mittelst der Einführung willkürlicher Parameter in die Functionen des Systems; er hat bei dieser Gelegenheit auf die durch die Einführung eines Parameters gegebene Möglichkeit einer Abzählung der Charakteristik mit Hülfe des Sturm'schen Verfahrens hingewiesen. Vergl. Berliner Monatsberichte vom 21. Febr. 1878, pag. 147, 148.

Zur rechnerischen Darlegung wählen wir speciell für die Veränderung der gegenseitigen Lage der beiden Curven eine Verschiebung der Curve M_1'' in Richtung der Axe z_3, bei festgehaltener Curve M_1'.

Wir betrachten zunächst die Summenformel (13a)

$$\text{13a)} \qquad V = \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe ausgedehnt über:

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \qquad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \qquad \psi_3 - \varphi_3 > 0.$$

Die Curve M_1'' sei um die Strecke C in Richtung der negativen Axe z_3 verschoben, so dass also für die verschobene Curve

$$\text{29)} \qquad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1, \\ z_2 &= \psi_2, \\ z_3 &= \psi_3 - C \end{aligned}$$

ist. Wählen wir nun C so gross, gleich C_0, dass für alle scheinbaren Doppelpunkte $\psi_1 - \varphi_1 = 0$, $\psi_2 - \varphi_2 = 0$ der beiden Curven stets

$$(\psi_3 - C_0) - \varphi_3 < 0$$

ist, so wird die einer solchen Lage der beiden Curven entsprechende Zahl $V_{C_0} = 0$ sein, weil alle scheinbaren Doppelpunkte aus dem Bereich der Abzählung gerückt sind. Von hier ab also als Ausgangslage haben wir die Zählung zu beginnen und nunmehr C von C_0 bis 0 abnehmen zu lassen. Passiren wir nun, die Curve M_1'' in der positiven Richtung der Axe z_3 an die feste Curve M_1' heranschiebend, mit einem Zweige der M_1'' die M_1', so tritt an einer solchen Stelle $C = \overline{C}$, für welche also

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \qquad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \qquad (\psi_3 - \bar{C}) - \varphi_3 = 0$$

ist, der betreffende scheinbare Doppelpunkt in den Bereich unserer Abzählung ein, weil hier die Function $(\psi_3 - C) - \varphi_3$ von einem negativen zu einem positiven Zahlwerth übergeht. Der Werth von V wird also an einer solchen Stelle:

$$\left.\begin{array}{l}\text{um 1 vermehrt,}\\ \text{um 1 vermindert,}\end{array}\right. \quad \text{wenn für diesen Punkt} \quad \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array}$$

ist. Die im Laufe der Bewegung von $C = C_0$ mit abnehmendem C bis $C = 0$ an den Durchgangspunkten der beweglichen Curve durch die feste Curve eingetretenen Aenderungen ergeben also für die Endlage der beiden Curven die Zahl V ausgedrückt genau durch die obige Summenformel (13a).

Zu einer neuen Summenformel werden wir dagegen geführt, wenn wir dieselbe Betrachtung unter der Voraussetzung der Definition unserer Curven durch die Gleichungen $F_i = 0$ durchführen.

Es handelt sich hier um die Summenformel (26a)

$$K = -\sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix} \right\}, \tag{26a}$$

die Summe ausgedehnt über

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 > 0.$$

Die Verschiebung der Curve $M_1^{\cdot\cdot}$ in Richtung der negativen Axe z_3 um den Betrag C giebt für die verschobene Curve die Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Wählt man also, alle Flächen $F_i = 0$ als ganz im Endlichen liegend vorausgesetzt, nur C gross genug, gleich C_0, so werden sämmtliche Punkte der verschobenen Curve M_1'' kleinere Ordinaten besitzen, als die Punkte der festen Fläche $F_2 = 0$ und damit auch kleinere, als die Punkte der auf ihr liegenden festen Curve M_1'. Dann ergiebt sich für einen solchen Werth C_0 von C die Zahl $K_{C_0} = 0$, weil die Gleichungen

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_2(z_1, z_2, z_3) = 0$$

keine reellen gemeinsamen Lösungen mehr besitzen.

Von dieser Lage $C = C_0$ als Anfangslage aus verschieben wir nun wieder die Curve M_1'' in der Richtung der positiven Axe z_3; es handelt sich dann darum, zu bestimmen, an welchen Stellen $\overline{C}$ die durch die folgende Formel gegebene Zahl K_C sich ändert.

$$31) \qquad K_C = -\sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01}(z_1, z_2, z_3 + C) & F_{02}(z_1, z_2, z_3 + C) & F_{03}(z_1, z_2, z_3 + C) \\ F_{11}(z_1, z_2, z_3 + C) & F_{12}(z_1, z_2, z_3 + C) & F_{13}(z_1, z_2, z_3 + C) \\ F_{21}(z_1, z_2, z_3) & F_{22}(z_1, z_2, z_3) & F_{23}(z_1, z_2, z_3) \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe ausgedehnt über alle Werthe

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0,$$
$$F_2(z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad F_3(z_1, z_2, z_3) > 0.$$

Zunächst treten von $C = C_0$ an je paarweise gemeinsame Lösungen der Gleichungen

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_2(z_1, z_2, z_3) = 0$$

auf an den Berührungsstellen der sich verschiebenden Curve M_1'' mit der festen Fläche $F_2 = 0$, beziehungsweise verschwinden je zwei solche Punkte, die im Laufe der Bewegung der Curve M_1'' entstanden sind, wieder. An diesen Stellen ist die Determinante in der obigen Formel (31) für K_C gleich

Null, während sie für die beiden im Berührungspunkte zusammenrückenden Schnittpunkte der Curve mit der Fläche $F_3 = 0$ (wenn wir von singulären Vorkommnissen, wie dies hier stets geschieht, absehen) je verschiedenes Vorzeichen aufweist. Diese Stellen üben also keinen Einfluss auf die Zahl K_C aus.

Wenn dagegen ein Zweig der Curve M_1'' die feste Curve M_1' passirt, d. h. an den Stellen, für welche die Gleichungen

$$32)\qquad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0 \\ F_1(z_1, z_2, z_3 + C) &= 0 \\ F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0 \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0 \end{aligned}$$

gemeinsame Lösungen besitzen, tritt eine Aenderung in der Abzählung ein, insoferne ein Punkt, für welchen die drei ersten Gleichungen erfüllt sind, entweder aus einem Gebiete, in welchen $F_3 < 0$ ist, in das Gebiet $F_3 > 0$ eintritt und dadurch bei der Abzählung gemäss Formel (31) neu hinzukommt, oder umgekehrt aus $F_3 > 0$ in das Gebiet $F_3 < 0$ eintritt und dadurch für die Abzählung in Wegfall kommt. Eine solche Stelle ist also im ersten Falle mit ∓ 1 für die Bildung der Zahl K in Rechnung zu setzen je nachdem die Determinante in der Formel für K_C an dieser Stelle $\gtrless 0$ ist, im zweiten Falle dagegen mit ± 1.

Nun seien $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ die Coordinaten, $\bar{C}$ der Parameter in einem solchen Durchgangspunkt der beweglichen Curve M_1'' durch die feste Curve M_1'; vor dieser Lage kommt der beweglichen Curve der Parameter $\bar{C} + dC$, nach derselben der Parameter $\bar{C} - dC$ zu, wo nach unserer Annahme über die Richtung der Verschiebung (von $C = C_0$ bis $C = 0$), dC eine positive Aenderung bezeichnet. Die Coordinaten, bez. der Parameter für den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der drei Flächen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ vor und nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle sind

$$\bar{z}_1 \pm dz_1, \qquad \bar{z}_2 \pm dz_2, \qquad \bar{z}_3 \pm dz_3, \qquad \bar{C} \pm dC$$

wobei, wie sich direct ergiebt:

$$33) \qquad dz_1 : dz_2 : dz_3 : dC = \left\| \begin{matrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Der Unterschied, ob beim Durchgang durch die singuläre Stelle der Schnittpunkt der drei Flächen $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ aus einem Gebiet $F_3 < 0$ in ein Gebiet $F_3 > 0$ rückt oder ob das umgekehrte statthat, wird durch das positive oder negative Vorzeichen des Werthes von

$$34) \qquad -(F_{31}\, dz_1 + F_{32}\, dz_2 + F_{33}\, dz_3),$$

(die $(-dz_i)$ als die Aenderungen der z_i nach dem Durchgang durch die singuläre Stelle gerechnet), entschieden, also mit Berücksichtigung der obigen Werthe für die dz_i durch das Vorzeichen des Determinantenquotienten:

$$35) \qquad - \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{vmatrix} :$$

Nun ist aber nach Seite 473 für die Abzählung der Durchgangspunkte ∓ 1 in Rechnung zu setzen, je nachdem der Ausdruck (35) und die Determinante in (31), d. i. die Nennerdeterminante von (35), gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Die an einer solchen Stelle erfolgende Aenderung der Zahl K_C ergiebt sich also zu ± 1, je nachdem die Zählerdeterminante einen positiven oder negativen Werth besitzt.

Danach ergiebt sich also für die Abzählung der Zahl K durch die Summation sämmtlicher Aenderungen, welche die Zahl K_C von $C = C_0$ bis $C = 0$ erleidet, die folgende neue Formel:

$$36)\qquad K = \sum \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix}\right\},$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0(z_1, z_2, z_3 + C) = 0, \quad F_1(z_1, z_2, z_3 + C) = 0,$$
$$F_2(z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad F_3(z_1, z_2, z_3) = 0$$

und

$$C > 0$$

ist.

Man erkennt dabei sofort, dass K sich durch diese Formel darstellt als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der fünf Functionen

$$37)\qquad \begin{matrix} F_0(z_1, z_2, z_3 + C), & F_1(z_1, z_2, z_3 + C), & \\ F_2(z_1, z_2, z_3), & F_3(z_1, z_2, z_3), & C \end{matrix}$$

mit den vier Variabeln z_1, z_2, z_3, C, und kann sich, davon ausgehend, auch direct von der Uebereinstimmung der in den Formeln (26a) und (36) gewonnenen Zahlen überzeugen.

Man hat zu dem Ende nur die Kronecker'sche Summenformel zu bilden für die Functionen:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad C = 0, \qquad F_3 > 0,$$

um unmittelbar Formel (26a) zu erhalten. Dabei ist für die Bestimmung des Vorzeichens die Vertauschung der Reihenfolge der Functionen F_3 und C zu berücksichtigen.

§ 5.

Beweis der Uebereinstimmung der Zahlen V und K.

Mit Hülfe der neuen Formel für die Bestimmung der Zahl K ist nun der Uebergang von dieser zu der aus dem System der Functionen $\psi_1-\varphi_1$, $\psi_2-\varphi_2$, $\psi_3-\varphi_3$ abgeleiteten Zahl V gegeben. Das Vorzeichen der Determinante

$$38)\qquad \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

unterscheidet nämlich die scheinbaren Doppelpunkte der beiden Curven M_1' und M_1'' (genommen in der Richtung der Axe z_3) in demselben Sinne, wie das Vorzeichen der Determinante

$$39)\qquad \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix},$$

von dessen Bedeutung wir in § 2 (pag. 462) gehandelt haben.

Die letztere Determinante trennt nämlich die scheinbaren Doppelpunkte nach dem Vorzeichen des kleinen Flächenelements, welches bei Projection der auf den beiden Curven im scheinbaren Doppelpunkt angenommenen Linienelemente do_1' und do_1'' auf die Ebene $z_1\ z_2$ entsteht. Dabei sind beide Curven im Sinne der wachsenden Parameter durchlaufen angenommen. Sind nun die beiden Raumcurven durch die Gleichungen $F_i=0$ gegeben, so hat man für die dz_1', dz_2', dz_3' der ersten Curve

$$40')\qquad \begin{aligned} F_{21}\,dz_1' + F_{22}\,dz_2' + F_{23}\,dz_3' &= 0, \\ F_{31}\,dz_1' + F_{32}\,dz_2' + F_{33}\,dz_3' &= 0. \end{aligned}$$

und für die zweite Curve analog:

$$40'')\qquad \begin{aligned} F_{01}\, dz_1'' + F_{02}\, dz_2'' + F_{03}\, dz_3'' &= 0, \\ F_{11}\, dz_1'' + F_{12}\, dz_2'' + F_{13}\, dz_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Führt man diese Beziehungen ein, so folgt nach kurzer Umrechnung für den Inhalt jenes kleinen Elementes:

$$41)\qquad \begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2$$

$$= \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{dz_3'}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \cdot \frac{dz_3''}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}}$$

Nun gilt aber für die positiv zu nehmenden Linienelemente beider Curven:

$$42')\qquad do_1' = \sqrt{\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 + \varphi_{31}^2} \cdot d\lambda_1 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \cdot dz_3',$$

$$42'')\qquad do_1'' = \sqrt{\psi_{12}^2 + \psi_{22}^2 + \psi_{32}^2} \cdot d\lambda_2 = \frac{\sqrt{\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \end{Vmatrix}^2}}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}} \cdot dz_3''.$$

Nehmen wir also (wie stets) die Quadratwurzeln aus den Quadratsummen positiv, so sind für die Summation

zugleich mit $d\lambda_1$, beziehungsweise $d\lambda_2$ auch die beiden Ausdrücke:

$$43) \qquad \frac{dz_3'}{\begin{vmatrix} F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad \frac{dz_3''}{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} \\ F_{11} & F_{12} \end{vmatrix}}$$

positiv zunehmen[1]), d. h. für alle Elemente der Summation ist:

$$44) \qquad \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -dz_1' & dz_1'' \\ -dz_2' & dz_2'' \end{vmatrix}\right\} = \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \psi_{12} \\ -\varphi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \text{sign.}\left\{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & 0 & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 \end{vmatrix}\right\}.$$

Es kommen somit für die Abzählung der Zahlen V und K durch die Formeln (13a) und (36) dieselben Punkte,

---

1) Man bemerkt unmittelbar, dass diese Vorzeichenbestimmung genau übereinstimmt mit der durch das Kronecker'sche „Fortgangsprincip" (Berichte der Berliner Akademie vom März 1869, pag. 160) gegebenen. Nach der Kronecker'schen Regel ist die Fortgangsrichtung auf den beiden Curven so zu wählen, dass die Ausdrücke

$$\begin{vmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \cdot d\Phi \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix} \cdot d\Phi$$

stets positiv sind; ersetzt man für die beiden Ausdrücke die willkürliche Function $\Phi(z_1, z_2, z_3)$ durch z_3, so ergeben sich die obigen Bedingungen.

nämlich die bei der Bewegung von M_1'' gegen M_1' auftretenden wirklichen Doppelpunkte, genommen beiderseits mit denselben Vorzeichen in Rechnung. Damit ist aber die Identität der nach den Formeln (13a), (26a) und (36) gewonnenen Zahlen V und K bewiesen.

Wir fassen das Resultat der vorliegenden Untersuchung zusammen in dem Satze:

Die Zahl der gegenseitigen Umschlingungen zweier Raumcurven im Gauss'schen Sinne ist identisch mit der Kronecker'schen charakteristischen Zahl des Functionensystems:

$$7)\quad \psi_1(\lambda_2)-\varphi_1(\lambda_1),\quad \psi_2(\lambda_2)-\varphi_2(\lambda_1),\quad \psi_3(\lambda_2)-\varphi_3(\lambda_1),$$

beziehungsweise des Functionensystems:

$$18)\quad F_0(z_1,z_2,z_3),\quad F_1(z_1,z_2,z_3),\quad F_2(z_1,z_2,z_3),\quad F_3(z_1,z_2,z_3),$$

wenn

$$4)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(\lambda_1), \\ z_2 &= \varphi_2(\lambda_1), \\ z_3 &= \varphi_3(\lambda_1), \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} z_1 &= \psi_1(\lambda_2), \\ z_2 &= \psi_2(\lambda_2), \\ z_3 &= \psi_3(\lambda_2), \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$17)\qquad \begin{aligned} F_0(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_1(z_1, z_2, z_3) &= 0, \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} F_2(z_1, z_2, z_3) &= 0, \\ F_3(z_1, z_2, z_3) &= 0 \end{aligned}$$

die zur analytischen Darstellung der beiden Curven dienenden Gleichungen sind.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der gegenseitigen Umwindung k-dimensionaler und $n-k-1$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten im linearen Gebiete von n Dimensionen.

§ 6.

Verallgemeinerung des Gauss'schen Integrals für Gebiete von n Dimensionen.

Die Gauss'sche Formel für die Zahl der gegenseitigen Umwindungen zweier Raumcurven und ihre Darstellung als Kronecker'sche Charakteristik eines zugehörigen Functionensystems lässt nun die nachfolgende Erweiterung für höhere Mannigfaltigkeiten naturgemäss erscheinen:

Es seien im Gebiete von n reellen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ die wir (zu kurzer Sprechweise) als rechtwinklige Coordinaten des linearen Raumes L_n von n Dimensionen bezeichnen und deuten wollen, je zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} von k, beziehungsweise von $n-k-1$ Dimensionen gegeben; so definiren wir als gegenseitige Windungszahl V der beiden Mannigfaltigkeiten den Werth des Integrals:

$$
45)\qquad V=\frac{1}{\tilde{\omega}_{n-1}}\cdot\int\limits_{M''_{n-k-1}}\int\limits_{M'_k}\frac{\begin{vmatrix}
z''_1-z'_1 & -\overset{(1)}{dz'_1} & -\overset{(2)}{dz'_1}\ldots & -\overset{(k)}{dz'_1} & \overset{(k+1)}{dz''_1} & \overset{(k+2)}{dz''_1}\ldots & \overset{(n-1)}{dz''_1}\\
z''_2-z'_2 & -\overset{(1)}{dz'_2} & -\overset{(2)}{dz'_2}\ldots & -\overset{(k)}{dz'_2} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \overset{(k+2)}{dz''_2}\ldots & \overset{(n-1)}{dz''_2}\\
z''_3-z'_3 & -\overset{(1)}{dz'_3} & -\overset{(2)}{dz'_3}\ldots & -\overset{(k)}{dz'_3} & \overset{(k+1)}{dz''_3} & \overset{(k+2)}{dz''_3}\ldots & \overset{(n-1)}{dz''_3}\\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot\\
z''_n-z'_n & -\overset{(1)}{dz'_n} & -\overset{(2)}{dz'_n}\ldots & -\overset{(k)}{dz'_n} & \overset{(k+1)}{dz''_n} & \overset{(k+2)}{dz''_n}\ldots & \overset{(n-1)}{dz''_n}
\end{vmatrix}}{\sqrt{(z''_1-z'_1)^2+(z''_2-z'_2)^2+(z''_3-z'_3)^2+\ldots+(z''_n-z'_n)^2}^{\,n}}
$$

Die Integration erstreckt sich dabei für die Variabeln $z'_1\ldots z'_n$ über die Mannigfaltigkeit M'_k, für die Variabeln $z''_1\ldots z''_n$ über die Mannigfaltigkeit M''_{n-k-1}. $\tilde{\omega}_{n-1}$ bezeichnet die $n-1$-dimensionale Oberfläche der „Kugel“ vom Radius 1

$$z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2=1.$$

Ehe wir zeigen, dass durch dieses Integral, ausgedehnt über zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten, eine ganze Zahl dargestellt wird, betrachten wir die Bedeutung des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes.

Ausgehend vom Punkte

$$z'_1,\quad z'_2,\quad z'_3\quad\ldots\quad z'_n$$

der M'_k sind auf dieser Mannigfaltigkeit in bestimmter Reihenfolge k Nachbarpunkte:

$$z'_1+\overset{(i)}{dz'_1},\quad z'_2+\overset{(i)}{dz'_2}\quad z'_3+\overset{(i)}{dz'_3}\ \ldots\ z'_n+\overset{(i)}{dz'_n}\qquad i=1,2,\ldots k$$

angenommen. Ebenso, vom Punkte

$$z''_1,\quad z''_2,\quad z''_3,\quad\ldots\quad z''_n$$

der M''_{n-k-1} ausgehend, auf dieser $n-k-1$ Nachbarpunkte

$$z''_1+\overset{(j)}{dz''_1}\quad z''_2+\overset{(j)}{dz''_2}\quad z''_3+\overset{(j)}{dz''_3}\ldots\quad z''_n+\overset{(j)}{dz''_n}\qquad j=k+1,\ldots n-1.$$

Diese $n+1$ Punkte bilden die Eckpunkte eines dem Tetraeder im dreidimensionalen Raume analogen Körpers im L_n, welchen wir analog wie das Tetraeder zum Parallelepiped zu einem parallelepipedischen Element do, dessen Eckpunkte sich aus den oben gegebenen durch Addition der Coordinaten ergeben, ergänzen können. Der Inhalt dieses Körpers ist durch die Zählerdeterminante des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes dargestellt. Die in der M'_k liegende Gruppe von $k+1$ Punkten bestimmt dabei ein parallelepipedisches Element der M'_k, do'_k, und ebenso die in der M''_{n-k-1} liegende Gruppe von $n-k$ Punkten ein solches Element do''_{n-k-1} dieser Mannigfaltigkeit. Im Nenner des Ausdruckes steht die (absolut zu nehmende) n^{te} Potenz der Entfernung r der beiden Elemente do'_k und do''_{n-k-1} von einander, die wir auch als den Inhalt des „n dimensionalen Würfels" von der Kantenlänge r deuten können.

Für die Integration über die beiden Mannigfaltigkeiten setzen wir in Analogie mit der für das Gauss'sche Integral zu beachtenden Bestimmung fest, dass die Elemente

$$46') \qquad do'_k = \sqrt{\begin{Vmatrix} \overset{(1)}{dz'_1} & \overset{(1)}{dz'_2} & \overset{(1)}{dz'_3} & \dots & \overset{(1)}{dz'_n} \\ \overset{(2)}{dz'_1} & \overset{(2)}{dz'_2} & \overset{(2)}{dz'_3} & \dots & \overset{(2)}{dz'_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \overset{(k)}{dz'_1} & \overset{(k)}{dz'_2} & \overset{(k)}{dz'_3} & \dots & \overset{(k)}{dz'_n} \end{Vmatrix}^2}$$

und

$$46'') \qquad do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{Vmatrix} \overset{(k+1)}{dz''_1} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \overset{(k+1)}{dz''_3} & \dots & \overset{(k+1)}{dz''_n} \\ \overset{(k+2)}{dz''_1} & \overset{(k+2)}{dz''_2} & \overset{(k+2)}{dz''_3} & \dots & \overset{(k+2)}{dz''_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \overset{(n-1)}{dz''_1} & \overset{(n-1)}{dz''_2} & \overset{(n-1)}{dz''_3} & \dots & \overset{(n-1)}{dz''_n} \end{Vmatrix}^2}$$

der M'_k bezw. M''_{n-k-1} in unserem ganzen Gebiete niemals verschwinden sollen, dass also niemals gleichzeitig die sämmtlichen Unterdeterminanten einer der Matrices Null sein sollen.[1]) (Vergl. die Bemerkung auf pag. 452).

Das Vorzeichen der Determinante im Zähler unseres Integrals unterscheidet dann in analoger Weise wie im Gebiete von drei Dimensionen zwei wesentlich verschiedene Lagen der Elemente do'_k und do''_{n-k-1} gegen einander, die wir in Analogie mit der dort gegebenen geometrischen Vorstellung als „im entgegengesetzten Sinne windend" bezeichnen wollen. Wesentlich ist dabei der durch die Reihenfolge der k bezw. $n-k-1$ Fortschreitungsrichtungen (die durch die $\overset{(i)}{dz'}$ bezw. $\overset{(j)}{dz''}$ definirt sind) in die Elemente do'_k und do''_{n-k-1} gelegte Sinn. Dieser Richtungssinn ergiebt sich für die ganze Mannigfaltigkeit M'_k bezw. M''_{n-k-1} in eindeutig bestimmter Weise, wenn er für ein bestimmtes, aber übrigens beliebiges Element von M'_k bezw. M''_{n-k-1} festgelegt ist. Man vergleiche für diese Festlegung die Formeln (49) und (64).

Durch unsere Annahmen über die Möglichkeit der eindeutigen Festlegung des Richtungssinnes schliessen wir die sogenannten „Doppelmannigfaltigkeiten", bei welchen man in dem hier entwickelten Sinne von einer Windungszahl nicht sprechen kann, von der gegenwärtigen Betrachtung aus.

Es ist noch folgender Umstand bemerkenswerth: Wir konnten dem positiven und negativen Vorzeichen der Determinante in Formel (45) im Falle zweier Raumcurven eine ganz bestimmte Lagenbeziehung der beiden gerichteten Elemente do'_1 und do''_1 der Raumcurven an die Seite stellen

---

1) Es genügt übrigens schon, anzunehmen, dass die Unterdeterminanten je einer der beiden Matrices in (46') und (46") nicht sämmtlich zugleich für Gebiete von $k-1$ bezw. von $n-k-2$ Dimensionen auf M'_k bezw. M''_{n-k-1} verschwinden.

(Fig. 1 und 2, pag. 452), welche gegenseitig umkehrbar war.

Im Falle zweier Mannigfaltigkeiten von k bezw. $n-k-1$ Dimensionen ist diese Beziehung nicht mehr in allen Fällen eine gegenseitig umkehrbare.

Vertauschen wir nämlich in der Formel (45) die beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} miteinander, so erhält, wenn wir die Reihenfolge der Linienelemente auf beiden festhalten, die Determinante das Vorzeichen

$$(-1)^{n \cdot n-k},$$

die Determinante behält also bei der Vertauschung das Vorzeichen, wenn

n gerade, k gerade oder ungerade
n ungerade, k ungerade

ist; d. h. in diesen Fällen ist die Windung des Elementes do'_k gegen das Element do''_{n-k-1} dieselbe, wie die Windung des Elementes do''_{n-k-1} gegen do'_k. Dagegen wechselt für

n ungerade, k gerade

die Determinante ihr Vorzeichen, d. h. die Windung des Elementes do'_k gegen do''_{n-k-1} ist entgegengesetzt gleich der Windung des Elementes do''_{n-k-1} gegen do'_k. Die Windungszahl der geschlossenen Mannigfaltigkeiten selbst wechselt also für ungerades n und gerades k bei der Vertauschung derselben ihr Vorzeichen.

§ 7.

Formeln für die Windungszahl unter Voraussetzung einer Parameterdarstellung für die beiden Mannigfaltigkeiten.

Wir legen analog wie für die beiden Raumcurven jetzt für unsere Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} eine Parameterdarstellung zu Grunde durch die Gleichungssysteme:

$$
47')\qquad
\begin{aligned}
z'_1 &= \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
z'_2 &= \varphi_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
z'_n &= \varphi_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k),
\end{aligned}
$$

beziehungsweise:

$$
47'')\qquad
\begin{aligned}
z''_1 &= \psi_1(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),\\
z''_2 &= \psi_2(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
z''_n &= \psi_n(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}),
\end{aligned}
$$

in welchen die Functionen φ bez. ψ wieder als eindeutige reelle Functionen der reellen, von einander unabhängigen Veränderlichen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$; $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots \lambda_{n-1}$ vorausgegesetzt sind.

Wählen wir jetzt zum Punkte z'_μ auf M'_k gerade die k Nachbarpunkte $z'_\mu + \overset{(i)}{d} z'_\mu$, welche entstehen, wenn wir nur je einen der Parameter λ_μ um den positiven Betrag $d\lambda_\mu$ ändern und verfahren in gleicher Weise im Punkte z''_ν auf M''_{n-k-1}, so setzt sich unser obiges Integral (45) direct um in die Form:

$$
48)\qquad V = \frac{1}{\tilde{\omega}_{n-1}} \cdot \iint\limits_{M''_{n-k-1} M'_k} \frac{\begin{vmatrix} \psi_1 - \varphi_1 & -\varphi_{11} \cdots -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} \cdots \psi_{1\,n-1} \\ \psi_2 - \varphi_2 & -\varphi_{21} \cdots -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} \cdots \psi_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \psi_n - \varphi_n & -\varphi_{n1} \cdots -\varphi_{nk} & \psi_{n\,k+1} \cdots \psi_{n\,n-1} \end{vmatrix}}{\sqrt{(\psi_1 - \varphi_1)^2 + (\psi_2 - \varphi_2)^2 + \ldots + (\psi_n - \varphi_n)^2}^{\,n}} \cdot d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1},
$$

in welcher die den φ bez. ψ angefügten zweiten Indices die nach dem entsprechenden Parameter λ genommenen Dif-

ferentialquotienten bezeichnen. Die Integration erstreckt sich dabei über die sämmtlichen absolut zu nehmenden Elemente der beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1}, für welche die Formeln gelten:

$$49') \quad do'_k = \sqrt{\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \cdots & \varphi_{nk} \end{Vmatrix}^2} \cdot d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_k,$$

beziehungsweise

$$49'') \quad do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{Vmatrix} \psi_{1k+1} & \psi_{2k+1} & \cdots & \psi_{nk+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{1n-1} & \psi_{2n-1} & \cdots & \psi_{nn-1} \end{Vmatrix}^2} \cdot d\lambda_{k+1} \, d\lambda_{k+2} \ldots d\lambda_{n-1};$$

wir verfügen dabei über die Richtung der Elemente für die Integration so, dass wir im Sinne der wachsenden λ integriren; die $d\lambda$ sind also stets positiv. Die Integration ist an Grenzbedingungen nicht geknüpft.

Formel (48) kennzeichnet somit, nach den im I. Theil der Beiträge gegebenen Entwicklungen (Formel (12) auf pag. 266) die Zahl V als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der n Functionen:

$$50) \qquad \psi_1 - \varphi_1, \quad \psi_2 - \varphi_2, \quad \ldots \quad \psi_n - \varphi_n$$

der $n-1$ Variabeln $\lambda_1, \ldots \lambda_k, \lambda_{k+1} \ldots \lambda_{n-1}$. V ist daher auch stets eine ganze Zahl, die wir eben als Windungszahl bezeichnen.

Führen wir nun in Analogie mit unseren früheren Formeln (8) die durch die Gleichungen

$$
51) \quad \begin{aligned}
z_1 &= \psi_1(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_1(\lambda_1, \ldots \lambda_k),\\
z_2 &= \psi_2(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_2(\lambda_2, \ldots \lambda_k),\\
&\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\\
z_n &= \psi_n(\lambda_{k+1}, \ldots \lambda_{n-1}) - \varphi_n(\lambda_1, \ldots \lambda_k)
\end{aligned}
$$

definirte $n-1$ dimensionale Mannigfaltigkeit ein,[1]) so folgt auch hier der Satz:

Die Zahl der gegenseitigen Umwindungen der in (47) dargestellten Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} ist gleich der Zahl der Windungen der Mannigfaltigkeit (51) um den Nullpunkt.

Die Zahl V lässt sich nunmehr als Charakteristik des Functionensystems (50) im Anschluss an die in den „Beiträgen I" entwickelten Formeln weiter darstellen durch ein $n-2$-faches, $n-3$-faches, ... einfaches Integral und durch eine Summenformel, und es ergeben sich hieraus neue Methoden für die Herleitung der Windungszahl in Analogie mit den in § 2 für zwei Raumcurven gegebenen. Es ist nicht uninteressant, deren Bedeutung im Einzelnen näher zu verfolgen[2]); wir greifen aber im Gegenwärtigen von dieser

---

1) Die Mannigfaltigkeit M_{n-1} (51) kann dabei analog wie die Fläche (8) in übersichtlicher Weise entstanden gedacht werden dadurch, dass man durch den Nullpunkt des Coordinatensystems Strahlen parallel zu den $(n-1)$-fach unendlich vielen zwischen den beiden Mannigfaltigkeiten zu ziehenden Sehnen zieht und auf diesen je die Längen dieser Sehnen, gemessen in der Richtung von der ersten zur zweiten Mannigfaltigkeit, abschneidet. Andererseits kann, analog wie dort, M_{n-1} auch entstanden gedacht werden als „Translationsmannigfaltigkeit", die sich auf eine zur $M''_{n-k-1}: z''_i = \psi_i(\lambda_{k+1} \ldots \lambda_{n-1})$ congruente und auf eine zweite aus der M'_k durch „Spiegelung am Nullpunkt" entstandene Mannigfaltigkeit $z_i = -\varphi_i(\lambda_1 \ldots \lambda_k)$ als Leitgebilde bezieht.

2) Man vergleiche für eine weitere Deutung der hierher gehörigen Formeln auch die Schlussbemerkungen des § 9.

ganzen Reihe der Darstellungen von V nur das letzte Glied, die Summenformel, heraus, auf welche wir in der Folge noch einzugehen haben.

Die Summenformel, in ihrer doppelten Gestalt, lautet:

52a)

$$V = (-1)^{n-1} \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} \right\}$$

oder

52b)

$$V = (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \sum \text{sign.} \left\{ (\psi_n - \varphi_n) \cdot \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} \right\}$$

die erste Summe ausgedehnt über alle Punkte, für welche

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \;\; \psi_2 - \varphi_2 = 0, \;\ldots\; \psi_{n-1} - \varphi_{n-1} = 0, \;\; \psi_n - \varphi_n > 0$$

ist, die zweite ausgedehnt über alle Punkte

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0, \;\ldots\; \psi_{n-1} - \varphi_{n-1} = 0.$$

Wir können diese Punkte in geometrischer Sprechweise bezeichnen als die scheinbaren Doppelpunkte, welche die Ansicht der beiden im linearen Raume L_n der $z_1 \ldots z_n$ gelegenen Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} gesehen in der Richtung der Axe z_n darbietet. Das Vorzeichen des Fac-

tors $(\psi_n - \varphi_n)$ an jeder dieser Stellen besagt uns, welche der beiden Mannigfaltigkeiten dort dem Beschauer, den wir wieder im Punkte $z_n = +\infty$, $z_1 = z_2 \ldots z_{n-1} = 0$ aufgestellt denken, näher liegt. Das Vorzeichen des zweiten Factors trennt die scheinbaren Doppelpunkte nach dem Sinne der $n-1$ Fortschreitungsrichtungen auf M'_k bez. M''_{n-k-1}. Dabei gilt für die Gesammtheit aller scheinbaren Doppelpunkte die Kronecker'sche Formel:

$$53)\quad \Sigma\,\mathrm{sign.}\left\{\begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ -\varphi_{n-1\,1} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}\right\} = 0,$$

die Summe ausgedehnt über alle scheinbaren Doppelpunkte

$$\psi_1 - \varphi_1 = 0, \quad \psi_2 - \varphi_2 = 0 \ \ldots\ \psi_{n-1} - \varphi_{n-1} = 0,$$

eine Formel, welche die Ueberführung der Formeln (52a) und (52b) in einander vermittelt.

§ 8.

Formeln für die Windungszahl der Mannigfaltigkeiten unter Voraussetzung ihrer Darstellung durch Gleichungssysteme zwischen den Coordinaten. Beweis der Uebereinstimmung der in § 7 und 8 gewonnenen Zahlen.

Gehen wir nunmehr von der Darstellung der beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} durch Gleichungssysteme in den Coordinaten z_i aus. Es sei die M''_{n-k-1} gegeben durch die $(k+1)$ Gleichungen:

$$54'')\quad \begin{array}{l} F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\ F_1(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_k(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \end{array}$$

und analog die M_k' durch die $(n-k)$ Gleichungen

$$54')\quad \begin{array}{l} F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\ F_{k+2}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_n\quad (z_1, z_2, \ldots z_n) = 0. \end{array}$$

Es lässt sich dann auch hier, wie im Falle zweier Raumcurven das in Formel (45) gegebene Integral für die Windungszahl nicht allgemein aufstellen. Man erhält aber analog wie dort den Satz:

Die gegenseitige Windungszahl der beiden durch die Gleichungen (54″) und (54′) definirten Mannigfaltigkeiten ist gleich der Kronecker'schen Charakteristik K der in dem Gleichungssystem enthaltenen $(n+1)$ Functionen

$$55)\qquad F_0, F_1, F_2, \ldots F_n$$

der n Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich genau den Darlegungen des § 4 entsprechend, wenn wir anknüpfen an die Darstellung der Zahl K durch die Summenformel:

$$56)\quad K = (-1)^n \cdot \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{02} & \ldots & F_{1n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ F_{n-11} & F_{n-12} & \ldots & F_{n-1n} \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots \quad F_{n-1} = 0, \quad F_n > 0$$

ist, und diese mit der in Formel (52a) gegebenen Darstellung der Zahl V vergleichen.

Verschieben wir, etwa in Richtung der Axe z_n, die Mannigfaltigkeit M''_{n-k-1}, so ändern sich die Zahlen V und K sprungweise an den Stellen, in welchen die bewegte M''_{n-k-1} die feste M'_k durchsetzt. Wir beginnen nunmehr die Abzählung dieser Aenderungen von einer Lage der M''_{n-k-1} an, in welcher diese völlig getrennt von der M'_k erscheint. Es lässt sich eine solche Lage, wenn wir voraussetzen, dass beide Mannigfaltigkeiten ganz im Endlichen liegen, stets durch eine endliche Verschiebung der M''_{n-k-1} (die wir hier in Richtung der negativen Axe z_n vornehmen) erreichen. In dieser Anfangslage ist V sowohl wie K gleich Null. Die Aenderungen der Zahl V zwischen der Anfangs- und Endlage führen unmittelbar zu den Formeln (52) für V.

Aus den Aenderungen der Zahl K aber ergiebt sich (ganz entsprechend den Entwicklungen auf pag. 472–475) die folgende neue Formel:

$$\text{57)} \quad K = (-1)^{n+1} \cdot \sum \text{sign.} \left\{ \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-1} & 0 & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-1} & 0 & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{k\,n-1} & 0 & F_{kn} \\ F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{n\,n-1} & F_{nn} & 0 \end{vmatrix} \right\},$$

die Summe erstreckt über alle Punkte, für welche

$$F_0(z_1, z_2, \ldots z_n + C) = 0,\; F_1(z_1, z_2, \ldots z_n + C) = 0, \ldots,\; F_k(z_1, z_2, \ldots z_n + C) = 0,$$
$$F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0 \;\ldots\; F_n(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0$$

und $C > 0$ ist, eine Formel, welche K als Kronecker'sche Charakteristik des Systems der Functionen

$$58)\quad \begin{array}{l} F_0(z_1, z_2, \ldots z_n + C), \;\ldots\; F_k(z_1, z_2, \ldots z_n + C), \\ F_{k+1}(z_1, z_2, \ldots z_n), \;\ldots\; F_n(z_1, z_2, \ldots z_n), \quad C \end{array}$$

mit den Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$, C darstellt.

Nunmehr aber lassen sich die Formeln (52) und (57) für die Zahlen V und K direct mit einander vergleichen; sie beziehen sich beide auf die „scheinbaren Doppelpunkte", welche die Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} gesehen in Richtung der Axe z_n darbieten und unterscheiden dieselben in derselben Weise nach dem Vorzeichen der Inhaltsdeterminante:

$$59)\quad \varDelta_{n-1} = \begin{vmatrix} -\overset{(1)}{dz'_1} & -\overset{(2)}{dz'_1} & \ldots & -\overset{(k)}{dz'_1} & \overset{(k+1)}{dz''_1} & \ldots & \overset{(n-1)}{dz''_1} \\ -\overset{(1)}{dz'_2} & -\overset{(2)}{dz'_2} & \ldots & -\overset{(k)}{dz'_2} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \ldots & \overset{(n-1)}{dz''_2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -\overset{(1)}{dz'_{n-1}} & -\overset{(2)}{dz'_{n-1}} & \ldots & -\overset{(k)}{dz'_{n-1}} & \overset{(k+1)}{dz''_{n-1}} & \ldots & \overset{(n-1)}{dz''_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

der linearen $n-1$-dimensionalen Configuration, welche sich aus der Projection der k bez. $n-k-1$ Linienelemente der M'_k bez. M''_{n-k-1} in die Coordinatenmannigfaltigkeit $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ (durch Orthogonalprojection in Richtung der Axe z_n) ergiebt.

Für die obige Inhaltsdeterminante erhält man nämlich zunächst in den φ, ψ geschrieben die Formel:

$$
60) \quad \Delta_{n\cdot 1} = \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \cdots & -\varphi_{1k} & \psi_{1\,k+1} & \cdots & \psi_{1\,n-1} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \cdots & -\varphi_{2k} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -\varphi_{n-1\,1} & -\varphi_{n-1\,2} & \cdots & -\varphi_{n-1\,k} & \psi_{n-1\,k+1} & \cdots & \psi_{n-1\,n-1} \end{vmatrix} d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_k d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1}.
$$

Für die Umsetzung in eine in den Functionen F geschriebene Formel beachte man, dass die Matrix

$$
61') \quad \begin{Vmatrix} -d\overset{(1)}{z_1'} & -d\overset{(1)}{z_2'} & \ldots & -d\overset{(1)}{z_{n-1}'} & -d\overset{(1)}{z_n'} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ -d\overset{(k)}{z_1'} & -d\overset{(k)}{z_2'} & \ldots & -d\overset{(k)}{z_{n-1}'} & -d\overset{(k)}{z_n'} \end{Vmatrix}
$$

correspondirende Matrix ist zu

$$
62') \quad \begin{Vmatrix} F_{k+1\,1}, & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{n\,n-1} & F_{nn} \end{Vmatrix}
$$

und ebenso die Matrix

$$
61'')\quad \begin{vmatrix} \overset{(k+1)}{dz''_1} & \overset{(k+1)}{dz''_2} & \dots & \overset{(k+1)}{dz''_{n-1}} & \overset{(k+1)}{dz''_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \overset{(n-1)}{dz''_1} & \overset{(n-1)}{dz''_2} & \dots & \overset{(n-1)}{dz''_{n-1}} & \overset{(n-1)}{dz''_n} \end{vmatrix}
$$

correspondirende Matrix zu

$$
62'')\quad \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0\,n-1} & F_{0\,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{k\,n-1} & F_{k\,n} \end{vmatrix}
$$

Führt man dann in der Mannigfaltigkeit M'_k etwa die Coordinaten $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots z_{i_k}$, in der Mannigfaltigkeit M''_{n-k-1} die Coordinaten $z_{j_1}, z_{j_2}, \dots z_{j_{n-k-1}}$ als unabhängige Variable ein, wählt die k, bez. $n-k-1$ Fortschreitungsrichtungen auf diesen Mannigfaltigkeiten so, dass jeweils nur eine der obigen unabhängigen Coordinaten sich ändert, während dann die abhängigen Coordinaten den Gleichungen

$$
F_{\sigma i} + \sum_{\mu = i_{k+1}}^{\mu = i_n} F_{\sigma\mu} \frac{\partial z'_\mu}{\partial z'_i} = 0,
$$

$$
\sigma = k+1, \dots n, \qquad i = i_1, i_2, \dots i_k,
$$

beziehungsweise

$$
F_{\tau j} + \sum_{\nu = j_{n-k}}^{\nu = j_n} F_{\tau\nu} \frac{\partial z''_\nu}{\partial z''_j} = 0,
$$

$$
\tau = 0, 1, \dots k, \qquad j = j_1, j_2, \dots j_{n-k-1},
$$

entsprechend sich ändern, bezeichnet endlich D_i bez. D_j die Determinante der F, welche durch Streichung der Vertical-

reihen $i_1, i_2 \ldots i_k$ in der Matrix (62′), beziehungsweise der Reihen $j_1, j_2 \ldots j_{n-k-1}$ in der Matrix (62″) entsteht, so folgt für die $n-1$ gliedrige Determinante (59) der dz in den F geschrieben die Formel:

$$
63)\quad \Delta_{n-1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0\,n-1} & 0 & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1\,n-1} & 0 & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{k\,n-1} & 0 & F_{kn} \\ F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n-1} & F_{k+1\,n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{n\,n-1} & F_{nn} & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \ldots dz'_{i_k}}{D_i} \cdot \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j},
$$

Nun hat man aber für die positiv zu nehmenden Elemente der beiden Mannigfaltigkeiten die Formeln:

$$
64')\quad do'_k = \sqrt{\begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \ldots & \varphi_{n1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \ldots & \varphi_{nk} \end{Vmatrix}^2} \cdot d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_k =
$$

$$
= \sqrt{\begin{Vmatrix} F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \ldots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{Vmatrix}^2} \cdot \frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \ldots dz'_{i_k}}{D_i},
$$

und

64″)

$$do''_{n-k-1} = \sqrt{\begin{vmatrix} \psi_{1\,k+1} & \psi_{2\,k+1} & \cdots & \psi_{n\,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_{1\,n-1} & \psi_{2\,n-1} & \cdots & \psi_{n\,n-1} \end{vmatrix}^2} \cdot d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & \cdots & F_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & \cdots & F_{kn} \end{vmatrix}^2} \cdot \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j}.$$

Der Vergleich dieser Ausdrücke ergiebt, dass einer Summation, in welcher die Elemente $d\lambda_1 \ldots d\lambda_k$ bezw. $d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_{n-1}$ stets positiv genommen sind, eine Summation entspricht, für welche die Ausdrücke

$$\frac{dz'_{i_1}\, dz'_{i_2} \ldots dz'_{i_k}}{D_i} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{dz''_{j_1}\, dz''_{j_2} \ldots dz''_{j_{n-k-1}}}{D_j}$$

stets positiv gerechnet werden.[1]) Hieraus aber folgt durch Vergleich der Formeln (63) und (60), dass für alle Elemente der Summation das Vorzeichen der Determinante (59) in den dz übereinstimmt mit dem der Determinante (60) in den φ, ψ und mit dem der Determinante (63) in den F.

Daraus aber folgt die Identität der durch die Formeln (52) und (57) gewonnenen Zahlen V und K und damit der zu Eingang des Paragraphen aufgestellte Satz.

---

1) Das aus diesen Formeln für die Mannigfaltigkeiten abzuleitende „Fortgangsprincip“ erweist sich als Verallgemeinerung des von Kronecker in der Abh. vom März 1869 (vergl. auch diese Abh. S. 473, Anm.) gegebenen, worauf ich in einer folgenden Note noch näher einzugehen gedenke.

§ 9.

Folgerungen. Schlussbemerkungen.

Der hiermit gewonnene Satz über die Bedeutung der Kronecker'schen Charakteristik der Functionen

$$F_0, \quad F_1, \quad \ldots \quad F_n$$

als Windungszahl zweier Mannigfaltigkeiten $M_k^{\prime}$ und $M_{n-k-1}^{\prime\prime}$, die durch Nullsetzen von $n-k$ bez. von $k+1$ der obigen Functionen gewonnen werden, lässt nun die Bedeutung der Zahl K für dieses Functionensystem in ganz allgemeiner Weise übersehen:

Wie wir auch das System der $n+1$ Functionen von n Variabeln z in zwei Theile zerlegen, stets definiren die gleich Null gesetzten Functionen der beiden Theile zwei sich ergänzende Mannigfaltigkeiten von k bez. von $n-k-1$ Dimensionen, deren Windungszahl stets dieselbe, und gleich der Kronecker'schen Charakteristik K des Functionensystems ist. Für $k=0$ erhalten wir ein System von Punkten in Verbindung mit einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen[1]), für $k=1$ eine lineare Mannigfaltigkeit und eine $n-2$-dimensionale u. s. w.

Im zweidimensionalen Raume handelt es sich um die Windung von Linien um Punkte, im dreidimensionalen Raume um die Windung von Flächen um Punkte, von Linien um Linien, im vierdimensionalen Raume um die Windung von dreidimensionalen Räumen um Punkte, von Flächen um Linien, im fünfdimensionalen Raume um die Windung von vierdimensionalen Räumen um Punkte, von dreidimensionalen Räumen um Linien, von Flächen um Flächen u. s. w.

---

1) Es erscheint in diesem Zusammenhange sinngemäss, auch von einer Windungszahl einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit um ein Punktsystem zu sprechen.

Dabei liefern die verschiedenen Möglichkeiten, die $n+1$ Functionen des Systems zu je 1 und n, zu 2 und $n-1$ u. s. w. abzutheilen im Ganzen $n+1$ verschiedene Punktsysteme, $\frac{n+1 \cdot n}{1 \cdot 2}$ Linien, allgemein $\binom{n+1}{k+1}$ k-dimensionale Mannigfaltigkeiten in Verbindung mit ihren complementären Mannigfaltigkeiten von $n-k-1$ Dimensionen, denen sämmtlich ein und dieselbe Windungszahl zukommt.

Diesen verschiedenen Möglichkeiten, die Zahl K als Windungszahl zweier durch Zerlegung des Functionensystems

$$F_0, F_1, \ldots F_k \parallel F_{k+1}, \ldots F_n$$

hergestellten Mannigfaltigkeiten aufzufassen, entsprechen nun paarweise die verschiedenen Arten der Darstellung von K durch bestimmte Integrale 0ter (Summenformel) bis $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, von denen wir im ersten Theile dieser Beiträge gehandelt haben.

Speciell bezieht sich die dort in (14) gegebene Kronecker'sche Summenformel, und ebenso andererseits das von Kronecker abgeleitete $(n-1)$-fache über $F_0 = 0$ ausgedehnte Integral auf die Deutung der Charakteristik als Windungszahl der $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ um das Punktsystem $F_1 = 0, \ldots F_n = 0$. Allgemein giebt das in Formel (26) der Beiträge I gegebene $(n-k-1)$-fache Integral und ein correspondirendes k-faches die Auffassung der Zahl K als Windungszahl der Mannigfaltigkeiten

$$M''_{n-k-1}: \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots F_k = 0$$

und

$$M'_k \quad : \quad F_{k+1} = 0, \quad F_{k+2} = 0, \ldots \quad F_n = 0.$$

Es verdient dabei in diesem Zusammenhange nochmals der dort schon erwähnte Umstand hervorgehoben zu werden,

dass das zur Berechnung der Windungszahl dienende $(n-k-1)$-fache Integral sich über die M''_{n-k-1} als Grenze erstreckt, während der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck lediglich von den zur Definition der M'_k dienenden Functionen abhängt. Mit Hülfe der in den dortigen Entwicklungen zu Grunde gelegten Deutung der Functionen F als Coordinaten eines $(n+1)$-dimensionalen Raumes $x_0, x_1, \ldots x_n$ erhält dabei der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck die gerade für die Auffassung des Integrals als Windungszahl wesentliche Bedeutung als Differential eines $(n-k-1)$-dimensionalen „räumlichen Winkels".

Das n-fache, in Formel (12) der „Beiträge I" gegebene Integral für K hat für die hier erörterte Theilung des Functionensystems der F keine unmittelbare Bedeutung. Ein Integral dieser letzteren Art hat dagegen in den auf die Parameterdarstellung der beiden Mannigfaltigkeiten M'_k und M''_{n-k-1} bezüglichen Formeln (§ 7) den Uebergang der an die Kronecker'sche Charakteristik anknüpfenden Integrale zu der Gauss'schen Darstellung der Windungszahl vermittelt.

Umgekehrt kann man nun auch die Deutung der Zahl K als Windungszahl zweier zusammengeordneter Mannigfaltigkeiten wieder anwenden auf das aus der Parameterdarstellung (Formel 47′ und 47″) gewonnene Functionensystem

$$50)\qquad \psi_1-\varphi_1,\quad \psi_2-\varphi_2,\quad \ldots\quad \psi_n-\varphi_n.$$

Betrachtet man nämlich die $n-1$ Parameter λ_i als Coordinaten eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes, so ergeben sich auch hier durch Nullsetzen je zweier sich ergänzender Gruppen von Functionen $\psi_i-\varphi_i$ einander zugeordnete Paare von Mannigfaltigkeiten, deren gegenseitige Windungszahl eben wieder unsere Zahl K ist. Ich gehe indess hier nicht näher auf diese Entstehungsweise der Zahl K ein.

Berichtigungen

zum I. Theile der Beiträge zur Potentialtheorie.

Auf Seite 264 Formel (5) sind im Nenner die Matrixstriche zu ergänzen.

„	**„ 271**	**Zeile 9**	**von oben**	**ist zu lesen Gleichung**	**(18)**	**statt**	**(16).**
„	**„ 275**	**„ 7**	**„ „**	**„ „ „ „**	**(21)**	**„**	**(19).**
„	**„ 275**	**„ 9**	**„ „**	**„ „ „ „**	**(25)**	**„**	**(23).**
„	**„ 275**	**„ 8**	**„ unten**	**„ „ „ „**	**(14)**	**„**	**(19).**

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1895.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Société d'Émulation in Abbeville:

Mémoires. Tome 18. 19. 1893/94. 8⁰.
Bulletin. Année 1892 No. 2—4, 1893 No. 1—4, 1894 No. 1. 2. 8⁰.
Cinquentenaire de M. Ernest Prarond. 1894. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. 19, part 1. 1895. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis za godinu. 1894. 1895. 8⁰.
Rad. Vol. 117—122. 1894/95. 8⁰.
Monumenta spectantia historiam Slavorum merid. Vol. XXVI. 1894. 8⁰.
Monumenta historico-juridica Slav. merid. Vol. V. 1894. 8⁰.
Djela. Vol. XIV, 1. 1895. 4⁰.
Tade Smičiklas, Život i djela Dra Franje Račkoga. 1895. 8⁰.
Milan Rešetar, Zadarski i Rańinin Lekcionar. 1894. 8⁰.

New-York State Library in Albany:

New-York State Museum. 47th annual Report for 1893. 1894. 8⁰.
New-York State Library. 76th annual Report for 1892/93. 1894. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

State Library Bulletin. a) Bibliography No. 1. b) Additions No. 2. 1894/95. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1893 No. 1—4. 1894 No. 1. 1893/94. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I Sectie. Deel II, 7. Deel III, 1—4. II Sectie. Deel IV, 1—6. 1894/95. 4⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. Deel I, No. 4. 1895. 4⁰.

Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jaar 1894/95. 1895. 4°.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde 3e Reeks, Deel 11. 1895. 8°.
Jaarboek voor 1894. 8°.
Myrmedon aliaque poemata. 1895. 8°.

Peabody Institute in Baltimore:

28th annual Report. June 1, 1895. 8°.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XIV, No. 119, 120, 121. 1895. 4°.
American Journal of Mathematics. Vol. XVI, 4. XVII, 1—3. 1894/95. 4°.
The American Journal of Philology. Vol. XV, 2—4. XVI, 1. 1894/95. 8°.
American Chemical Journal. Vol. 16, No. 7 u. 8. Vol. 17, No. 1—7. 1894/95. 8°.
Johns Hopkins University Studies. Ser. XII. No. 8—12, Ser. XIII, No. 1—8. 1894/95. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band XI, 1. 1895. 8°.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

Basler Chronik. Leipzig 1895. 8°.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1894/95. 4° und 8°.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 38, afl. 4. 5. 1895. 8°.
Notulen. Deel 32, afl. 4; Deel 33, afl. 1. 2. 1895. 8°.
Verhandelingen. Deel 48, stuk 2; Deel 50, 1. 1894/95. 8°.
Nederlandsch-Indisch-Plakaatboek. Deel XIII. 1895. 8°.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 54. 1895. 8.
Boekwerken ter tafel gebracht in de vergaderingen 1893. 1894. 1894/95. 8°.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv für Geschichte u. Alterthumskunde in Ostfranken. Band XIX, 2. 1894. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Belgrad:

Glas. No. 48. 1895. 8°.
Spomenik. No. 26. 27. 29. 1895. 4°.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Abhandlungen aus dem Jahre 1894. 4°.
Sitzungsberichte. 1895, No. 26-38. 4°.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 16, 17 u. 19 mit zugehörigen Atlanten. 1895. 4° u. fol.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 28. Jahrg., No. 12—18. 1895. 8°.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 46, Heft 4; 47, Heft 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1893. 49. Jahrg., Abth. I—III. Do. i. J. 1889; 45. Jahrg. 3 Voll. Braunschweig 1895. 8⁰.

Verhandlungen. 12. Jahrg. No. 1, 13. Jahrg. No. 1—4, 14. Jahrg. No. 1 u. 2. Leipzig 1894. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. 1895. No. 8—14. 16—19. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahresbericht über d. Jahr 1894/95. 1895. 4⁰.

Jahrbuch. Band X, Heft 2 u. 3. 1895. 4⁰.

Geodätisches Institut in Berlin:

Zenithdistanzen zur Bestimmung der Höhenlage der Nordsee-Inseln Helgoland etc. 1895. 4⁰.

A. Westphal, Untersuchungen über den selbstregistrirenden Universalpegel zu Swinemünde. 1895. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Bericht über d. Jahr 1894. 1895. 8⁰.

Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1894. 1895. 4⁰.

Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen im Jahre 1891. 1895. 4⁰.

Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im J. 1893. 1895. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Bd. XXIV, Heft 2. 3. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Band VIII, 1. Leipzig 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band X, Heft 6—11. 1895. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 15. Jahrg. 1895. No. 7—12. Juli—Dezember. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen aus d. Jahre 1894. 1895. 8⁰.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:

Neue Denkschriften. Band 34. 1895. 4⁰.

Verhandlungen. 77. Jahresversammlung. Schaffhausen 1894. 8⁰. Nebst einer französischen Uebersetzung. Genève 1894. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Band XIV, 3. 1895. 8⁰.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VI. Série, Vol. 7. 8. 1893/94. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti. Serie III. Vol. XIII, fasc. 1—3. 1895. 4⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 96—98. 1895. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 51. Jahrg. 2. Hälfte. 1894. 8⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Mémoires. IVᵉ Série, tome III, 2. IV, 1. 2. Paris et Bordeaux 1893/94. 8⁰.
Observations pluviométriques 1892/93. 1893. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 45. 46. 1893. 8⁰.
Catalogue de la bibliothèque, fasc. 1. 1894. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1895. No. 13—20. 8⁰.

Archiv der Stadt Braunschweig:

Urkundenbuch der Stadt Braunschweig. Bd. II, Abth. 1. 1895. 4⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:

72. Jahresbericht nebst Ergänzungsheft. 1895. 8⁰.

Historisch-statistische Sektion der k. k. Mährischen Landwirthschafts-Gesellschaft in Brünn:

Urkunden zur Geschichte der Stadt Brünn. 1895. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires des membres in 4⁰. Tome 50, part 2. T. 51. 52. 1893/94. 4⁰.
Mémoires couronnés in 4⁰. Tome 53. 1893/94. 4⁰.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tome 47. 50. 51. 52. 1892/95. 8⁰.
Correspondance du Cardinal de Granvelle. Tome X et XI. 1893/94. 4⁰.
Biographie nationale. Tome XII, 2. XIII, 1. 1892—94. 8⁰.
Bulletin. 3. Série. Tome 29, No. 6; Tome 30, No. 7—10. 1895. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés et autres mémoires. Tome XIV, No. 1—3. 1895. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tome IX, No. 7—10. 1895. 8⁰.

Institut international de bibliographie in Brüssel:

Bulletin. Vol. 1, No. 1. 1895. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XIV, 3 u. 4. 1895. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tom. 38. 1894. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 27. Année 1892. 8⁰.
Procès-verbaux. 1892—95. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Ungarische Revue. 1895. Heft 5—7. 8⁰.

Almanach. 1895. 8⁰.

Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftl. Mittheilungen.) Bd. XXIV, 3. 4; XXV, 1. 2. 1893/94. 8⁰.

Zs. Simonyi, A Magyar határozók. (Die Bestimmungswörter im Ungarischen.) Bd. II, 2. 1895. 8⁰.

Gy. Zolnay, Nyelvemlékeink. (Unsere Sprachdenkmäler.) 1894. 4⁰.

Törénettud. Ertekezések. (Historische Abhandlungen.) XVI, 2—5. 1893—95. 8⁰.

Téglás Gabor, Ujab adalékok. (Neuere Beiträge zu den Felseninschriften.) 1894. 4⁰.

Monumenta comitialia regni Transylvaniae. Vol. XVI. XVII. 1893—94. 8⁰.

Óváry, L. A. M. T. Akad. történelmi bizottságának oklevélmásolatai. (Urkunden-Abschriften d. histor Commission.) Bd. 2. 1894. 8⁰.

Király J., Pozsony város joga a Középkorban. (Pressburger Stadtrecht.) 1894. 8⁰.

Archaeologiai Értesitö. (Archäolog. Anzeiger.) XIII, 3—5; XIV, 1—5; XV, 1—3. 1893. 4⁰.

Archaeologiai Közlemények. (Archäol. Mittheil.) Bd. XVII. 1895. fol.

Tarsadalmi Értekezések. (Staatswissensch. Abhandlungen.) XI, 7—10. 1894—95. 8⁰.

Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissenschaftl. Abhandlungen.) XVI, 4. 5. 1894. 8⁰.

Munkácsi B., A Votják nyelv szótára. (Votjákisches Wörterbuch.) fasc. 3. 1893. 8⁰.

Magyarországi tanulók külföldön. (Ungarische Studirende im Auslandd.) Vol. III. 1893. 8⁰.

Acsády J., Két penzügytörténelmi tanulmány. (Zwei finanzgeschichtliche Studien.) 1894. 8⁰.

Fraknói V., Mátyás Király levelei. (Sektion für äussere Angelegenheiten.) Vol. I. 1893 8⁰.

Thaly K., Bercsényi házassága. (Die Ehe Bercsenyi's.) 1894. 8⁰.

Monumenta Hungariae historica. Class. II. Vol. 33. 1894. 8⁰.

Hampel J., A régibb Középkor emlékei. (Denkmäler des früheren Mittelalters.) Vol. I. 1894. 8⁰.

Természélludományi Értekezések. (Naturwissenschaftl. Abhandlungen.) XXIII, 3—12. 1894. 8⁰.

Mathematikai Értekezések. (Mathem. Abhandlgn.) XV, 4. 5. 1894. 8⁰.

Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) XI, 6—9. XII, 1—12. XIII, 1. 2. 1893—95. 8⁰.

Mathematikai Közlemények. (Mathem. Mittheilungen.) XXV, 4. 5. XXVI, 1. 2. 1893—94. 8⁰.

Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. XI, 1. 2. XII, 1. 2. 1893—95. 8⁰.

Rapport. 1893. 1894. 1894—95. 8⁰.

Chyzer C. & L. Kulczyński, Araneae Hungariae. Tom I. II, 1. 1892—94. 4⁰.

Meyer Gotth. Alfréd, Der silberne Sarg des heil. Simeon in Zara (in ungar. Sprache.) 1894. fol.

Szamota István, A Schlägli Magyar Szójegyzék. 1894. 8⁰.

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. Vol. XXV, 2. 1895. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Évkönyve (Jahrbuch.) Bd. XI, 3—6. XII, 1. 1895. 8⁰ und Atlas zu XI, 4 in fol.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. IX, 7. 1895. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. XXV, 1—5. 1895. 8⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin. No. XIV. Batavia 1895. 4⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. IX, anul 1893. 1895. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. IV. Série. Vol. 8, fasc. 1—4. Vol. 9, fasc. 1. 1894/95. 8⁰.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser. No. 850—59. 1894—95. 8⁰.
Journal. No. 344—46. 1895. 8⁰.
Proceedings. No. 4—8, April—August 1895. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 28, part 3 u. 4. 1895. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1895 January—July and Annual Summary 1894. 1895. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. V, part 7—10. Calcutta 1895. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. VII, part 1—4. Simla 1895. fol.
Report on the Administration in 1894/95. 1895. fol.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VIII, part 5. 1895. 8⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 27, No. 1—6. 1895. 8⁰.
Memoirs. Vol. XVIII, XIX, 1. 1895. 4⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. II. Berlin 1895. 4⁰.
Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt 1894/95. Berlin 1895. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch 1894. Jahrg. XII, 1. Hälfte. 1895. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Remarques sur la nomenclature hépaticologique par Aug. Le Jolis. Paris 1894. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist“ in Chicago:

The Monist. Vol. 5, No. 4. Vol. 6, No. 1. 1895. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court“ in Chicago:

The Open Court. No. 409—430. 1895. 4⁰.

Norweg. Gradmessungs-Commission in Christiania:

Astronomische Beobachtungen. 1895. 4⁰.

O. E. Schiötz, Resultate der 1894 ausgeführten Pendelbeobachtungen. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:

Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 38. 1895. 8⁰.

P. Lorenz, Die Ergebnisse der sanitarischen Untersuchungen der Rekruten des Kantons Graubünden. Bern 1895. 4⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1895. No. 48—101. fol.

Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1895/96. 1895. 8⁰.

Uebersicht der akademischen Behörden 1895/96. 1895. 8⁰.

Die feierliche Inauguration des Rektors am 4. Okt. 1894. 1895. 8⁰.

Provinzial-Commission zur Verwaltung der westpreussischen Provinzial-Museen in Danzig:

Abhandlungen zur Landeskunde der Provinz Westpreussen. Heft IX. 1894. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

5 Abhandlungen aus den Proceedings von 1895. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau:

Mittheilungen. Band VII, 3. 1895. 8⁰.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IV. Série. Tome 4. Années 1893—94. 1894. 8⁰.

Gelehrte estnische Gesellschaft in Dorpat:

Sitzungsberichte 1894. 1895. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Vol. 18, trimestre 1—3. 1895. 8⁰.

K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:

Jahresbericht 1894/95. 1895. 8⁰.

Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. XVI. 1895. 8⁰.

Generaldirektion der kgl. Sammlungen in Dresden:

Bericht über die Verwaltung der kgl. Sammlungen in Dresden 1892/93. 1895. fol.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal of the American Chemical Society. Vol. 17, No. 10. 1895. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1894—95. p. 177—276. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XX, p. 385—480. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte in Eisleben:

Mansfelder Blätter. IX. Jahrg. 1895. 8⁰.

Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländ. Alterthümer in Emden:
Jahrbuch. Bd. XI, 1. 2. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:
79. Jahresbericht für 1893/94. 1895. 8⁰.

K. Universität Erlangen:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Ser. Vol. 18, disp. 2. 1895. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Band XIX, No. 1. 2. 1895. 4⁰.
Bericht. 1895. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:
Jahresbericht für 1893/94. 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:
Helios. 13. Jahrg. 1895. No. 1—6. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i/Br.:
Berichte. Bd. IX, 1—3. 1894—95. 8⁰.

Kirchlich-historischer Verein in Freiburg i/Br.:
Freiburger Diöcesan-Archiv. Bd. 24. 1895. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:
Collectanea Friburgensia. Fasc. IV. 1895. 4⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. Wint.-Sem. 1895/96. 1895. 8⁰.

Institut national in Genf:
Bulletin. Tome 33. 1895. 8⁰.

Observatoire in Genf:
Resumé météorologique de l'année 1894. 1895. 8⁰.
Sur quelques particularités de l'hiver 1894/95. par A. Kammermann. 1895. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:
Mémoires. Tome XXXII, 1. 1894—95. 4⁰.

Universität Genf:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:
Annali. Ser. II. Vol. 14. 15. 1894—95. 8⁰.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:
30. Bericht. 1895. 8⁰.

Universität in Giessen:
Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ und 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Neues Lausitzisches Magazin. Band 71, Heft 1. 2. 1895. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Göttingische gelehrte Anzeigen. No. VII—XII, Juli—December 1895. 4⁰.
Nachrichten. Hist.-philol. Classe. Heft 3. 4. 1895. 4⁰.
" Mathem.-phys. Classe. Heft 2. 3. 1895. 4⁰.

Astronomische Mittheilungen der k. Sternwarte zu Göttingen. Th. IV. 1895. 4⁰.
Geschäftliche Mittheilungen. 1895. No. 2.

Sternwarte in Göttingen:

A. von Koenen u. W. Schur, Ueber die Auswahl der Punkte bei Göttingen, an welchen bei Probe-Pendelmessungen Differenzen zu erwarten waren. 1895. 4⁰.

Denison Scientific Association in Granville (Ohio).

Bulletin of the Scientific Laboratories of Denison University. Vol. VIII, part 1. 2. 1893/94. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville:

Journal. Vol. V, p. 71—138. 8⁰.

Landesmuseum Joanneum in Graz:

LXXXIII. Jahresbericht über das Jahr 1894. 1895. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. 43. Heft. 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrg. 1894. Heft 31. 1895. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:

Pommersche Genealogien. Bd. 5. 1896. 8⁰.

K. Niederländische Regierung im Haag:

J. A. C. Oudemans, Die Triangulation von Java. IV. Abth. 1895. 4⁰.
Nederlandsch kruidkundig Archief. I. Ser. 6. Deel. 4ᵉ Stuk. Nijmegen. 1895. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel I, aflev. 3. 4. 1895. 8⁰.
De Garĕbŏg's te Ngajogyåkartå door J. Groneman. 1895. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Tome 29, livr. 2. 3. 1895. 8⁰.
Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Vol. VI. La Haye 1895. 4⁰.

Teyler Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Ser. II. Vol. 4, partie 4. 1895. 4⁰.
Verhandlungen van Teylers tweede Genootschap. N. R. Deel. V, stuk 1. 1895. 8⁰.
Verhandlungen van Teylers godgeleerd Genootschap. N. S. Deel. XV. 1895. 8⁰.

Gymnasium zu Hall in Tyrol:

Programm 1894/95. 1895. 8⁰.

Kais. Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft XXXI, No. 11—22. 1895. 4⁰.

Thüringisch-sächsischer Geschichts- und Alterthumsverein in Halle:

Jahresbericht für 1894/95. 1895. 8⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 49, Heft 2. 3. Leipzig 1895. 8⁰.

Universität Halle:

Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ und 8.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift f. Naturwissenschaften. Bd. 68, Heft 1 u. 2. Leipzig 1895. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftl. Anstalten. XI. Jahrg. 1893 und Beiheft. 1894. 4⁰.

Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde in Hanau:

Bericht. 1892—95. 1895. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1895. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Leo Königsberger, Hermann v. Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. 1895. 4⁰.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. V, Heft 2. 1895. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Observations météorologiques. 1889—1890. Kuopio 1895. fol.
Observations (météorologiques). Vol. XII, livr. 1. 1894. fol.
Acta societatis scientiarum Fennicae. Tom. 20. 1895. 4⁰.
Öfversigt XXXVI. 1893/94. 1894. 8⁰.
Bidrag till kännedom af Finlands Natur och Folk. Heft 54—56, 1894/95. 8⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften der Universität Helsingfors aus d. Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Band XXVI, Heft 3. 1895. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1894/95. 1895. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen. 44. Jahrg. 1895. 8⁰.

Michigan Mining School in Houghton:

Prospectus of elective studies. May 1895. 8⁰.

Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. XXII. Jahrg. 1895. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge. Band 39. 1895. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 29, Heft 3 u. 4. Bd. 30, Heft 1. 1895. 8⁰.

Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde in Jena:
Zeitschrift. Bd. VIII, 3. 4; IX, 1. 1893/94. 8⁰.
Regesta diplomatica necnon epistolaria historiae Thuringiae. 1. Halbband. 1895. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):
Sitzungsberichte. Bd. X, 3. 1895. 8⁰.
Schriften. No. VIII. 1895. 4⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):
Schriften der Universität aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:
Jahresbericht des Centralbureaus für das Jahr 1894. 1895. 4⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:
Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Grossh. badische Staats-Alterthümersammlung in Karlsruhe:
Veröffentlichungen der grossh. badischen Sammlungen. 1895. 4⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. IIᵉ Série. Tome IV, No. 3. 4; V, No. 1. 2. 1894/95. 8⁰.

Universität Kasan:
Utschenia Sapiski. Tom. 62, No. 2. 7. 8. 9. 11. 1895. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte in Kassel:
Zeitschrift. N. F. Bd. XIX. 1894. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrgang 1892. 1893. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:
Abhandlungen und Bericht XL. 1895. 8⁰.

Universität Kharkow:
Sapiski. 1895. Heft 3. 8⁰.

K. Universität in Kiel:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Zeitschrift. Band 24. 1894. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:
Schriften. Band X, Heft 2. 1895. 8⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Vol. ?5, No. 3—10. 1895. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:
Értesitő. 3 Hefte. 1895. 8⁰.

Kroatische archäologische Gesellschaft in Knin:
Glasilo. Band I, Heft 3. 1895. 4⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:
Schriften. 35. Jahrgang. 1894. 1895. 4⁰.

Universität in Königsberg:
Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Arabere og Kabyler Skildringer af Carit Etlar. 2 Bde. 1868—70. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1895. No. 2. 8⁰.
Skrifter. 1) historisk. Afd. IV, 2. 2) naturvid. Afd. VIII, 1. 1895. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke. Band 10, Heft 2 u. 3. 1895. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Sprawozdania komisyi fizyograficzney. Tom. 29. 1894. 8⁰.
Zbiór wiadomošci do Antropol. Tom. XVIII. 1895. 8⁰.
Anzeiger. 1895. Juni, Juli, Oktober. November. 8⁰.
Rozprawy. a) histor.-filoz. Ser. II, Tom. 6. b) mathemat. Ser. II, Tom. 7. 1895. 8⁰.
Biblioteka pisarzy polskich. Tom. 30. 1895. 8⁰.
Finkel, Bibliografia histor. Tom. 2, Heft 1. 1895. 8⁰.
Archiwum literat. Tom. 8. 1895. 8⁰.
Pamiętnik (mathemat.) Tom. 18, Heft 3. 1895. 4⁰.

Historischer Verein für Niederbayern in Landshut:

Verhandlungen. 31. Band. 1895. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. III. Serie. Vol. XXXI, No. 117. 118. 1895. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. Deel XIV, No. 3, 4. 1895. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Band XV, No. 3. 4. 1895. 4⁰.
Berichte. Philol.-hist. Classe. 1895. I. II. 8⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXII, No. 2—5.
Berichte. Math.-phys. Classe. 1895. Heft II—IV. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 51, Heft 12. Bd. 52, Heft 3—11. 1895. 8⁰.

Anatomische Gesellschaft in Leipzig:

Wilhelm His, Die anatomische Nomenclatur. 1895. 8⁰.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Katalog. I. Abth. 10. Stück. 1895. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. 30. Jahrg. Heft 3. 1895. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv der Mathematik und Physik. II. Reihe, 14. Theil, 1. u. 2. Heft. 1895. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. II. 1895. 8⁰.
Mittheilungen. 1894. 1895. 8⁰.

Faculté in Lille:

Travaux et Mémoires. Tome III, No. 10—14. 1893. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin of the Agricultural Experiment Station. No. 43. 1895. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:

53. Jahresbericht, nebst 47. Lieferung der Beiträge zur Landeskunde. 1895. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XI, 1. 1895. 4⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. X, No. 39. 40. 1895. 8⁰.

Royal Society in London:

Philosophical Transactions. Vol. 185, part II. A. B. 1895. 4⁰.
Proceedings. Vol. 58, No. 347—352. 1895. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 55, No. 8. 9. Vol. 56, No. 1. 1895. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 392—397. July—December 1895. 8⁰.
Proceedings. No. 154—156. 1895. 8⁰.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. No. 201—204. 1895. 8⁰.
Geological Literature during the halfyear ended Dec. 1894. 1895. 8⁰.

Linnean Society in London:

Proceedings. Nov. 1893 to June 1894. 8⁰.
The Journal. Zoology. Vol. 25, No. 158—160. Botany. Vol. 30, No. 209. 210. 1894. 8⁰.
The Transactions. II. Ser. Zoology. Vol. VI, part 3. Botany. Vol. IV, part 2; V, part 1. 1894—95. 4⁰.
List 1894/95. 1894. 8⁰.

Medical and Chirurgical Society in London:

Transactions. Vol. 78. 1895. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1895. Part 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:

Proceedings. 1895. Part II. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 52, No. 1334—57. 1895. 4⁰.

Academy of Science in St. Louis:

Transactions. Vol. VI, No. 18. Vol. VII, No. 1—3. 1895. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome XX, 3; XXI, 3; XXII, 1. 2. 1892—95. 8⁰.

Section historique de l'institut Royal Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Vol. 42—44. 1895. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 50 u. 1 Fascikel Beilagen. Stans 1895. 8⁰.

Académie des sciences in Lyon:

Cartulaire Lyonnais, documents inédits recueillis et publiés par M.-C. Guigue. Tome II. 1893. 4⁰.
Mémoires. Sciences et lettres. III. Sér. Tome 2. Paris 1893. 4⁰.

Société d'agriculture, science et industrie in Lyon:

Annales. VII. Sér. Tome I. 1893. 1894. 4⁰.

Société d'anthropologie de Lyon:

Bulletin. Tome 12. 13. 1894—95. 8⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Tome 38—40. 1891—93. 8⁰.

Onothera ou Oenothera. Les ânes et le vin par le Dr Saint-Lager. Paris 1893. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 27, cuad. 1—6. 1895. 8⁰.

R. Academia de ciencias in Madrid:

Memorias. Tomo XVI. 1895. 4⁰.

Fondazione scientifica Cagnola in Mailand:

Atti. Vol. XII, XIII. 1894/95. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Ser. II. Vol. 26. 1893. Vol. 27. 1894. 8⁰.

Memorie. a) Classe di lettere. Vol. XIX, 2; XX, 1. b) Classe di scienze matematiche. Vol. XVII, 4; XVIII, 3. 1893/95. 4⁰.

Indice generale dei lavori dalla fondazione all' anno 1883. 1891. 8⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 35, fasc. 1. 2. 1895. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 22, fasc. 6. 7. 1895. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. IV. Serie. Vol. 9, No. 3—6. 1894/95. 8⁰.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1894/95 in 4⁰ u. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tomo III, fasc. 1—3 et Supplément. Tomo IV, fasc. 1—3. 1893/94. 4⁰.

Annales de l'Institut botanico-géologique colonial. Vol. I. Paris 1893. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Band IV, 1. 1895. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. Années 1892/93, 1893/94 et 1894/95. 1895. 8⁰.

Observatorio meteorologico central in México:

Boletin mensual. Mayo—Setiembre 1895. 4⁰.

Comision geológica Mexicana in México:

Boletin. No. I. 1895. 4⁰.

Expedicion científica al Popocatepetl por José G. Aguilera y Ezequiel Ordoñez. 1895. 8⁰.

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie II. Vol. 10. 1894. 4⁰.

Amministrazione delle Pubblicazioni Cassinesi in Montecassino (Caserta):
Spicilegium Casinense. Tomus IV, 1. 1895. fol.

Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:
Comercio exterior y movimiento de navegacion en el año 1894. 1895. 4⁰.
Nuestro país por Orestes Araújo. 1895. 8⁰.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:
Mémoires. Section des lettres. 2ᵉ Série. Tome 1, No. 1—4.
Section des sciences. 2ᵉ Sér. Tome 1, No. 1—4. Tome 2, No. 1.
Section de médecine. 2ᵉ Série. Tome 1, No. 1. 1893. 8⁰.

Daschkow'sches ethnographisches Museum in Moskau:
Sistematitscheskoe Opisanie Kollekziy Daschkowskago ethnografitscheskago Musea. Bd. IV. 1895. 4⁰.

Direction des Musées public et Roumiantzow in Moskau:
Compte-rendu (in russ. Sprache). 1892—94. 1895. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. Année 1895, No. 1. 2. 1895. 8⁰.

Lick Observatory in Mount Hamilton, California:
Contributions. No. 4. Sacramento 1895. 8⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Correspondenzblatt. 1895, No. 6—10. 4⁰.

K. bayer. technische Hochschule in München:
Programm für das Jahr 1895/96. 1895. 8⁰.
Bericht für das Jahr 1894/95. 1895. 4⁰.
Personalstand. Winter-Semester 1895—96. 1895. 8⁰.

Universität in München:
Schriften aus dem Jahr 1895 in 4⁰ u. 8⁰.

Historischer Verein in München:
Monatsschrift. 1895. No. 10. 11. 8⁰.
Oberbayerisches Archiv. Bd. 49, Heft 1. 1895. 8⁰.
56. und 57. Jahresbericht. 1895. 8⁰.

Aerztlicher Verein in München:
Sitzungsberichte. Bd. IV. 1894. 1895. 8⁰.

Akademischer Verlag München:
Hochschul-Nachrichten. 1895. No. 55—59. 4⁰.

Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:
22. Jahresbericht für 1893/94. 1894. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:
Mémoires. 5ᵉ Série. Tome 10. 11. 1893. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Sér. II. Tome 13, fasc. 28. 29. Paris 1894. 8⁰.
Catalogue de la bibliothèque. 1894. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:
Atti. Vol. 27. 1894—95. 1895. 8⁰.

R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Ser. 3. Vol. I, fasc. 5—11. 1895. 8⁰.
Atti. Ser. II. Vol. 7. 1895. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. XII, 1. Berlin 1895. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:

Kollektaneen-Blatt. 58. Jahrg. 1894. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 44, part 4 und Appendix. 1895. 8⁰.
Report of the Proceedings of the flameless explosives Committee. Part I, 2. 1895. 8⁰.

Connecticut Academy of Arts and Sciences in New-Haven:

Transactions. Vol. IX, 2. 1895. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. No. 295 u. 296. July and August 1895. No. 298—300. October—December 1895. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:

Report for the year 1894—95. 1895. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Annual Report for the year 1894. 1895. 8⁰.

American Chemical Society in New-York:

Journal. Vol. 17, No. 8. 9. 11. Easton 1895. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 27, No. 2. 3. 1895. 8⁰.

State Museum in New-York:

Bulletin. Vol. 3, No. 12. 13. Albany 1895. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:

Abhandlungen. Band X, Heft 3. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht 1893. 1894. 1894/95. 8⁰.
Mittheilungen. Heft 11. 1895. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Offenbach:

33.—36. Bericht 1891—95. 1895. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mittheilungen. 20. Band. 1895. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Osnabrück:

10. Jahresbericht. 1895. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:

Annual Report. New Series. Vol. VI. 1895. 8⁰.

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. Vol. XII. 1895. 4⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo IX, fasc. 3—6. 1895. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1895. No. 26—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 121, No. 1-6. 8—26. 1895. 4⁰.

Bibliothèque nationale in Paris:

Catalogue des Manuscrits arabes. Fasc. 3. 1895. fol.

École polytechnique in Paris:

Journal. Cahier 63 et 64. 1893/94. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Travaux et Mémoires. Tome 8. 10. 1893/94. fol.
XVIe Rapport sur l'exercice de 1892. 1893. fol.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 643—648. Juillet—Décembre 1895. 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales in 4⁰. Tome XXV. XXVI, 1. 1894. 4⁰.
Annales. Bibliothèque d'études. Tome 4. 1894. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 27, 3; 28, 1—3; 29, 1—3; 30, 1—3; 31, 1. 1893/94. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1895, No. 4—6. 8⁰.
Nouvelles Archives. Sér. III. Tome V, VI, 1. 2. VII, 1. 1893—95. 4⁰.
Centenaire de la fondation du Muséum d'hist. nat. Volume commémoratif. 1893. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 1893. No. 5—12. 1894. No. 1—9. 1893/94. 8⁰.
Mémoires. III. Série. Tome I, fasc. 1—3. 1893/94. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1895, No. 9—13. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tome XVI, 2 et 3 trim. 1895. 8⁰.

Société de mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 23, No. 4—8. 1895. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome 18. 1893. 8⁰.
Mémoires. Tome VI, partie 1—4. 1893. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. V. Sér. Tome 2, No. 5. Tome 3, No. 1. 1895. 4⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XII, 8. 9; XIII, 1—9; XIV, 1—5 et Suppl. au Tome XIII. 1893—95. 8⁰.
Mémoires. Vol. VIII, 2. 3; IX, 3. 4; X, 3; XIV, 1. 3. 1894/95. 4⁰.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Iswestija. Heft 4. 1895. 8⁰.
Éphémerides des étoiles (W. Döllen) pour 1896. 1895. 8⁰.

Kaiserl. russische geographische Gesellschaft in St. Petersburg:

Beobachtungen der russischen Polarstation an der Lenamündung. Th. I. 1882—84. 1895. 4⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XVII. 1895. 8⁰.

Physikal.-chemische Gesellschaft an der kais. Universität St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXVII, Heft 4—8. 1895. 8⁰.

Société des naturalistes de St. Pétersburg:

Travaux. a) Section de géologie. Vol. 23. b) Section de zoologie. Vol. 25. c) Section de botanique. Vol. 25. 1895. 8⁰.

Protokoly. 1895. No. 1—5. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Obosrenie. 1895/96. 1895. 8⁰.

Wostotschnyje Samjetki. (Orientalische Bemerkungen.) 1895. 4⁰

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. Vol. IX, part 4. 1895. fol.

Proceedings. 1895, part I. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XIX, No. 1—3. 1895. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 31, No. 9. June 1895. Vol. 32, No. 1. 2. October, November 1895. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 34, No. 147. 1895. 8⁰.

Transactions. New Series. Vol. XVIII, part 2. 1895. 4⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Scienze fisiche. Vol. VII. 1895. 8⁰.

Portland Society of natural History in Portland:

Proceedings. Vol. II, part 3. 1895. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Rozprawy. Třida I, Ročník 3, čislo 5; Třida II, Ročnik 3, číslo 22—32. T.ida III, Ročník 3, číslo 1 und 4. 1894. 8⁰.

Historický Archiv. Číslo 6. 1895. 8⁰.

Věstník. Ročník IV. Číslo 1—3. 1895. 8⁰.

Bulletin international. Classe des sciences mathématiques I. 1894. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens auf dem Gebiete der Wissenschaft etc. im Jahre 1893. 1895. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band 24, No. 1—5. Bd. 25, No. 1. 1894/95. 8⁰.

K. K. Deutsche (Carl-Ferdinands) Universität in Prag:

Ordnung der Vorlesungen. Winter-Semester 1895/96. 1895. 8⁰.

Personalstand 1895/96.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Jahrg. 1892-93. N. Folge. Heft 8. 1894. 8⁰.

Archaeological Institute of America in Princeton (New-Jersey):
American Journal of Archaeology. Jan.—Sept. 1895. 8°.

Kgl. botanische Gesellschaft in Regensburg:
Katalog der Bibliothek. Th. I. 1895. 8°.

Historischer Verein in Regensburg:
Verhandlungen. Band 47. 1895. 8°.

Observatorio in Rio de Janeiro:
Annuario 1895. 1894. 8°.

Geological Society of America in Rochester:
Bulletin. Vol. VI. 1895. 8°.

R. Accademia dei Lincei in Rom:
Atti. Ser. IV. Memoire della classe di scienze fisiche. Vol. VII. 1894. 4°.
Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. IV. Semestre 1, fasc. 12. Semestre 2, fasc. 1—7. 1895. 4°.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. I, part. 1. Memorie. 1894. Vol. III, part. 2. Notizie degli scavi. April—Aug. 1895. 1894/95. 4°.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. IV, fasc. 4—8. 1895. 8°.
Rendiconto dell' adunanza solenne del 9 Giugno 1895. 1895. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:
Bollettino. Anno 1895, No. 2 u. 3. 8°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:
Atti. Anno 47, Sessione V. Anno 48, Sessione I—VII. 1894/95. 4°.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:
Mittheilungen. Vol. X, No. 1. 2. 1895. 8°.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:
Indici e cataloghi. 42 Hefte. 1886/95. 8°.

Zeitschrift L'Oriente in Rom:
L'Oriente. Rivista trimestrale. Anno II. No. 1. 2. 1895. 8°.

Kgl. italienische Regierung in Rom:
Opere di Galilei. Vol. V. Firenze 1895. 4°.

R. Società Romana di storia patria in Rom:
Archivio. Vol. XVIII, 1. 2. 1895. 8°.

Universität Rostock:
Schriften aus dem Jahr 1894/95 in 4° u. 8°.

Académie des sciences in Rouen:
Précis analytique des travaux. Année 1891/92 et 1892/93. 1893/94. 8°.

Accademia degli Agiati in Rovereto:
Atti. Anno 145, Serie III. Vol. I, fasc. 2. 1895. 8°.

The American Association for the avancement of science in Salem:
Proceedings for the 43d Meeting. August 1894. 1895. 8°.

American Journal of Science in Salem:
Journal. No. 297. (Sept. 1895.) 8°.

Historischer Verein in St. Gallen:

Urkundenbuch der Abtei Sanct Gallen. Th. IV, Lief. 4. 1895. 4⁰.
Der Klosterbruch in Rorschach und der St. Galler Krieg 1489/90 von Joh. Häne. 1895. 8⁰.

Observatorio astronómico meteorológico in San Salvator:

Anales. 1895. fol.

California Academy of Sciences in San Francisco:

Proceedings. Vol. IV, part 2. 1895. 8⁰.
Memoirs. Vol. II, No. 4. 1895. 4⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 35. Vereinsjahr. 1895. 8⁰.

K. K. Staatsgymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1894/95. 1895. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina in San Fernando:

Almanaque naútico para 1897. Madrid 1895. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino. Anno 18, No. 6—11. 1895. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mittheilungen. XIX. 1895. 8⁰.

K. schwedische Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Öfversigt. Vol. 51. 1894. 1895. 8⁰.
Astronomiska Jakttagelser. Vol. V, Heft 1—4. 1893—95. 4⁰.
Hj. Théel, Om Sveriges zoologiska hafsstation Kristineberg. 1895. 8⁰.
Handlingar. Bd. 26. 1894/95. 4⁰.

K. Vitterhets, Historie och Antiquitets-Akademie in Stockholm:

Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Del V, No. 4; Del XIV, No. 2; Del XVI, 1—3. 1895. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Bd. 17, Heft 1—6. 1895. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Heft 6 u. Heft 1895. 8⁰.

Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4⁰ u. 8⁰.

K. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Beschreibung des Oberamts Cannstadt. 1895. 8⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. IV, 4. 1895. 4⁰.
Memoirs. Palaeontology. No. 9. 1895. 4⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings. Vol. 28. 1894. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of N.-South-Wales in Sydney:

Annual Report for the year 1894. 1895. fol.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletin. Tomo I, No. 22. Mexico 1895. 4°.
Anuario. Año de 1896. Mexico 1895. 8°.

Norske Videnskabs Selskab in Throndhjem (Drontheim):

Skrifter 1893. 1894. 8°.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahr 1893. 1895. fol.
Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens in den Jahren 1888/89. 1895. 8°.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mittheilungen. Heft 56 u. Suppl.-Heft 2 zu Bd. VI. 1895. 4°.

Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. 7, part 5. 1895. 4°.
The Imperial University Calendar. 1894/95. 8°.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XII, fasc. 1, 1895. 8°.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 30, disp. 12—16. 1895. 8°.

R. Museo geologico in Turin:

Essai sur l'orogénie de la terre par Fed. Sacco. 1895. 8°.

Universität Tübingen:

Schriften aus dem Jahre 1894/95. 4° u. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. XV, 2. 1895. 4°.

Universität in Upsala:

Schriften der Universität aus d. J. 1894/95 in 4° u. 8°.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Deel XVI. 's Gravenhage 1895. 8°.
Verslag van de algemeene vergadering der leden, 16. April 1895. 's Gravenhage 1895. 8°.
Werken. III. Serie. No. 6. s'Gravenhage 1894. 8°.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks. III, 2. 1895. 8°.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Serie XVIII. Vol. 1. 2. 1894. 8°.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tomo 52, disp. 4—9. Tomo 53, disp. 1—3. 1893—95. 8°.
Memorie. Vol. 25, No. 1—3. 1894. 4°.

Bureau of Ethnology in Washington:

Chinook Texts by Franz Boas. 1894. 8°.
Archeologic Investigations in James and Potomac Valleys, by Gerard Fonke. 1894. 8°.
Tke Siouan Tribes of the East by James Mooney. 1894. 8°.

U. S. Departement of Agriculture in Washington:

Bulletin. No. 6. Division of Ornithology. 1895. 8⁰.

Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:

Index-Catalogue. Vol. XVI. 1895. 4⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Bulletin. No. 34. 1895. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletin. No. 118—122. 1894. 8⁰.
Monographs. No. XXIII. XXIV. 1894. 4⁰.
14th annual Report 1892/93. Part I. II. 1893/94. 4⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Denkschriften. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Bd. 61. 1894. 4⁰.
Sitzungsberichte. Philos.-histor. Classe. Band 131 und Register zu Band 121—130. 1894. 8⁰.
Sitzungsberichte. Mathem.-physikal. Classe. Band 103, Abth. 1, No. 9—10, Abth. 2a, No. 6—10, Abth. IIb, No. 4—10, Abth. III, No. 5—10. 1894. 8⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Band 81, Hälfte II. 1895. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. Abth. II. Bd. 47, Hälfte 2. 1894. 8⁰.
Monumenta conciliorum generalium. Tom. III, pars 3. 1895. fol.
Almanach. 44. Jahrg. 1894. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1895. Band 45, Heft 1. 1895. 4⁰.
Verhandlungen. 1895. No. 8—13. 4⁰.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1892. Band 37. 1894. 4⁰.

Oesterreichische Gradmessungs-Commission in Wien:

Astronomische Arbeiten. 1895. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1895. No. 27—42. 44—52. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXV, 2. 3. 1895. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. 45. Band, Heft 6—9. 1895. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band X, 2. 1895. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 35. Band. Vereinsjahr 1894/95. 1895. 8⁰.

Verein für Nassau'sche Alterthumskunde in Wiesbaden:

Annalen. 27. Band. 1895. gr. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 48. 1895. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. 29, No. 2—5. 1895. 8⁰.

Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven:

Beobachtungen der meteorolog. Station. Th. I. Berlin 1895. 4⁰.

Oriental University Institute in Woking:

Vidmodya, the Sanscrit critical Journal. Vol. 24, No. 4—8. 1895. 8⁰.

Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:

Otto v. Heinemann, Die Handschriften der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Band V. 1895. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 40. Jahrg. Heft 2. 1895. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

7. Jahresbericht. 1893 u. 1894. 1895. 8⁰.

Zeitschrift: Astronomische Mittheilungen in Zürich:

Astronom. Mittheilungen. Jahrg. XII, No. 85 u. 86. 1895. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Le Prince Albert Ier de Monaco:

Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. VIII et IX. 1895. fol.

Eduard Bodemann in Hannover:

Die Leibniz-Handschriften der k. öffentl. Bibliothek in Hannover. 1895. 8⁰.

Renward Brandstetter in Luzern:

Malaio-Polynesische Forschungen. No. IV. 1895. 4⁰.

Ludwig Friedländer in Strassburg:

Juvenalis saturarum libri V. 2 Voll. Leipzig 1895. 8⁰.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Ueber den Zusammenhang zwischen der erdmagnetischen Horizontal-Intensität und der Inclination. 1895. 8⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Systematische Phylogenie der Wirbelthiere. Bd. III. Berlin 1895. 8⁰.

C. A. Hering in Dresden:

Das Entwicklungsgesetz der Erde und der Erzlagerstätten. 1895. 8⁰.

Gustavus Detlef Hinrichs in Saint-Louis:

The Elements of Atom-Mechanics. Vol. 1. 1894. 8⁰.

Charles Janet in Paris:

6 zoologische Abhandlungen in Separatabdrücken a. d. Jahre 1895. 8⁰.

James E. Keeler in Chicago. (London?):

1. Conditions affecting the Form of Lines in the Spectrum of Saturn.
2. A Spectroscopic Proof of the Meteoric Constitution of Saturn's Rings. 1895. 8⁰.

Albert von Kölliker in Würzburg:

Zum feineren Bau des Zwischenhirns. (Sep.-Abdr.) 1895. 8⁰.

Otto Kunze in Friedenau-Berlin:

Geognostische Beiträge. Leipzig 1895. 8⁰.

Le comte de Landberg in Tutzing:

Arabica. No. III. Leide 1895. 8⁰.

Émile Lemoine in Paris:

2 mathematische Abhandlungen. (Sep.-Abdr.) 1894/95. 8⁰.

Ernst Leyst in Moskau:

6 Abhandlungen aus dem Gebiete der Meteorologie und des Erdmagnetismus aus den Bänden X—XVIII des Repertorium für Meteorologie. St. Petersburg. 4⁰.

Katalog der meteorologischen Beobachtungen in Russland und Finnland. St. Petersburg 1887. 4⁰.

Observations faites à l'Observatoire météorologique de l'Université Impériale de Moscou. 1893. 1894/95. (Janvier—Mars). 4⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 58, No. II. Tome 59, No. I. II. Paris 1895. 8⁰.

Julius v. Olivier in München:

Was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse? 1895. 8⁰.

Joseph Reber in Aschaffenburg:

Comenius' Werke. Band I. Giessen 1896. 8⁰.

Carl Meiser in Regensburg:

Taciti opera. Vol. 2, fasc. 7 ed Car. Meiser. Berolini 1895. 8⁰.

Otto Ribbeck in Leipzig:

Vergili opera rec. Otto Ribbeck. Vol. II—IV. 1895. 8⁰.

Wilhelm Schlemüller in Reichenberg:

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Prag 1895. 8⁰.

Hugo Schuchardt in Graz:

Sind unsere Personennamen übersetzbar? 1895. 8⁰.

Edmund Freiherr v. Uslar-Gleichen in Hannover:

Udo, Graf von Reinhausen, Bischof von Hildesheim. 1079—1114. 1895 8⁰.

Albrecht Weber in Berlin:

Vedische Beiträge. 1895. 4⁰.

Friedrich von Weech in Karlsruhe:

Codex diplomaticus Salemitanus. Tom. III. 1895. 8⁰.

Max Wellner in Neugedein:

Einleitung zur Geschichte der Wissenschaften. 1895. 8⁰.

Daniel Werenka in Czernowitz:

Topographie der Bukowina. 1895. 8⁰.

Ludwig F. A. Wimmer in Kopenhagen:

De Danske Runeminders-Maerker. fol.

Les Monuments runiques de l'Allemagne. 1895. 8⁰.

Namen-Register.

v. Baeyer Adolf 197, 278.
v. Bauernfeind Carl Maximilian (Nekrolog) 161.
Bauschinger Julius 239.
Boltzmann Ludwig 25.
Brioschi Francesco (Wahl) 370.

Dyck Walter 1, 261, 305, 447.

Gaudry Albert (Wahl) 370.
Geikie Archibald (Wahl) 370.
Göbel Karl 73, 331.

Hartig Robert 199, 279.
v. Haushofer Karl (Nekrolog) 171.
v. Helmholtz Hermann (Nekrolog) 185.
Hyrtl Josef (Nekrolog) 184.

Ismail Pascha (Nekrolog) 158.

Kowalewski Alexander (Wahl) 370.
Kundt August (Nekrolog) 177.
v. Kupffer Karl 197.

Lehmann-Filhés R. 371.
Lindemann Ferdinand 219, 278, (Wahl) 370.
Lorentz Hendrik Antoon (Wahl) 370.

Maskelyne Nevil Story (Wahl) 370.
v. Miller Wilhelm (Wahl) 370.

Neumann Karl (Wahl) 370.
Nöther Max 93.

v. Pettenkofer Max 155, 365.
Pringsheim Alfred 39, 75, 295, 337.
Pringsheim Nothaneal (Nekrolog) 180.

Radlkofer Ludwig 329.
Ranke Johannes 3.
Rückert Johannes 27.
Rüdinger Nikolaus 125.

v. Sandberger Fridolin 115.
v. Schack Adolf Friedrich (Nekrolog) 155.
Schmidt A. 305.
Seeliger Hugo 2.

v. Voit Carl 161, 443.

v. Weber Eduard 101, 423.

Sach-Register.

Abbildung, conforme eines Flächenstückes 278.
Abbildung der Halbebenen auf ein Polygon 219.
Anpassung, direkte 73.
Antipepton, Eiweissumsatz bei Zufuhr desselben 443.

Befruchtungsvorgang, zur Kenntniss desselben 27.
Blattform von Campanula rotundifolia, abhängig von der Lichtintensität 331.
Blei- und Fahlerzgänge in der Gegend von Weilmünster 115.

Caron 197.

Differentialgleichungen, simultane partielle II. O. mit drei Variabeln 101.
Drehwuchs der Kiefer 199.
Druckschriften, eingelaufene 307, 501.

Eröffnungsrede zur öffentlichen Sitzung 365.

Funktionen, Entwicklung eindeutiger analytischer in Potenzreihen 75.

Halswirbelsäule, Anthropologie derselben 8.

Integralsatz von Cauchy 39, 295.

Kegelschnitte, der 7-Systeme 93.
Kiemenknorpel, Entwicklung derselben bei Petromyzon Planeri 197.
Kümmelöl 278.

Leukocytenwanderung in den Schleimhäuten des Darmkanals 125.

Maxwell'sches Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten 25.
Modell, antikes eines Archimedischen Körpers 278.

Nadelschüttepilz der Lärche 279.

Paullinia, Sapindaceen-Gattung 329.
Pfaff'sche Gleichungen 423.
Photographien, astronomische des Professor Wolf 2.
Potential, Berechnung des erdmagnetischen 305.
Potentialtheorie 261, 305, 447.
Potenzreihen, auf dem Convergenzkreise 337.

Refraktionsconstante, Bestimmungen derselben auf astronomischem Wege 239.

Säkularstörung der Länge des Mondes 371.

Wurzeln, Bestimmung der Anzahl der einem System von n-Gleichungen mit n-Variabeln gemeinsamen 1.

Inhalt.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Sitzung vom 2. November 1895.

Seite

*L. Radlkofer: Monographie der Sapindaceen-Gattung Paullinia . . . 329
K. Goebel: Ueber die Abhängigkeit der Blattform von Campanula rotundifolia von der Lichtintensität 331
Alfr. Pringsheim: Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen 337

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 15. November 1895.

v. Pettenkofer: Eröffnungsrede . . . . 3[illegible]
Wahlen . . . . 37[illegible]

Sitzung vom 7. Dezember 1895.

R. Lehmann-Filhés: Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft 371
Ed. v. Weber: Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen 42[illegible]
C. v. Voit: Ueber den Eiweissumsatz bei Zufuhr von Antipepton 443

Nachtrag zur Sitzung vom 6. Juli 1895.

W. Dyck: Beiträge zur Potentialtheorie. II. 447

Einsendung von Druckschriften 501

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

